KHOA HỌC KHÁM PHÁ

Mario Livio

The Equation
That Couldn't Be Solved

Ngôn ngữ của đối xứng

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

Ngôn ngữ của đối xứng

BIỂU GHI BIÊN MỤC TRƯỚC XUẤT BẢN ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI THƯ VIỆN KHTH TP.HCM
General Sciences Library Cataloging-in-Publication Data

Livio, Mario, 1945-
Ngôn ngữ của đối xứng / Mario Livio ; Phạm Văn Thiều dịch. - T.P. Hồ Chí Minh : Trẻ, 2013.
422 tr. ; 20cm.
Nguyên bản : The equation that couldn't be solved.

1. Lý thuyết nhóm. 2. Lý thuyết Galois. 3. Hàm đối xứng -- Lịch sử. 4. Đối xứng (Toán học) -- Lịch sử. 5. Phân tích Diophantus -- Lịch sử. I. Phạm Văn Thiều. II. Ts: The equation that couldn't be solved.

512.209 -- dc 22
L788

Mario Livio

Phạm Văn Thiều *dịch*

The Equation
That Couldn't Be Solved

Ngôn ngữ của đối xứng

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

Lời nói đầu

Ngay từ hồi còn học trung học tôi đã say mê Évariste Galois. Một chàng trai 20 tuổi có thể phát minh ra cả một lĩnh vực toán học mới mẻ, đầy hấp dẫn quả là một nguồn cảm hứng thực sự. Tuy nhiên, vào những năm cuối đại học, chàng trai lãng mạn người Pháp này lại là nguồn gốc khiến tôi thật sự thất vọng. Bạn cảm thấy như thế nào khi bạn nhận ra mình đã ở tuổi 23 mà chẳng làm được điều gì có tầm cỡ tương tự? Khái niệm *nhóm* mà Galois đưa ra, ngày nay đã được thừa nhận là ngôn ngữ "chính thức" của đối xứng. Và, vì đối xứng đã xuyên suốt nhiều lĩnh vực, từ nghệ thuật thị giác và âm nhạc tới tâm lý học và các lĩnh vực khoa học tự nhiên, nên sẽ không có gì là quá đáng, nếu nói rằng ngôn ngữ này là rất quan trọng.

Danh sách những người có đóng góp trực tiếp hoặc gián tiếp cho quyển sách này có lẽ phải chép chật kín vài trang giấy. Ở đây tôi sẽ chỉ nhắc tới những người mà không có sự giúp đỡ của họ tôi khó có thể hoàn thành bản thảo đúng thời hạn được. Tôi xin cám ơn Freeman Dyson, Ronen Plesser, Nathan Seiberg, Steven Weinberg, và Ed Witten vì những cuộc trò chuyện về vai trò của đối xứng trong vật lý. Tôi cũng xin cám ơn Ngài Michael Atiyah, Peter Neumann, Joseph Rotman, Ron Salomon và đặc biệt là Hillel Gauchman đã có những nhận xét sâu sắc và quan trọng về toán học nói chung và về lý thuyết của Galois nói riêng. Tôi xin cám ơn John O'Connor và

Edmund Robertson đã giúp tôi về lịch sử toán học; Simon Conway Morris và David Perrett đã chỉ cho tôi hướng đi đúng trong những chủ đề có liên quan đến tiến hóa và tâm lý học tiến hóa. Tôi đã có những cuộc thảo luận rất hiệu quả với Ellen Winner về chủ đề tính sáng tạo. Philippe Chaplain, Jean-Paul Auffray và Norbert Verdier đã cung cấp cho tôi những tư liệu và thông tin rất có giá trị về Galois. Victor Liviot đã giúp tôi hiểu được biên bản khám nghiệm tử thi Galois. Stefano Corazza, Carla Cacciari và Letizia Stanghellini đã cung cấp cho tôi những thông tin hữu ích về các nhà toán học ở Bologna. Ermanno Bianconi cũng đã có nhiều giúp đỡ liên quan tới các nhà toán học ở San Sepolcro. Laura Garbolino, Livia Giacardi và Franco Pastrone đã cung cấp cho tôi nhiều tư liệu quý giá về lịch sử toán học. Patrizia Moscatelli và Biancastella Antonio đã cung cấp cho tôi nhiều tài liệu quan trọng từ thư viện của Đại học Bologna. Arild Stubhaug cũng như Yngvar Reichelt đã giúp tôi hiểu được một số khía cạnh trong cuộc đời của Niels Abel và cung cấp cho tôi nhiều tài liệu.

Tôi vô cùng biết ơn Patrick Gordon cùng Victor và Bernadette Laviot đã dịch giúp những tài liệu từ tiếng Pháp cũng như Tommy Wiklind và Theresa Wiegert đã dịch giúp các tài liệu từ tiếng Na Uy, Stefano Casertano, Nino Panagia và Massimo Stavelli đã giúp dịch các tài liệu từ tiếng Ý và tiếng Latinh. Elisabeth Fraser và Sarah Stevens Rayburn đã có sự giúp đỡ vô giá về tư liệu và ngôn ngữ. Bản thảo này sẽ không thể đưa in nếu không có sự chuẩn bị rất chuyên nghiệp của Sharon Toolan và những hình vẽ của Krista Wildt.

Sự tìm tòi và viết lách gắn với một quyển sách tầm cỡ như thế này không khỏi đặt một gánh nặng lên gia đình chúng tôi. Không có sự hỗ trợ liên tục và sự kiên nhẫn vô hạn của vợ tôi, Sofie, và các

con tôi, Sharon, Oren và Maya, thì tôi thậm chí không dám mơ tới việc hoàn thành cuốn sách này. Tôi hy vọng rằng mẹ tôi, Dorothy Livio, người dành trọn cuộc đời đã và vẫn còn đang gắn bó với âm nhạc, sẽ thích thú đọc quyển sách về đối xứng này.

Cuối cùng, tôi chân thành biết ơn người đại diện của tôi, Susan Rabiner, vì sự làm việc miệt mài và động viên tuyệt vời, cũng như biên tập viên Bob Bender của tôi ở NXB Simon & Schuster về sự chuyên nghiệp và ủng hộ không mệt mỏi của ông và tôi cũng xin cám ơn Johanna Li, Loretta Denner, Victoria Meyer và toàn bộ ekip làm việc ở NXB Simon & Schuster về sự giúp đỡ sản xuất và quảng bá quyển sách này.

I

Đối xứng

Một vết mực trên một mẩu giấy chẳng có gì đặc biệt bắt mắt cả, nhưng nếu bạn gấp đôi tờ giấy lại khi vết mực chưa kịp khô thì bạn sẽ nhận được một cái gì đó nhìn giống như hình 1 và rõ ràng là hấp dẫn hơn nhiều. Thực tế, việc giải thích những vết mực tương tự đã tạo cơ sở cho phép thử Rorschach do nhà tâm thần học người Thụy Sĩ, Hermann Rorschach, phát triển trong những năm 1920. Mục đích phép thử này được tuyên bố là để bằng cách nào đó làm sáng tỏ những nỗi sợ hãi ẩn giấu, những tưởng tượng điên dại và những tư tưởng sâu xa hơn của những người nhìn lý giải những hình dáng mơ hồ. Giá trị thực sự của phép thử này với tư cách là "tia X quang đối với trí óc" đã được tranh cãi gay gắt trong giới tâm lý học. Như nhà tâm lý học Scott Lilienfeld thuộc Đại học Emory đã từng nói: "Trí óc của ai,

Hình 1

của bệnh nhân hay của người kiểm tra?". Tuy nhiên, không ai phủ nhận thực tế là những hình ảnh như trên hình 1 đã chuyển tải một loại ấn tượng hấp dẫn và thu hút nào đó. Tại sao?

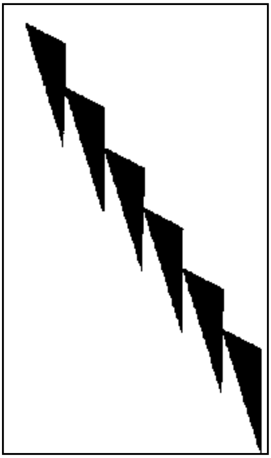
Phải chăng đó là do cơ thể con người, đa số động vật và rất nhiều tạo tác của con người đều có đối xứng hai phía như thế? Nhưng tại sao tất cả những đặc điểm động vật học đó và tất cả những sáng tạo của trí tưởng tượng con người trước hết lại bộc lộ một đối xứng như vậy?

Đa số chúng ta cảm nhận những bố cục hài hòa như bức tranh *Sự ra đời của thần Vệ nữ* của Botticelli (hình 2) như là một cái gì đó đối xứng. Nhà lịch sử nghệ thuật Ernst H. Gombrich thậm chí còn nhận xét rằng "cách hành xử khoáng đạt của Botticelli đối với tự nhiên nhằm đạt được những đường nét duyên dáng đã làm tăng thêm vẻ đẹp và sự hài hòa của bức tranh". Nhưng các nhà toán học sẽ nói với bạn rằng những bố trí màu sắc và hình dạng trong bức tranh đó là không đối xứng một chút nào theo nghĩa toán học. Trái lại, những người xem không phải là nhà toán học lại không cảm nhận hình 3 như là một cái gì đó đối xứng, thậm chí mặc dù nó thực sự là đối xứng theo định nghĩa hình thức của toán học. Vậy đối xứng thực sự là cái gì? Nó đóng vai trò gì (nếu có) trong sự cảm nhận của con người? Nó có liên quan như thế nào với cảm giác thẩm mỹ của chúng ta? Trong thế giới khoa học, tại sao đối xứng lại trở thành một khái niệm then chốt trong những ý tưởng của chúng ta về vũ trụ xung quanh và trong những lý thuyết cơ bản mưu toan giải thích vũ trụ đó? Vì đối xứng trải rộng trong nhiều lĩnh vực, vậy chúng ta sẽ phải dùng "ngôn ngữ" gì và "ngữ pháp" nào để mô tả và đặc trưng cho các đối xứng cùng các thuộc tính của chúng và cái ngôn ngữ phổ quát ấy đã được phát minh ra như thế nào?

Nói một cách nhẹ nhàng hơn thì đối xứng làm thế nào có thể mang lại cho ta câu trả lời đối với câu hỏi hết sức quan trọng được đặt ra trong nhan để của một trong những bài hát của ngôi sao nhạc rock Rod Stewart – "Anh có nghĩ em là gợi cảm không?"

Hình 2

Tôi sẽ cố gắng cung cấp ít nhất là một phần những câu trả lời cho tất cả những câu hỏi đó và còn nhiều hơn thế nữa. Đồng thời, tôi hy vọng rằng toàn bộ câu chuyện này sẽ khắc họa cả khía cạnh nhân văn của toán học, và thậm chí còn quan trọng hơn, là khía cạnh con người của các nhà toán học. Như chúng ta sẽ thấy, đối xứng là một công cụ chủ yếu để bắc cầu qua cái hố ngăn cách giữa khoa học và nghệ thuật, giữa tâm lý học và toán học. Đối xứng xuyên suốt các vật và các khái niệm từ những tấm thảm Ba Tư tới những phân tử của sự sống, từ nhà thờ Sistine tới "Lý thuyết của vạn vật" (*Theory of Everything* – TOE) đang được săn tìm. Nhưng lý thuyết nhóm, ngôn ngữ toán học mô tả bản chất của các đối xứng và khám phá những tính chất của chúng, lại hoàn toàn không xuất hiện từ những nghiên cứu về đối xứng. Thay vì thế, ý tưởng thống nhất đáng kinh ngạc này của tư tưởng hiện đại lại thăng hoa từ một nguồn bất ngờ nhất, đó là một phương trình không thể giải được. Lịch sử đầy bi kịch và quanh co của phương trình này là phần căn bản của câu chuyện truyền kỳ trí tuệ được đề cập đến trong cuốn sách bạn đang cầm trong tay. Đồng thời, câu chuyện này sẽ soi sáng nỗi cô đơn của một thiên tài và sự ngoan cường của trí tuệ con người khi đối mặt với những thách thức tưởng chừng như không thể vượt qua. Tôi đã hết sức nỗ lực để thử giải đáp một bí ẩn kéo dài hai thế kỷ về cái chết của nhân vật chính trong câu chuyện này, đó là nhà toán học xuất sắc Évariste Galois. Tôi tin rằng tôi đã tiến gần tới sự thật hơn bất kỳ ai có thể trước đó.



Hình 3

Nhà viết kịch sắc sảo George Bernard Shaw đã từng nói: "Một con người biết điều là người bắt mình phải thích nghi với thế giới, còn người không biết điều là người cứ khăng khăng bắt thế giới phải phù hợp với mình. Do đó, mọi tiến bộ của nhân loại lại phụ thuộc vào con người không biết điều ấy". Trong cuốn sách này chúng ta sẽ gặp nhiều con người không biết điều như thế. Quá trình sáng tạo, do chính bản chất của nó, luôn tìm kiếm những mảnh đất trí tuệ và cảm xúc còn chưa được khai phá. Sự đột nhập chớp nhoáng vào sự trừu xuất toán học sẽ cho ta ghé nhìn trộm vào chính bản chất của sự sáng tạo.

Trước hết, chúng ta hãy khám phá sơ qua thế giới kỳ diệu của đối xứng.

"MIỄN TRỪ" THAY ĐỔI

Từ đối xứng (*symmetry*) có nguồn gốc từ xa xưa, xuất phát từ các từ *sym* và *metria* trong tiếng Hy Lạp, có nghĩa là "có cùng độ đo". Khi người Hy Lạp gắn cho một tác phẩm nghệ thuật hay một thiết kế kiến trúc cái nhãn đối xứng là khi họ muốn nói rằng người ta có thể nhận dạng được một mẩu nhỏ nào đó của tác phẩm nghệ thuật ấy, sao cho kích thước của tất cả các phần khác đều chứa mẩu đó với một số lần rất chính xác (các phần này được gọi là "thông ước" với nhau). Định nghĩa từ rất sớm này có lẽ tương ứng với khái niệm hiện đại của chúng ta về sự tỷ lệ hay cân đối hơn là với đối xứng. Tuy nhiên, hai triết gia vĩ đại Plato (428/427 – 348/347 trước CN) và Aristotle (384 – 322 trước CN) đã nhanh chóng gắn đối xứng với cái đẹp. Theo lời của Aristotle, "Các dạng chủ yếu của cái đẹp là sự bố cục có trật tự (tiếng Hy Lạp là *taxis*), cân đối (*symmetria*) và xác định (*horismenon*), những thứ này được phát lộ đặc biệt bởi toán học". Theo bước chân những người Hy lạp, sự đồng nhất đối xứng với "sự cân đối thỏa đáng" sau này đã được kiến trúc sư La Mã có ảnh hưởng là Vitruvius (khoảng 70 – 25 trước CN) truyền bá và nó còn duy trì qua suốt cả thời kỳ Phục Hưng. Trong cuốn *De Architectura Libri Decem* (*Mười quyển sách về kiến trúc*) của ông, được coi là kinh thánh của kiến trúc ở châu Âu trong nhiều thế kỷ, Vitruvius đã viết:

> Bản thiết kế của một ngôi đền phụ thuộc vào đối xứng, mà người kiến trúc sư phải tuân theo một cách cẩn trọng những nguyên tắc chủ yếu của nó. Mà chúng chính là do sự cân đối. Cân đối là sự tương xứng giữa các số đo của các thành phần thuộc toàn bộ công trình và của tổng thể công trình đối với một bộ phận nào đó được chọn làm chuẩn. Các nguyên lý của đối xứng từ đó mà ra".

Ý nghĩa hiện đại của đối xứng (lần đầu tiên được đưa ra vào cuối thế kỷ 18) theo nghĩa toán học chính xác thực sự là "sự miễn trừ đối với một thay đổi khả dĩ nào đó". Hay như nhà toán học Hermann Weyl (1885-1955) từng nói: "Một vật là đối xứng nếu có một phép gì đó mà bạn có thể làm với nó sao cho sau khi kết thúc, vật nhìn vẫn giống hệt như trước". Để làm ví dụ, hãy xét mấy câu thơ sau:

Is it odd how asymmetrical
Is "symmetry"?
"Symmetry" is asymmetrical
How odd it is.

Khổ thơ này không đổi nếu bạn đọc từng từ một từ cuối lên đầu, tức nó là đối xứng đối với phép đọc giật lùi. Nếu bạn xét các từ được sắp xếp giống như các hạt xếp lồng qua một sợi dây, bạn có thể xem sự đọc ngược này như là một loại phản xạ qua gương (không thật chính xác với từng chữ cái) của khổ thơ trên. Khổ thơ này là không thay đổi khi được phản xạ qua gương theo nghĩa trên, tức nó là đối xứng đối với phép phản xạ qua gương như vậy. Một cách khác, nếu bạn thích nghĩ thông qua sự đọc to khổ thơ ấy lên hơn, thì cách đọc ngược sẽ tương ứng với sự nghịch đảo thời gian, nó đại khái tương tự như cho cuộn băng video quay ngược lại (lại một lần nữa, điều này không thật chính xác tới từng âm vì những âm riêng rẽ không thể đảo ngược được). Các câu có tính chất đó được gọi là *thuận nghịch độc*.

Sự phát minh ra các câu thuận nghịch độc được cho là thuộc Sotades xứ Maronea, người sống vào thế kỷ 3 trước CN ở Ai Cập do người Hy Lạp thống trị. Các câu thuận nghịch độc đã cực kỳ phổ biến với những kiểu chơi chữ kỳ tài như người Anh J.A. Lindon và với những trò giải trí toán học tuyệt vời của tác giả Martin Gardner. Một trong những câu thuận nghịch đọc vui của Lindon với đơn vị là từ (chứ không phải chữ cái!) là: "*Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl*". Một câu thuận nghịch đọc khác đối xứng với phép đọc trước-sau từng chữ cái một (chứ không phải là từ nữa!) là: "*Able was I ere I saw Elba*" (được đồn vui là của Napoleon) hoặc cái tên của chương trình NOVA nổi tiếng: "A man, a Plan, a Canal, Panama."

Điều lạ là, các câu thuận nghịch độc xuất hiện không chỉ trong các trò chơi chữ lắt léo mà cả trong cấu trúc của nhiễm sắc thể Y quyết định giới tính nam. Việc xác định chuỗi đầy đủ các gen trong nhiễm sắc thể Y chỉ mới hoàn tất vào năm 2003. Đó là thành tựu đỉnh cao của một nỗ lực phi thường, và nó cho thấy rằng sức mạnh bảo tồn nhiễm sắc thể giới tính này đã bị đánh giá quá thấp. Những cặp nhiễm sắc thể khác của con người đã chiến đấu chống lại những đột biến phá hoại bằng cách tráo đổi các gen. Vì nhiễm sắc thể Y thiếu bạn kết cặp, nên các nhà sinh học về gen trước kia đã ước tính rằng hành trang di truyền của nó đã teo dần lại có lẽ ít ra cũng trong 5 triệu năm. Tuy nhiên, các nhà nghiên cứu thuộc nhóm xác định trình tự gen đã vô cùng ngạc nhiên phát hiện ra rằng nhiễm sắc thể này (Y) đã chống lại sự thoái hóa đó bằng chiêu thuận nghịch độc. Khoảng 6 triệu trong số 50 triệu các chữ cái AND của nó đã tạo nên các chuỗi thuận nghịch độc, tức là các chuỗi mà đọc lui đọc tới đều như nhau trên hai nhánh của chuỗi xoắn kép. Những sao chép này không những cung cấp một sự hỗ trợ trong trường hợp có những đột biến xấu, mà còn cho phép nhiễm sắc thể này, trong một phạm vi nhất định, tự giao phối với mình, trong đó các đoạn hoán đổi vị trí và các gen tráo đổi cho nhau. Như David

Page – lãnh đạo nhóm nghiên cứu – đã nói: "Cứ như nhiễm sắc thể Y là một nhà gương vậy".

Tất nhiên, ví dụ quen thuộc nhất của đối xứng phản xạ qua gương là đối xứng hai bên đặc trưng cho vương quốc các động vật. Từ các con bướm đến những con cá voi, từ chim cho tới con người, nếu như bạn cho nửa bên trái phản xạ qua gương bạn sẽ nhận được cái gần như đồng nhất với nửa bên phải. Tạm thời ta hãy bỏ qua những khác biệt nhỏ bên ngoài – dù sao cũng vẫn có – và sự thật là cả các cơ quan nội tạng lẫn những chức năng của não bộ đều không có tính đối xứng hai bên.

Đối với nhiều người, từ đối xứng được mặc nhiên công nhận có ý nghĩa là đối xứng hai bên. Ngay cả trong cuốn Từ điển Quốc tế Webster – *Webster's Third New International Dictionary*, một trong những định nghĩa của từ này là: "Sự tương ứng về kích thước, hình dạng và vị trí tương đối của các bộ phận nằm ở hai phía đối diện của đường phân cách hoặc của mặt phẳng trung trực". Sự mô tả toán học chính xác của đối xứng phản xạ gương cũng dùng chính những quan niệm đó. Hãy lấy hình vẽ một con bướm và vạch một đường thẳng ở chính giữa hình. Nếu gấp hình vẽ lại dọc theo đường thẳng đó thì hai nửa hình vẽ sẽ chồng khít lên nhau. Con bướm vẫn còn không thay đổi – tức bất biến – qua phép phản xạ qua đường thẳng trung tâm.

Đối xứng hai bên thể hiện nổi bật trong thế giới động vật và khó có thể cho đó chỉ là ngẫu nhiên được. Thực tế, nếu bạn coi động vật là những tập hợp cực lớn của hàng ngàn tỷ ngàn tỷ phân tử thì số các cách để xây dựng các cấu hình bất đối xứng sẽ cực kỳ nhiều hơn các cấu hình đối xứng. Các mảnh của cái bình vỡ có thể xếp theo nhiều cách khác nhau nhưng sẽ chỉ có một cách xếp duy nhất để cho các mảnh ăn khớp với nhau và tạo lại chiếc bình như nguyên vẹn (và thường có đối xứng hai bên). Những tư liệu hóa thạch ở Ediacara, Australia lại cho thấy rằng các sinh vật thân mềm (*Spriggina*) gốc từ kỷ Vendian (650 tới 543 triệu năm trước) cũng đã có đối xứng hai bên.

Vì các dạng sự sống trên Trái Đất được hình thành bởi hàng thiên niên kỷ tiến hóa và chọn lọc tự nhiên, những quá trình này chắc bằng cách nào đó lại ưng đối xứng hai bên hay đối xứng gương hơn. Trong số tất cả những cái vỏ bên ngoài khác nhau mà động vật có thể chấp nhận, thì cái vỏ đối xứng gương có ưu thế hơn. Không thể không kết luận rằng đối xứng này là kết cục thích hợp của sự tăng trưởng sinh học. Nhưng liệu chúng ta có thể hiểu được nguyên nhân của sự thiên vị đặc biệt đó không? Chí ít chúng ta có thể tìm được một số cội nguồn có tính chất kỹ thuật trong các định luật của cơ học. Một điểm then chốt ở đây là thực tế rằng tất cả các hướng trên bề mặt Trái Đất được tạo ra không phải bình đẳng với nhau. Lực hấp dẫn của Trái Đất đã tạo ra một sự khác biệt rõ ràng giữa trên và dưới (hay nói theo ngôn ngữ sinh học là giữa *lưng* và *bụng* của các động vật). Trong phần lớn các trường hợp thì cái gì đi lên sẽ phải rơi xuống, nhưng không có chuyện ngược lại. Một sự phân biệt nữa, giữa trước và sau, là kết quả của sự di chuyển của động vật.

Bất cứ động vật nào di chuyển tương đối nhanh, dù là ở trong biển, trên đất liền hay trong không khí, cũng sẽ có ưu thế rõ ràng nếu nó có phần phía trước khác với phần phía sau. Khi đã có tất cả các giác quan, thì các cơ quan thu và phát hiện ánh sáng, âm thanh, mùi và vị ở phía trước rõ ràng sẽ giúp cho động vật quyết định sẽ đi đâu và làm cách nào đi tới đó tốt nhất. Một "radar" ở phía trước cũng sẽ cung cấp những cảnh báo sớm về những hiểm họa tiềm tàng. Việc có miệng ở phía trước có thể làm nên sự khác biệt giữa việc có đoạt được thức ăn trước hay là không. Đồng thời, cơ học thực sự của chuyển động (đặc biệt là ở trên đất liền và trên không) dưới ảnh hưởng của lực hấp dẫn đã phát sinh ra sự khác biệt rõ ràng giữa đáy và đỉnh. Một khi sự sống xuất hiện từ biển lên đất liền, thì một loại dụng cụ cơ học – các chi – cần phải được phát triển để mang cơ thể động vật di chuyển. Những dụng cụ đó không cần thiết phải có ở trên đỉnh, nên sự khác biệt giữa đỉnh và đáy trở nên nổi bật hơn. Khí động học của sự bay (cũng vẫn dưới tác dụng của lực hấp dẫn) gắn kết với những đòi hỏi phải có một "bộ phụ tùng" để hạ cánh cộng với một số phương tiện để di chuyển trên mặt đất kết hợp lại đã dẫn đến những khác biệt đáy-đỉnh trong các loài chim.

Tuy nhiên, đến đây đã xuất hiện một nhận thức quan trọng: *Không có một cái gì đó nổi bật trong biển, trên mặt đất hay trên không để phân biệt giữa trái và phải cả*. Con chim ưng bay trên cao nhìn sang bên phải cũng thấy một môi trường y hệt như khi nhìn sang trái. Nhưng điều đó không đúng đối với trên và dưới – trên là nơi con chim ưng có thể còn bay được cao hơn nữa trong khi dưới là nơi nó hạ cánh và làm tổ. Tạm gạt bỏ trò chơi chữ chính trị (tả khuynh và hữu khuynh) sang một bên, còn thì thực sự không có sự khác biệt lớn nào giữa trái và phải ngay cả trên mặt đất, vì ở đây không có một lực mạnh theo phương ngang nào. Thực ra, sự quay của Trái Đất xung quanh trục của nó và từ trường của Trái Đất (thực tế là Trái Đất tác động lên môi trường xung quanh nó như một thanh nam châm) cũng đã dẫn đến một sự bất đối xứng nhất định. Tuy nhiên, ở mức vĩ mô, những hiệu ứng này hầu như không quan trọng như là các hiệu ứng của lực hấp dẫn và sự chuyển động nhanh của động vật.

Sự mô tả cho tới đây nhằm giải thích tại sao sự đối xứng hai bên của các cơ thể sống lại có ý nghĩa về mặt cơ học. Đối xứng hai bên cũng là tiết kiệm: bạn có được hai cơ quan với giá chỉ của một thôi. Nhưng đối xứng đó hoặc sự không có nó đã xuất hiện như thế nào từ sinh học tiến hóa (các gen) hoặc thậm chí cơ bản hơn từ các định luật vật lý là một câu hỏi khó khăn hơn và tôi sẽ quay trở lại phần nào trong các Chương 7 và 8. Ở đây cho phép tôi chỉ xin nêu nhận xét rằng bào thai ở giai đoạn sớm của nhiều động vật đa bào hoàn toàn không có đối xứng hai bên. Động lực nằm sau sự biến đổi của "bản thiết kế gốc" này khi bào thai lớn lên có thể thực sự là tính di động.

Không phải toàn bộ thế giới sinh học đều sống trong cơ động. Các dạng của sự sống cố định ở một chỗ và không có khả năng tự ý di chuyển, như cây cỏ và các động vật không di chuyển, đều có phần đỉnh và phần đáy rất khác nhau, nhưng không thể phân biệt trước và sau hoặc phải và trái. Chúng có đối xứng tương tự đối xứng của hình nón – tức là những phản xạ đối xứng qua một gương bất kỳ đi qua trục thẳng đứng trung tâm của nó. Một số động vật chuyển động rất chậm như con sứa cũng có đối xứng tương tự.

Rõ ràng một khi đối xứng hai bên đã phát triển trong các cơ thể sống thì phải có đủ lý do để nó được giữ gìn nguyên vẹn. Bất cứ sự mất đi một tai hay một mắt đều có thể làm cho động vật trở nên dễ bị tổn thương đối với thú săn mồi, chúng có thể lẻn đến gần mà không hay biết.

Người ta có thể băn khoăn tự hỏi không hiểu cấu hình chuẩn cụ thể mà tự nhiên ban cho con người liệu có phải là cấu hình tối ưu hay chưa. Ví dụ, thần Janus của người La Mã là vị thần gác cổng và vị thần của mọi sự bắt đầu, kể cả tháng đầu tiên (January) của năm.

Vì thế trong nghệ thuật, Janus thường được vẽ có hai mặt, một ở phía trước nhìn về tương lai (tượng trưng cho sự hướng tới năm sau) và một ở phía sau đầu (hướng về năm đã qua). Sự sắp đặt như thế ở con người, trong khi có lợi cho một số mục đích nào đó, lại không dành chỗ cho những bộ phận của não vốn chịu trách nhiệm cho các hệ thống không cảm giác. Trong cuốn sách tuyệt vời *The New Ambidextrous Universe* (*Vũ trụ mới thuận cả hai tay*), Martin Gardner có kể câu chuyện về một người diễn trò ở Chicago, người thường hay bàn luận về những ưu thế của việc có các giác quan nằm ở những chỗ không bình thường trên cơ thể. Chẳng hạn, tai ở dưới nách sẽ được giữ ấm hơn trong những mùa đông lạnh giá ở Chicago. Nhưng rõ ràng sẽ có những bất cập khác gắn liền với một cấu hình như vậy. Tai ở trong nách thì thính giác sẽ suy giảm nghiêm trọng nếu như bạn không giơ tay lên suốt ngày.

Các bộ phim khoa học viễn tưởng cũng thường dựng lên những người ngoài hành tinh có đối xứng hai bên. Nếu thực sự tồn tại những sinh vật có trí tuệ ngoài hành tinh đã trải qua quá trình tiến hóa sinh học thì liệu họ có thể có đối xứng phản xạ gương hay không? Hoàn toàn có thể. Do tính phổ quát của các định luật vật lý, đặc biệt là các định luật về hấp dẫn và chuyển động, các dạng sự sống trên các hành tinh ở ngoài hệ mặt trời sẽ phải đối mặt với những thách thức của môi trường giống hệt như trên Trái Đất. Lực hấp dẫn vẫn giữ mọi vật trên bề mặt của hành tinh và tạo ra sự khác biệt quan trọng giữa trên và dưới. Sự chuyển động cũng tương tự sẽ tách phần trước khỏi phần sau. Người ngoài hành tinh khi đó phần lớn là (hoặc đã là) thuận cả hai tay. Tuy nhiên, điều đó không có nghĩa là một đoàn đại biểu của những người ngoài hành tinh tới thăm sẽ nhìn giống hệt như chúng ta. Bất cứ một nền văn minh nào đủ phát triển để dấn thân vào công cuộc du hành giữa các vì sao đều đã phải trải qua giai đoạn dài của sự xuất hiện loài có trí tuệ với những sinh vật dựa trên công nghệ - máy tính siêu đẳng. Và cái trí tuệ siêu việt dựa trên máy tính này rất nhiều khả năng sẽ là vi mô về kích thước.

Một số chữ cái trong bảng chữ cái viết in hoa thuộc số rất nhiều thứ do con người tạo ra là đối xứng đối với phép phản xạ gương. Nếu chúng ta giữ một tờ giấy có viết các chữ cái A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y đặt cạnh gương, thì ảnh trong gương của chúng cũng giống hệt như vậy. Các từ (hoặc thậm chí cả những cụm từ) được cấu tạo từ những chữ cái đó và in thẳng đứng như mệnh lệnh tầm phào này:

Y
O
U

M
A
Y

W
A
X

I
T

T
I
M
O
T
H
Y

cũng đều không thay đổi khi được phản xạ gương. Nhóm nhạc pop Thụy Điển AᗺBA, mà âm nhạc của họ đã tạo ra cảm hứng cho bản nhạc thành công *Mamma Mia*, đã khôn khéo đặt tên cho bài hát sao cho khi đánh vần nghe cũng có tính đối xứng gương (MAMMA MIA – nếu viết thẳng đứng cũng có tính đối xứng gương). Một số ít chữ cái, như B, C, D, E, H, I, K, O, X là đối xứng đối với phép phản xạ qua mặt gương nằm ngang cắt đôi các chữ cái đó. Các từ tạo bởi các chữ cái này, như COOKBOOK, BOX, CODEX, hay những ký hiệu quen thuộc biểu thị cho ôm hôn như XOXO cũng sẽ không thay đổi khi được giữ lộn ngược trước gương.

Không thể nói hết tầm quan trọng của đối xứng phản xạ gương đối với sự cảm nhận cũng như sự đánh giá thẩm mỹ của chúng ta đối với các lý thuyết toán học về đối xứng, đối với các định luật vật lý và đối với khoa học nói chung, và tôi sẽ còn quay trở lại vấn đề này vài lần nữa. Tuy nhiên, cũng còn tồn tại cả những đối xứng khác và chúng cũng quan yếu không kém.

CẤU TRÚC ĐỎNG ĐẢNH CỦA TUYẾT

Nhan đề của mục này được lấy từ cuốn *Bão tuyết* (*The Snowstorm*) của nhà thơ Mỹ Ralph Waldo Emerson (1803-1882). Nó diễn tả được sự ngạc nhiên bối rối mà người ta cảm thấy khi nhận ra những hình dáng ngoạn mục của các bông tuyết (hình 4). Trong khi câu cửa miệng "không có hai bông tuyết nào giống nhau" là thực sự không đúng ở mức mắt trần, thì những bông tuyết hình thành trong các môi trường khác nhau đúng là có khác nhau thật. Nhà thiên văn nổi tiếng Johannes Kepler (1571-1630), người đã phát minh ra các định luật về chuyển động của các hành tinh, cũng đã ấn tượng với sự tuyệt vời của các bông tuyết đến nỗi ông đã viết cả một tiểu luận nhan đề *Bông tuyết sáu góc* (*The Six-Cornered Snowflake*), với ý định giải thích đối xứng của các bông tuyết.

Hình 4

Ngoài đối xứng phản xạ gương ra, các bông tuyết còn có đối xứng quay: bạn có thể quay chúng theo những góc nhất định xung quanh một trục vuông góc với mặt phẳng của chúng (và đi qua tâm) thì chúng nhìn vẫn như cũ. Do những tính chất và hình dạng của các phân tử nước, các bông tuyết thường có 6 góc (hầu như) giống hệt nhau. Do đó, góc quay nhỏ nhất (trừ trường hợp không quay gì cả) làm cho hình dạng của bông tuyết không thay đổi là góc quay trong đó mỗi đỉnh dịch chuyển được một "bước": 360: 6 = 60 độ. Những góc quay khác cũng làm cho hình cuối cùng không phân biệt được so với hình gốc đơn giản là bội số của góc quay nhỏ nhất trên, đó là các góc 120, 180, 240, 300 và 360 độ (góc quay cuối cùng đưa bông tuyết trở lại vị trí ban đầu, tức nó tương đương với không quay gì cả). Vậy bông tuyết có đối xứng quay bậc 6. Để so sánh, ta thấy con sao biển có đối xứng quay bậc 5; chúng có thể được quay với các góc 72, 144, 216, 288 và 360 độ mà không cho thấy sự khác biệt nào. Nhiều bông hoa, như hoa cúc vàng, hoa cúc trắng của Anh và hoa hạt rệp đều có đối xứng quay gần đúng. Về căn bản, chúng nhìn là như nhau khi quay một góc nào đó (hình 5). Đối xứng, khi kết hợp với sự phong phú về màu sắc và mùi hương quyến rũ, là một tính chất ẩn tàng làm cho các bông hoa có được sự hấp dẫn phổ quát về mặt thẩm mỹ. Có lẽ không ai có thể diễn đạt tốt hơn họa sĩ James McNeill Whistler (1834-1903) về mối quan hệ gắn bó giữa các bông hoa và các tác phẩm nghệ thuật:

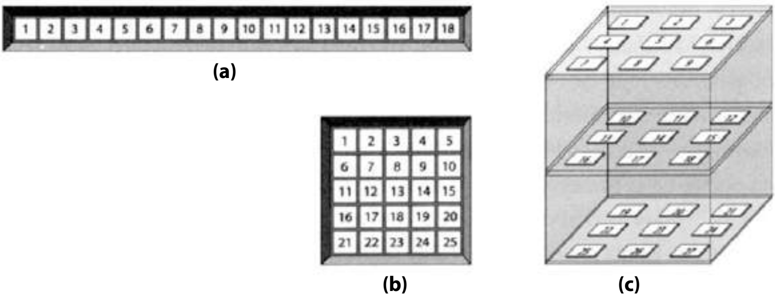
> Một tuyệt phẩm giống như bông hoa đối với người họa sĩ – chúm chím cũng xinh mà nở bung cũng tuyệt – không cần giải thích, cũng chẳng cần vẽ lại – là niềm vui đối với người nghệ sĩ – là ảo tưởng đối với người có lòng bác ái – là câu đố đối với nhà thực vật học – là sự đụng chạm tình cờ giữa tâm hồn và vần thơ đối với văn nhân.

Vậy thì cái gì trong một hình mẫu đối xứng đã gây ra phản ứng xúc cảm đó? Và liệu có phải những tác phẩm nghệ thuật thực sự gây ra cùng một cảm xúc như vậy không? Chú ý rằng ngay cả khi câu trả lời cho câu hỏi thứ hai ở trên là một tiếng "có" phân minh, thì điều đó cũng không nhất thiết đưa chúng

Hình 5

ta tới gần hơn câu trả lời cho câu hỏi thứ nhất. Câu trả lời cho câu hỏi: Cái gì trong các tác phẩm nghệ thuật đã gây ra những đáp ứng cảm xúc? còn xa mới trở nên rõ ràng. Thực tế, các tuyệt phẩm khác nhau như *Thiếu nữ đeo hoa tai ngọc trai* của Jan Vermeer, *Guernica* của Pablo Picasso, và *Marilyn Diptych* của Andy Warhol có phẩm chất chung gì? Clive Bell (1881-1964), một nhà phê bình nghệ thuật và thành viên của nhóm Bloomsbury (nhân tiện nói thêm nhóm này gồm có cả nhà văn Virginia Woolf) đã cho rằng phẩm chất chung của tất cả các tác phẩm nghệ thuật chân chính là cái mà ông gọi là "hình thái có ý nghĩa". Với thuật ngữ đó, ông muốn nói về sự kết hợp cụ thể của các đường nét, màu sắc, các hình và mối quan hệ giữa các hình đã khuấy lên xúc cảm nào đó. Điều đó không nói lên rằng tất cả các tác phẩm nghệ thuật đều gây ra cùng một cảm xúc. Mà hoàn toàn ngược lại: mỗi tác phẩm nghệ thuật có thể gây ra một cảm xúc hoàn toàn khác nhau. Cái chung nằm ở thực tế là: tất cả các tác phẩm nghệ thuật đều gây ra một cảm xúc nào đó. Nếu chúng ta chấp nhận giả thuyết thẩm mỹ ấy thì đối xứng có thể đơn giản là biểu diễn một trong những thành phần của cái hình thái có ý nghĩa (được định nghĩa khá mơ hồ) đó. Trong trường hợp này, phản ứng của chúng ta đối với các hình mẫu đối xứng có thể là không quá khác biệt (thậm chí còn yếu hơn) với độ nhạy cảm thẩm mỹ rộng lớn hơn của chúng ta. Không phải mọi người đều nhất trí với khẳng định đó. Nhà lý thuyết mỹ học Harold Osborne đã nói về đáp ứng của con người đối với đối xứng của các yếu tố hoặc của các vật riêng rẽ, như các bông tuyết, như sau: "Chúng có thể làm trỗi dậy sự quan tâm, óc tò mò và sự tán thưởng. Nhưng mối quan tâm thị giác đến chúng không kéo dài và khá hời hợt: Trái với sự tác động của các tuyệt phẩm hội họa, sự chú ý của tri giác sẽ nhanh chóng tản mạn, không bao giờ đi vào sâu cả. Không có sự nâng cao cảm nhận". Thực sự ra, như trong chương sau và chương 8, đối xứng có liên quan rất nhiều đến sự cảm nhận. Tuy nhiên, tạm thời chúng ta hãy tập trung vào "giá trị" thẩm mỹ thuần túy của đối xứng đã.

Các nhà tâm lý học Peter G. Szilagyi và John C. Baird của trường Dartmouth College đã tiến hành một thí nghiệm rất hấp dẫn vào năm 1977 nhằm khảo sát mối quan hệ định lượng giữa lượng đối xứng trong một hình vẽ và mức độ ưa thích về mặt thẩm mỹ. Hai mươi sinh viên (những đối tượng phổ biến nhất của tâm lý học thực nghiệm) đã được đề nghị thực hiện ba nhiệm vụ đơn giản. Thứ nhất, họ được mời sắp xếp 8 hình vuông có một chấm đen ở tâm vào một hàng gồm 18 ô, mỗi một ô có kích thước bằng hình vuông (hình 6a). Người ta yêu cầu các sinh viên này hãy sắp xếp các hình vuông sao cho "vừa mắt" nhất. Mỗi hình vuông đều phải phủ kín một ô và phải dùng đủ 8 hình vuông. Nhiệm vụ thứ hai và thứ ba, về bản chất, là tương tự nhau. Trong nhiệm vụ thứ hai, 11 hình vuông được xếp vào một lưới các ô 5×5 (hình 6b). Và nhiệm vụ thứ ba là xếp 12 khối lập phương vào các lỗ của một cấu trúc ba chiều trong suốt gồm ba mặt phẳng nằm ngang, mỗi mặt phẳng



Hình 6

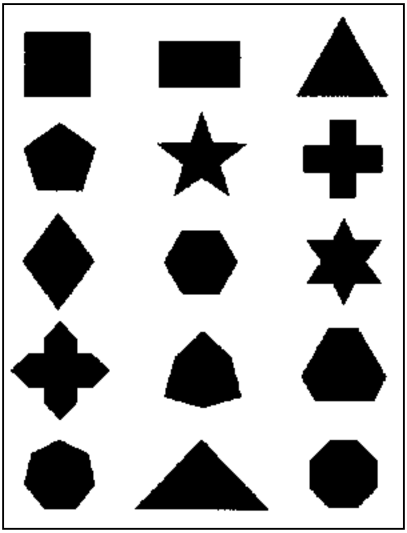
chứa 9 lỗ hình vuông (hình 6c). Kết quả cho thấy rất rõ ràng mức độ yêu thích nhất về mặt thẩm mỹ là những cách sắp xếp có tính đối xứng. Ví dụ, 65% sinh viên được trắc nghiệm tạo ra những hình mẫu có tính đối xứng phản xạ gương hoàn hảo trong nhiệm vụ thứ nhất. Thực tế, đối xứng là thành phần hàng đầu trong cách sắp xếp của đa số các sinh viên (trong một, hai và ba chiều), với đối xứng hoàn hảo là điều kiện được ưa thích nhất.

Sự liên kết giữa đối xứng và gu nghệ thuật không chỉ xuất hiện trong các thí nghiệm, mà cả trong các lý thuyết có tính tư biện hơn về thẩm mỹ được phát triển bởi nhà toán học tài danh George David Birkhoff (1884-1944) của Đại học Harvard. Birkhoff nổi tiếng vì đã chứng minh được vào năm 1913 một giả thuyết hình học nổi tiếng được phát biểu bởi nhà toán học Pháp Henri Poincaré và định lý *ergodic* của ông (được công bố 1931-1932) – một đóng góp có ý nghĩa to lớn đối với lý thuyết các chất khí và lý thuyết xác suất. Khi còn là sinh viên, Birkhoff đã bắt đầu bị hấp dẫn bởi cấu trúc của âm nhạc, và vào năm 1924 ông đã mở rộng sự quan tâm của mình đến mỹ học nói chung. Năm 1928 ông đã dành hẳn một nửa năm để đi chu du khắp châu Âu và Viễn Đông với ý định tiếp thu được càng nhiều về nghệ thuật, âm nhạc và thơ ca càng tốt. Những nỗ lực của ông nhằm phát triển một lý thuyết toán học về các giá trị thẩm mỹ được đúc kết trong cuốn sách Độ đo thẩm mỹ (*Aesthetic measure*) được công bố năm 1933. Birkhoff đặc biệt bàn luận về cảm giác trực giác về giá trị được khơi gợi từ các tác phẩm nghệ thuật, cảm giác này là "tách biệt hẳn với cảm giác do giác quan, tình cảm, đạo đức hay trí tuệ". Ông đã tách trải nghiệm thẩm mỹ thành ba giai đoạn: (1) nỗ lực tập trung chú ý cần thiết cho cảm nhận; (2) nhận thức rằng đối tượng là khác biệt bởi một trật tự nhất định; (3) đánh giá

giá trị ban thưởng cho nỗ lực tinh thần. Sau nữa, Birkhoff gán những số đo định lượng cho ba giai đoạn đó. Nỗ lực sơ bộ (giai đoạn 1), ông gợi ý, sẽ tăng tỷ lệ với độ phức tạp của tác phẩm (được ký hiệu là C). Các đối xứng đóng vai trò then chốt trong trật tự (được ký hiệu là O) đặc trưng cho tác phẩm. Và cuối cùng, cảm giác về giá trị mà Birkhoff gọi là "độ đo thẩm mỹ" (được ký hiệu là M) của tác phẩm nghệ thuật.

Nội dung căn bản của lý thuyết Birkhoff có thể được tóm tắt như sau. Trong mỗi lớp các đối tượng thẩm mỹ, như đồ trang trí, các bình, các đoạn nhạc, hoặc thơ ca, người ta có thể xác định được một trật tự O và độ phức tạp C. Khi đó, độ đo thẩm mỹ của một đối tượng bất kỳ trong lớp có thể được tính một cách đơn giản bằng cách chia O cho C. Nói cách khác, Birkhoff đã đưa ra công thức tính cảm giác về giá trị thẩm mỹ: $M = O / C$. Ý nghĩa của công thức này là: đối với một mức độ phức tạp C đã cho, độ đo thẩm mỹ của một đối tượng sẽ càng cao nếu như đối tượng có càng nhiều trật tự. Hay với một lượng trật tự đã được cố định, độ đo thẩm mỹ càng cao nếu đối tượng càng ít phức tạp. Vì đối với phần lớn các mục đích thực tiễn, trật tự được xác định trước hết bởi các đối xứng của đối tượng, nên lý thuyết của Birkhoff đã tôn vinh đối xứng như là một yếu tố thẩm mỹ cực kỳ quan trọng.

Birkhoff là người đầu tiên thừa nhận rằng định nghĩa chính xác các yếu tố O, C, M là rất khó khăn. Tuy nhiên, ông đã có một ý định táo bạo đưa ra các hướng dẫn chi tiết để tính các số đo đó cho rất nhiều dạng nghệ thuật. Đặc biệt, ông đã bắt đầu với những hình đơn giản như trong hình vẽ 7, rồi tiếp theo với các đồ trang trí và các bình Trung Hoa, sau đó tiến tới sự hòa âm trong âm giai hai giọng và kết thúc ở thi ca của Tennyson, Shakespeare và Amy Lowell.

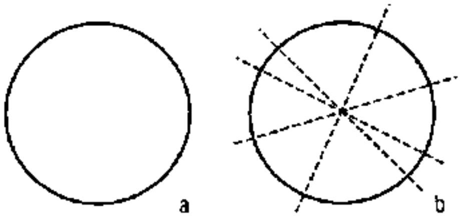


Hình 7

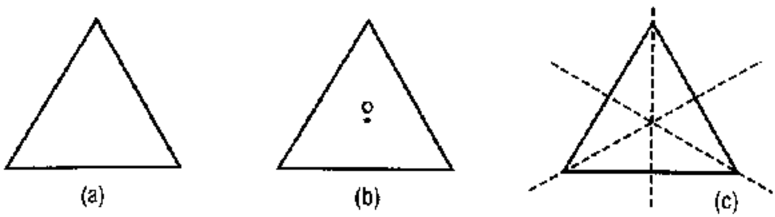
Không ai, kể cả Birkhoff, dám tuyên bố rằng những phức tạp của khoái cảm thẩm mỹ hoàn toàn có thể quy về một công thức đơn giản. Tuy nhiên, theo Birkhoff "Khi đồng thời phân tích quá trình sáng tạo, lý thuyết độ đo thẩm mỹ có thể thực hiện được một nhiệm vụ kép: nó cho ta một cách giải thích thống nhất và đơn giản trải nghiệm thẩm mỹ, đồng thời nó lại cung cấp cho chúng ta những phương tiện để phân tích một cách hệ thống các lĩnh vực thẩm mỹ điển hình".

Bây giờ sau khi đã rẽ qua một chốc lát vào lãnh địa của mỹ học, chúng ta hãy quay trở lại trường hợp cụ thể của đối xứng quay. Lưu ý rằng một trong những hình đối xứng quay đơn giản nhất trong mặt phẳng là vòng tròn (hình 8a). Nếu chúng ta quay nó quanh tâm một góc, ví dụ là 37 độ, thì vòng tròn vẫn không thay đổi. Thực tế, bạn có thể quay vòng tròn xung quanh trục vuông góc đi qua tâm của nó một góc *bất kỳ* thì bạn cũng chẳng thấy một sự khác biệt nào. Do đó, vòng tròn có bậc đối xứng quay là vô hạn. Nhưng đây chưa phải là những đối xứng duy nhất của vòng tròn. Những phép phản xạ qua tất cả các trục cắt dọc theo đường kính (hình 8b) cũng làm cho vòng tròn không thay đổi.

Như vậy, cùng một hệ có thể có nhiều đối xứng hay nói cách khác là đối xứng đối với nhiều *phép biến đổi đối xứng* khác nhau. Quay một hình cầu hoàn hảo xung quanh tâm của nó với trục nằm theo một hướng bất kỳ cũng làm cho hình cầu nhìn chính xác như cũ. Hoặc ví dụ, ta xét một tam giác đều (có ba cạnh bằng nhau) trên hình 9a. Ta được phép không làm thay đổi hình dạng và kích thước của tam giác này cũng như không làm cho nó chuyển động. Vậy có thể tác động phép biến đổi nào để tam giác này không thay đổi? Chúng ta có thể quay nó một góc 120, 240 và 360 độ xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, và đi qua điểm O (hình 9b). Các phép biến đổi này làm cho các đỉnh tam giác đổi chỗ cho nhau, nhưng nếu bạn quay lưng lại, trong khi một người khác thực hiện các phép quay đó thì bạn sẽ không nhận thấy một sự khác biệt nào hết. Lưu ý rằng phép quay 360 độ là tương đương với không quay gì cả, hay nói cách khác là quay một góc 0 độ. Phép quay này được gọi là *phép biến đổi đồng nhất*. Nhưng tại sao ta lại phải bận tâm định nghĩa phép biến đổi này làm gì? Như chúng ta sẽ thấy sau này trong cuốn sách, phép biến đổi đồng nhất đóng vai trò như số 0 trong phép cộng và số 1 trong phép nhân:



Hình 8



Hình 9

khi bạn cộng số 0 vào một số hay nhân một số với số 1 thì số ấy vẫn không thay đổi. Chúng ta cũng có thể phản xạ gương tam giác qua ba đường đứt nét trên hình 8c. Do đó, ta có chính xác 6 phép biến đổi đối xứng - ba phép quay và ba phép phản xạ gương – gắn với một tam giác đều.

Thế còn tổ hợp của một số phép biến đổi này, chẳng hạn như phép phản xạ được tiếp theo bởi một phép quay thì sao? Liệu chúng có làm tăng số đối xứng của tam giác đang xét không? Tôi sẽ còn quay trở lại câu hỏi này khi nói về ngôn ngữ của đối xứng. Tuy nhiên, tạm thời chúng ta sẽ trình bày về một đối xứng quan trọng khác.

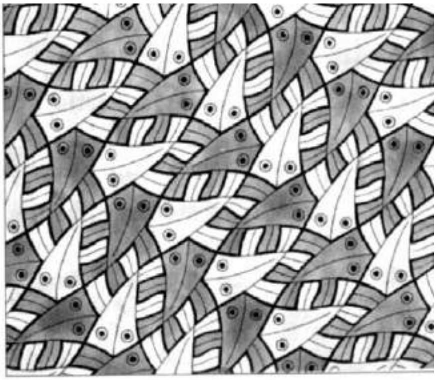
MORRIS, MOZART VÀ CÁC CỘNG SỰ

Một trong những hình mẫu đối xứng quen thuộc nhất là motif đệ quy lặp đi lặp lại. Từ những hoa văn trên các đền đài cổ và các hàng cột của các cung điện tới những tấm thảm và thậm chí cả tiếng chim hót, đối xứng của các hình mẫu lặp đi lặp lại luôn tạo ra một sự thân quen rất dễ chịu và một tác dụng an ủi tâm hồn. Một ví dụ sơ cấp của loại đối xứng này là hình 3.

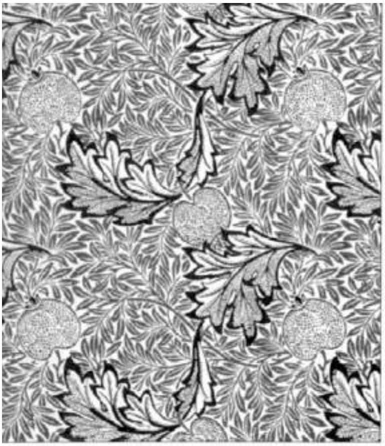
Phép biến đổi đối xứng trong trường hợp này được gọi là *phép tịnh tiến*, nghĩa là dịch chuyển một khoảng cách nào đó theo một đường nào đó. Hình mẫu này được gọi là đối xứng nếu nó có thể dịch chuyển theo các hướng khác nhau mà nhìn vẫn không thấy có sự khác biệt nào. Nói cách khác, những hình vẽ đều đặn mà trong đó một chủ đề được lặp đi lặp lại ở những khoảng cố định được coi là có đối xứng tịnh tiến. Những hình trang trí có đối xứng tịnh tiến đã có từ 17.000 trước CN (thời đại Đồ đá cũ). Một chiếc vòng đeo tay làm bằng ngà voi mamút được tìm thấy ở Ucraina có chạm một hình mẫu những đường gấp khúc lặp đi lặp lại. Những hình mẫu đối xứng tịnh tiến khác cũng được tìm thấy ở rất nhiều dạng nghệ thuật, từ gạch lát Hồi giáo thời Trung đại trong cung điện Alhambra ở Granada, Tây Ban Nha (hình 10a) qua thuật in ấn thời Phục Hưng tới những bức tranh của họa sĩ đồ họa lập dị người Hà Lan M. C. Escher (1898-1972; hình 10b). Tự nhiên cũng đã cung cấp những ví dụ về các sinh vật có đối xứng tịnh tiến như con rết, trong đó các đoạn giống hệt nhau lặp đi lặp lại tới 170 lần.

Họa sĩ, nhà thơ thời Victoria William Morris (1834-1896) là người đã sáng tác rất nhiều tác phẩm nghệ thuật trang trí. Nhiều tác phẩm của ông là sự thể hiện chính xác đối xứng tịnh tiến. Giai đoạn đầu đời, Morris đam mê kiến trúc Trung đại, và ở tuổi 27 ông đã lập một công ty trang trí mà sau này nổi tiếng dưới cái tên Morris và các

a



Hình 10 b



a **Hình 11** b

cộng sự. Trong một phản ứng mạnh đối với trào lưu công nghiệp hóa đang rầm rộ ở nước Anh thế kỷ 19, Morris đã tìm cách để làm hồi phục nghề thủ công mỹ nghệ và làm sống lại sự huy hoàng của các nghệ thuật trang trí thời Trung đại. Morris và các cộng sự và sau này là Kelmscott Press được Morris thành lập vào năm 1890, đã thiết kế ra nhiều thứ gạch lát, khăn trải bàn, hàng dệt, và những bản thảo được minh họa rất ngoạn mục theo thiết kế Trung đại. Nhưng với thiết kế giấy dán tường, Morris lần đầu tiên đã đạt tới trình độ bậc thầy khó mà tưởng tượng được đối với các hình mẫu lặp đi lặp lại đối xứng tịnh tiến. Một vài chủ đề hoành tráng của ông được minh họa trên hình 11. Trong khi những đồ hình của Morris không có gì đổi mới hơn so với các tác phẩm của nhưng người đương thời với ông như Christopher Dresser hay A.W.N. Pugin, nhưng ảnh hưởng và di sản của ông là rất to lớn. Bản thân Morris quan tâm đến việc khuyến khích nghệ thuật và nghề thủ công chứ không phải toán học của đối xứng. Trong cuốn *Vẻ đẹp của cuộc sống* (*The Beauty of Life*) ông đã tổng kết triết lý thẩm mĩ – xã hội của ông như sau:

> Bạn có thể treo trên tường nhà bạn tấm thảm thay vì quét sơn trắng hay giấy dán tường; hoặc bạn có thể lát trên đó một bức tranh ghép hay một bức bích họa của một họa sĩ lớn: tất cả đều không phải là xa xỉ, nếu nó được làm chỉ vì cái đẹp chứ không phải để phô trương; nó không hề phá vỡ quy tắc vàng của chúng ta: Không có gì trong nhà bạn mà bạn lại không biết nó là hữu ích hay tin là nó đẹp.

Một vấn đề lý thú là đối xứng đối với phép tịnh tiến, và thực tế cả phép phản xạ gương hay phép quay nữa có phải chỉ giới hạn trong các nghệ thuật thị giác hay là còn được mở rộng ra cả các dạng nghệ thuật khác nữa, như một tác phẩm âm nhạc, chẳng hạn. Rõ ràng, nếu bạn xét tới âm thanh chứ không phải bản ghi nhạc, bạn sẽ cần phải định nghĩa các phép đối xứng không phải thông qua hình học thuần túy, như trong trường hợp các câu thuận nghịch độc. Tuy nhiên, một khi chúng ta làm điều đó, thì câu trả lời cho câu hỏi: Liệu chúng ta có tìm được thể loại âm nhạc có đối xứng tịnh tiến hay không? sẽ là "có". Như nhà tinh thể học người Nga G. V. Wulff đã viết năm 1908: "Linh hồn của âm nhạc là nhịp điệu. Nó bao gồm cả sự lặp đi lặp lại đều đặn và tuần hoàn các phần của một tác phẩm âm nhạc... sự lặp đi lặp lại đều đặn các phần giống hệt nhau trong tổng thể tạo nên cái cốt yếu của đối xứng". Thực vậy, những chủ đề lặp đi lặp lại như vậy, vốn rất thường gặp trong sáng tác âm nhạc, chính là sự tương đương về thời gian với các đồ hình của Morris và đối xứng đối với phép tịnh tiến. Thậm chí tổng quát hơn nữa, các tác phẩm thường dựa trên một chủ đề cơ bản được đưa vào ngay từ đầu và sau đó sẽ có những biến hóa khác nhau.

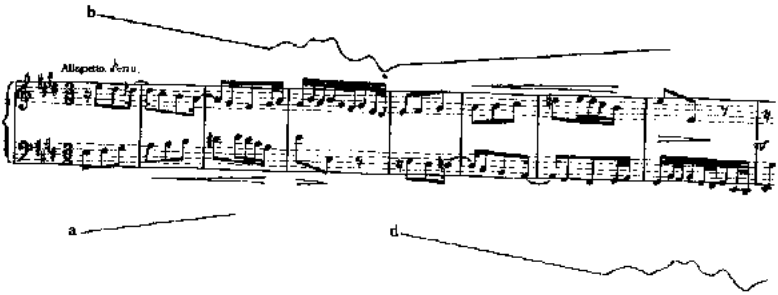
Một ví dụ đơn giản về đối xứng tịnh tiến trong âm nhạc bao gồm những nhịp mở màn trong bản Giao hưởng nổi tiếng số 40 cung Sol thứ của Mozart (hình 12) cũng như toàn bộ cấu trúc của một số hình thức âm nhạc phổ biến. Trong ví dụ thứ nhất, bạn có thể nhận thấy đối xứng tịnh tiến không chỉ trong mỗi dòng của bản nhạc (trong đó các động tác hạ thấp dần đã được đánh dấu) mà cả ở giữa dòng thứ nhất và dòng thứ hai (được ký là *a* và *b*). Về tổng thể, nếu bạn dùng các ký hiệu A, B và C để mô tả các đoạn của một phần, thì hình mẫu của một bản rondo với tư cách là một chỉnh thể có thể được diễn tả là ABACA hay ABACABA, trong đó đối xứng tịnh tiến thể hiện khá rõ ràng. Sự liên hệ của Mozart với các đối tượng của toán học thực ra chẳng có gì đáng ngạc nhiên cả. Chị gái ông, bà Nannerl, nhớ lại rằng có lần ông đã viết đầy các con số trên tường ở cầu thang và tất cả các phòng nhà họ, và khi không còn chỗ nữa, ông viết cả lên tường nhà hàng xóm. Thậm chí bên lề bản thảo các tác phẩm *Khúc Phóng túng* (*Fantasia*) và *Tấu pháp* (*Fugue*) cung Đô trưởng ông còn viết cả một số những tính toán về xác suất để trúng xổ số. Do đó, không có gì đáng ngạc nhiên khi nhà soạn nhạc kiêm

Hình 12

âm nhạc học người Anh Donald Tovey đã nhận ra “những tỷ lệ đẹp và đối xứng” trong các tác phẩm của Mozart là một trong những lý do làm cho chúng được phổ biến rộng rãi.

Một nhà soạn nhạc vĩ đại khác nổi tiếng là bị ám ảnh bởi các con số, những trò chơi trí óc và sử dụng chúng trong các hình thức âm nhạc phức tạp là Johann Sebastian Bach (1685-1750). Cả đối xứng phản xạ gương và tịnh tiến thường xuyên có mặt trong âm nhạc của Bach ở những mức độ khác nhau. Một ví dụ về sự phản xạ qua một “gương” nằm ngang là khúc dạo đầu của bản *Invention Hai phần* số 6, cung Mi trưởng của Bach (xem hình 13). Hãy hình dung một tấm gương đặt trong không gian giữa hai dòng nhạc. Xu hướng đi lên, ký hiệu là đường *a*, được phản xạ bởi xu hướng đi xuống *b* và toàn bộ động tác đó được phản xạ và lặp lại ngay sau đó (bắt đầu ở đường *d*).

Một ví dụ khác là toàn bộ cấu trúc rộng lớn của một trong những tác phẩm đáng chú ý nhất của Bach, đó là bản nhạc nổi tiếng *Khúc* Dâng tặng (*Musical Offering*). Bản nhạc này gồm các dạng thức âm nhạc sau:



Hình 13

Ricercar   5 Canon   Bộ ba Sonat   5 Canon   Ricercar

Rõ ràng nó bộc lộ đối xứng gương (tất nhiên không phải từng âm một).

Ricercar (từ tiếng Latinh *ricercare* có nghĩa là "nghiên cứu hoặc tìm kiếm") là một thuật ngữ cổ được dùng khá phóng túng để chỉ bất kỳ khúc dạo đầu nào, thường theo cách tấu pháp. Nhà nhân văn, bác sĩ, triết gia lớn Albert Schweitzer là một người hâm mộ Bach vĩ đại. Trong cuốn sách của ông nhan đề *J.S. Bach*, ông nhận xét: "Từ này (tức ricerra) có nghĩa là một đoạn nhạc trong đó chúng ta cần phải tìm kiếm một cái gì đó mà cụ thể là một chủ đề." Tác phẩm *Musical Offering* còn chứa 10 canon mà về mặt kết cấu có liên quan đến phép tịnh tiến. Trong bất kỳ một canon nào (từ này có nghĩa là "quy tắc, giáo lý"), một chuỗi giai điệu quyết định quy tắc (thông qua dòng giai điệu hay nhịp điệu) đối với canon thứ hai hoặc nhiều bè hơn. Bè thứ hai được nối tiếp ở một khoảng thời gian nhất định nào đó – một sự *tịnh tiến theo thời gian*. Một ví dụ đơn giản và quen thuộc

Row row row your boat
Gently down the stream
Merrily merrily merrily merrily
Life is but a dream

(Tạm dịch nghĩa:

Chèo đi chèo đi thuyền của bạn
Nhẹ nhàng trôi xuôi theo dòng
Vui đi vui đi vui đi vui mãi
Đời chẳng qua chỉ là một giấc mơ)

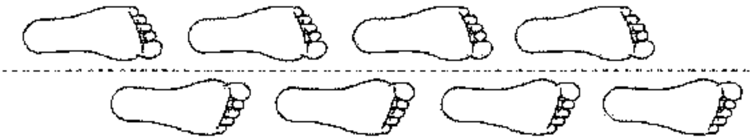
trong đó bè hai bắt đầu từ từ "gently".

Câu chuyện xung quanh bản nhạc *Musical Offering* bản thân nó cũng đã rất hấp dẫn. Ba năm trước khi mất, Bach trở về Berlin để thăm người con dâu tên là Johann Maria Dannemann (vợ của nhà soạn nhạc Carl Philipp Emanuel Bach) lúc đó đang chờ ở cữ. Kiệt sức vì chuyến đi dài ngày, nhà soạn nhạc già quyết định tạm nghỉ lại Potsdam, khi đó là kinh đô của Frederick Đại đế, nước Phổ. Chính vị vua này cũng đang trọng dụng Carl Philipp Emanuel. Tin Bach tới cung đình đã hối thúc đức vua hủy đêm hòa nhạc đã có kế hoạch từ trước mà chính đức vua sẽ biểu diễn sáo để nhường cho Bach biểu diễn trên 7 cây dương cầm mà đức vua mới sắm. Người làm ra các cây đàn này là Gottfried Silbermann, một nghệ nhân bậc thầy về chế tạo đàn ở nước Đức hồi đó.

Sau khi trình diễn một cách tuyệt vời trong 7 căn phòng khác nhau của cung điện, Bach đã dâng tặng cho cử tọa đang còn hân hoan vui sướng bằng cách ứng tác một tấu pháp (fugue) theo chủ đề mà Đức Vua gợi ý. Trên đường trở về nhà, Bach đã phát triển *Musical Offering* từ tấu pháp ứng tác đó. Ông đã thêm vào đó một tập hợp các canon phức tạp tuyệt vời cùng với bộ ba sonat và kỳ công soạn thảo các đoạn đối âm khác. Các bản sonat là dành cho sáo (nhạc cụ của Đức Vua Frederick), violon, và dương cầm cùng với cello. Về cái tít cho bản *Offering*, Bach – một người giỏi chơi chữ - đã chọn *Regis iussu cantio et reliqua canonica arte resoluta* (*Theo yêu cầu của Đức Vua, chủ đề và những gì thêm vào được viết theo phong cách canon*) và từ đây mà có chữ viết tắt RICERCAR.

Trong *Musical Offering* thậm chí còn có nhiều đối xứng hơn nữa. Trong Canon I (Canon Con cua), mỗi cây violon chơi phần của canon khác theo cách giật lùi, tạo ra đối xứng phản xạ (trên bản ghi nhạc) qua một gương đặt thẳng đứng. Cuối cùng, các canon nói chung vào thời đó được xem là một loại các câu đố về đối xứng. Nhà soạn nhạc cung cấp chủ đề còn các nhạc công có nhiệm vụ phải hình dung ra loại đối xứng nào mà nhà soạn nhạc hình dung cho chủ đề cần thể hiện. Trong trường hợp *Musical Offering,* Bach viết kèm theo hai canon cuối cùng trước bộ ba sonat với dòng chữ "*Quaedendo inventis*" có nghĩa là "Hãy tìm đi, sẽ thấy". Như chúng ta sẽ thấy trong Chương 7, điều đó cũng không khác mấy về mặt khái niệm với câu đố mà vũ trụ đặt ra cho chúng ta – nó nằm trong toàn bộ vẻ đẹp rực rỡ của vũ trụ mở ra cho con người khám phá – đối với chúng ta là phải tìm ra những hình mẫu và các đối xứng nằm bên dưới nó. Ngay cả những bất định và mơ hồ có liên quan với những nỗ lực để tìm ra "lý thuyết của vạn vật" (TOE) cũng có thể có sự tương tự với thách thức trí tuệ của Bach. Bạn thấy đấy, một trong những canon trong bản *Musical Offering* có tới ba lời giải khả dĩ.

Tịnh tiến và phản xạ có thể tổ hợp thành một phép đối xứng có tên là *phản xạ trượt*. Các dấu chân sinh ra bởi các bước đi trái-phải-trái-phải là một ví dụ về đối xứng phản xạ trượt (hình 14). Phép đối xứng này đơn giản gồm phép tịnh tiến (trượt) và tiếp sau là phép phản xạ qua đường song song với phương dịch chuyển (đường đứt nét trên hình). Một cách tương đương, bạn có thể nhìn phép phản xạ trượt như một phép phản xạ gương tiếp theo là phép tịnh tiến song song với gương. Đối xứng phản xạ trượt là đối xứng rất thường gặp trong các hoa văn cổ, cũng như trong các đồ gốm của những người Mỹ bản địa ở New Mexico. Trong khi các hình mẫu đối xứng tịnh tiến có xu hướng chuyển tải một ấn tượng về sự chuyển động theo một hướng thì những hình vẽ đối xứng phản xạ trượt tạo ra cảm giác nhìn uốn lượn giống như con rắn vậy. Những con rắn thực đạt được hình mẫu uốn lượn như thế bằng cách luân phiên co và thả lỏng những nhóm bắp thịt ở cả hai phía thân thể nó – khi chúng co một nhóm ở bên phải thì nhóm tương ứng ở bên trái được thả lỏng, và ngược lại.



Hình 14

Như vậy là đến đây chúng ta đã gặp tất cả các phép biến đổi cứng tạo ra các đối xứng trong hai chiều. Từ *cứng* ở đây đơn giản có nghĩa là sau phép biến đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ là không đổi, tức là giống như trước khi thực hiện phép biến đổi đó. Điều này cũng có nghĩa là chúng ta không thể làm co nhỏ hình lại hay làm cho nó giãn to ra hay làm cho hình biến dạng.

Trong không gian ba chiều, ngoài các đối xứng đối với các phép tịnh tiến, phép quay, phản xạ và phản xạ trượt ra, chúng ta còn có thể còn tìm được một đối xứng khác được gọi là đối xứng đinh ốc. Đây là đối xứng của cái vặn đinh ốc, trong đó sự quay quanh một trục được kết hợp với chuyển động tịnh tiến dọc theo trục đó. Một số thân cây trên đó những chiếc lá mọc ở những khoảng đều đặn sau khi quay trọn được cùng một phần của vòng tròn, có đối xứng đó. Liệu đây có phải đã là tất cả mọi đối xứng chưa? Chắc chắn là chưa.

TẤT CẢ ĐỀU BẰNG NHAU, NHƯNG...

Nghệ thuật và khoa học đều đầy rẫy những ví dụ hấp dẫn về đối xứng đối với các phép quay, tịnh tiến, phản xạ, phản xạ trượt và chúng ta sẽ còn trở lại với các đối xứng này trong các chương sau. Một phép biến đổi không có tính chất hình học có liên quan tới các *phép hoán vị* - một cách sắp xếp khác của các vật, các con số, hay các khái niệm. Ví dụ, để thử độ mòn của lốp thuộc bốn hãng khác nhau, bạn có thể muốn lập một sơ đồ cho chiến lược đảm bảo được rằng mỗi một tháng bạn đổi chỗ các lốp một lần và sau 4 tháng bạn đổi chỗ được vị trí của tất cả các lốp. Nếu bạn ký liệu lốp của các hãng là A, B, C, D và các vị trí FL (trước, trái), FR (trước, phải), RL (sau, trái) và RR (sau, phải), thì kế hoạch 4 tháng của bạn nhìn sẽ như sau:

THÁNG	**FL**	**FR**	**RF**	**RR**
Thứ nhất	A	B	C	D
Thứ hai	B	A	D	C
Thứ ba	C	D	A	B
Thứ tư	D	C	B	A

Mỗi dòng hoặc cột trong bảng biểu diễn một hoán vị của các chữ cái A,B,C,D. Chú ý rằng để thực hiện được phép thử mong muốn không một hàng hay cột nào được chứa hai chữ cái giống nhau. Hình vuông loại 4×4 giới thiệu ở đây được biết là các *hình vuông Latinh* và chúng đã được nhà toán học Thụy Sĩ nổi tiếng Leonhard Euler (1707-83) nghiên cứu một cách sâu rộng. Nhân tiện, bạn có thể giải câu đố sau về các lá bài – một câu đố nổi tiếng thế kỷ 18: Hãy sắp xếp tất cả quân J, Q, K và A trong một bộ bài vào một hình vuông sao cho không có hoa nào (tức rô, cơ, bích, nhép) xuất hiện hai lần trong cùng một hàng, một cột và trên hai đường chéo chính. Trong trường hợp bạn đã nghĩ nát óc mà không ra thì hãy xem lời giải trong Phụ lục 1.

Các phép hoán vị thực hiện trong các điều kiện khác nhau như vậy cũng giống như sự thay đổi các hình mẫu trong các điệu nhảy dân gian Scotland hay các bộ bài được xáo trộn. Mối quan tâm chính của phép hoán vị không phải là đối tượng nào nằm ở đâu mà là đối tượng nào thế chỗ của đối tượng nào. Ví dụ, trong hoán vị 1 2 3 4 → 4 1 3 2, số 1 được thay bởi số 4, 2 thay bởi 1, 3 giữ nguyên và 4 thay bởi 2. Điều này thường được ký hiệu như sau

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix}$$

trong đó mỗi số ở hàng trên được thay bằng số ở ngay bên dưới. Cũng hoán vị đó có thể được viết như sau

$$\begin{pmatrix} 3214 \\ 3142 \end{pmatrix}$$

vì sự thay đổi các số qua hoán vị chính xác y hệt như trước, còn trật tự theo đó các số được viết là không quan trọng. Đến đây bạn có thể thắc mắc là tại sao một hệ lại có thể là đối xứng (tức là không thay đổi) đối với phép hoán vị được? Rõ ràng, nếu bạn có 10 quyển sách trên giá và tất cả chúng đều khác nhau, thì bất kỳ một hoán vị nào – trừ hoán vị đồng nhất (tức không sờ vào quyển sách nào) – đều sẽ làm thay đổi trật tự. Tuy nhiên, nếu bạn có 3 quyển sách trong đó giống hệt nhau, chẳng hạn, thì rõ ràng một số hoán vị sẽ làm cho trật tự đó không thay đổi. Nhà phê bình và viết tiểu luận người Anh Charles Lamb (1775-1834) nổi tiếng về những chiêm nghiệm tự phát lộ về cuộc sống, đã có quan điểm khá mạnh về một số “cách sắp xếp lại” các cuốn sách như vậy. Ông viết: “Loài người, theo lý thuyết tốt nhất mà tôi có thể tạo nên về nó, gồm hai chủng tộc phân biệt: những người mượn và những người cho mượn... Những người mượn sách của bạn – đó là những kẻ phá hủy những bộ sách, làm hỏng đối xứng của giá sách và tạo ra các tập sách lẻ bộ”.

Đối xứng đối với phép hoán vị có thể xuất hiện trong những hoàn cảnh trừu tượng hơn. Ta hãy xét nội dung của câu: “Rachel is David’s cousin” (Rachel là anh/chị em họ của David). Ý nghĩa của câu này vẫn còn không thay đổi nếu ta đổi chỗ David và Rachel cho nhau. Nhưng điều này sẽ là không đúng đối với câu: “Rachel is David’s daughter” (Rachel là con gái David). Tương tự, sự bằng nhau của hai đại lượng, $a = b$, là đối xứng đối với phép chuyển vị a và b, vì $b = a$ cũng chính là hệ thức trên. Trong khi điều vừa nói trên có vẻ dường như là tầm thường, thì quan hệ lớn hơn (thường ký hiệu bằng dấu >) lại không có tính chất đó. Hệ thức $a > b$ có nghĩa là “a lớn hơn b”. Hoán vị hai chữ cái, ta được $b > a$, tức “b lớn hơn a”, và hai hệ thức trên là loại trừ nhau.

Nhiều biểu thức và công thức toán học cũng là đối xứng đối với phép hoán vị. Giá trị của biểu thức $ab + bc + ca$ (trong đó ab có nghĩa là tích của a và b, v.v...) vẫn còn không đổi đối với bất kỳ hoán vị nào của các chữ cái a, b, c. Như chúng ta sẽ thảo luận chi tiết hơn dưới đây, chính xác có 6 hoán vị khả dĩ của ba chữ cái, kể cả hoán vị đồng nhất (hoán vị đầu tiên bên dưới) ánh xạ mỗi chữ cái thành chính nó:

$$\begin{pmatrix}\text{abc}\\\text{abc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{abc}\\\text{acb}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{abc}\\\text{bca}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{abc}\\\text{cab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{abc}\\\text{cba}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{abc}\\\text{bac}\end{pmatrix}$$

Bạn dễ dàng kiểm tra thấy rằng biểu thức trên là không thay đổi đối với các hoán vị đó. Ví dụ, hoán vị thứ ba thay a thành b, b

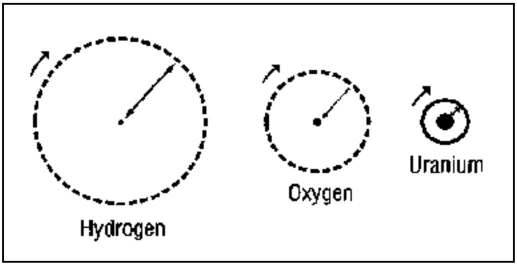
thành c, và c thành a. Khi đó, toàn bộ biểu thức trên chuyển thành $bc+ca+ab$. Tuy nhiên, dù ta có thực hiện phép nhân hoặc phép cộng theo bất cứ trật tự nào thì cũng sẽ nhận cùng một kết quả mà thôi, nghĩa là biểu thức mới cũng bằng biểu thức gốc.

Nhưng người chơi trò roulette trong một casino cũng cho ta một ví dụ lý thú về đối xứng đối với phép hoán vị. Roulette gồm một bánh xe quay trong đó có 18 rãnh màu đỏ được đánh số, 18 rãnh màu đen, và hai rãnh thường có nhãn 0 và 00 đã được đánh dấu. Một viên bi màu trắng được thả vào trong lúc bánh xe đang quay và sau khi lăn nhanh quanh vành được ít vòng, nó nẩy lung tung và cuối cùng tới nằm yên tại một trong các rãnh. Khi bánh xe hoàn hảo về mặt cơ học, thì trò chơi roulette là tuyệt đối đối xứng đối với sự hoán vị các người chơi. Tất cả mọi người đều có chính xác cơ hội thắng hoặc thua như nhau bất kể họ có là người chơi kỳ cựu hay là tay mới trong casino, là các chuyên gia về lý thuyết xác suất hay là một gã ngốc quê mùa. Kỳ vọng để thắng (hay đúng hơn là để mất, khoảng 5,3 xu cho mỗi lần đặt 1 đôla, tính trung bình) không phụ thuộc vào lượng tiền mạo hiểm được đặt vào hay chiến lược của người chơi. Dù cho bánh xe không thực sự hoàn hảo về mặt cơ học, nhưng hàng thế kỷ thu lợi của các casino đã chứng tỏ rằng, dù những sai lệch nhỏ như thế nào có thể tồn tại đi nữa, thì chúng cũng không dẫn tới sự vi phạm nghiêm trọng đối xứng đối với các phép hoán vị.

Không phải tất cả các trò đỏ đen đều là đối xứng đối với phép hoán vị các người chơi. Xì phé (*blackjack*) là trò chơi bài trong đó mỗi người chơi ở bàn chơi ăn thua với nhà cái. Mỗi lá bài đánh số có giá trị in ở mặt của nó, còn tất cả các lá bài in hoa có giá trị bằng 10, riêng quân át (*ace*) cho hai khả năng lựa chọn được tính bằng 1 hoặc 11. Mục tiêu trong trò này là thu được tổng giá trị các quân bài chơi gần với số 21 hơn tay bài của nhà cái, nhưng không được lớn hơn 21. Cái làm cho *blackjack* là bất đối xứng đối với phép hoán vị các người chơi chính là thực tế rằng chiến lược chơi đóng một vai trò quan trọng. Trong những năm 1960, các sòng bạc đã phát hiện ra vấn đề chiến lược chơi có tầm quan trọng tới mức nào đối với sự thua được trong trò xì phé. Nhà toán học Edward O. Thorp đã phát hiện ra sự sai sót trong cách tính xác suất của các casino khi bộ bài nọc bị vơi đi. Ông đã dùng thông tin này để phát triển một phương pháp chơi cực kỳ có lợi. Nếu bạn lấy làm lạ là làm gì có chuyện như thế thì bạn phải biết rằng sau đó các casino đã điều chỉnh lại. Tuy nhiên, chuyện chiến lược chơi vẫn làm nên sự khác biệt trong trò *blackjack* thì vẫn còn đúng. Và thực tế, 6 sinh viên trường MIT, bằng cách thông báo với nhau số điểm nhờ các từ mã hóa, họ đã kiếm được hàng triệu đôla ở Las Vegas vào những năm 1990.

Đối xứng hoán vị và một số đối xứng họ hàng gần gũi với nó trong khoa học đã có những hệ quả đạt tới tầm rất xa trong vật lý và thế giới nội nguyên tử, và chúng ta sẽ còn quay trở lại một số đối xứng đó trong Chương 7. Ở đây tôi chỉ xin đưa ra một ví dụ đơn giản nhằm giải thích một thực tế gây bối rối của các nguyên tử thuộc các nguyên tố khác nhau – cụ thể là chúng có kích thước không khác nhau là bao.

Các nguyên tử có cấu trúc hao hao một hệ mặt trời thu nhỏ. Các electron trong nguyên tử quay quanh hạt nhân ở trung tâm giống như các hành tinh quay quanh mặt trời vậy. Tuy nhiên, lực giữ các electron ở trên quỹ đạo của chúng là lực điện từ chứ không phải lực hấp dẫn. Còn hạt nhân thì chứa proton mang điện tích dương và neutron trung hòa về điện, trong khi các electron (bằng số proton) quay quanh hạt nhân lại mang điện tích âm. Mà như ta biết, các điện tích trái dấu thì hút nhau. Không giống như hệ các hành tinh có thể có quỹ đạo với kích thước bất kỳ, các nguyên tử phải tuân theo các quy tắc của thế giới nội nguyên tử, tức là *cơ học lượng tử*. Xác suất cao nhất để tìm electron là dọc theo một số quỹ đạo đặc biệt, được "lượng tử hóa", giới hạn trong một dãy cụ thể các kích thước gián đoạn. Các quỹ đạo cho phép được đặc trưng chủ yếu bởi năng lượng của chúng. Nói một cách nôm na thì năng lượng gắn với quỹ đạo càng lớn thì kích thước của quỹ đạo càng lớn. Tình hình ở đây cũng từa tựa như dãy các bậc thang với hạt nhân biểu diễn chân cầu thang còn các mức năng lượng cao hơn ứng với các bậc thang mỗi lúc một cao hơn. Nhưng ở đây xuất hiện một chuyện khó hiểu. Vật lý học và thực tế cả đời sống hằng ngày, dạy chúng ta rằng các hệ là bền vững, nhất là ở những trạng thái năng lượng thấp nhất có thể (ví dụ, viên bi lăn xuống theo cầu thang sẽ đạt được sự bền vững nhất ở chân cầu thang). Điều này phải chăng có nghĩa là trong các nguyên tử hydrogen có 1 electron, oxygen có 8 electron hay uranium có 92 electron tất cả các electron đều cụm lại ở quỹ đạo nhỏ nhất có thể. Vì các nguyên tử giàu proton có nhiều electron hơn, lực hút giữa hạt nhân và các electron sẽ mạnh hơn, nên chúng ta chờ đợi rằng nguyên tử oxygen sẽ nhỏ hơn nguyên tử hydrogen, và nguyên tử uranium còn nhỏ hơn nữa (như được vẽ phác trên hình 15). Tuy nhiên, thực nghiệm lại chứng tỏ



Hình 15

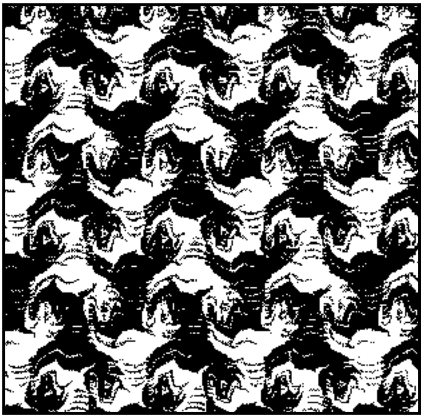
rằng điều đó hoàn toàn không đúng. Sự thực thì bất kể số electron là như thế nào, kích thước các nguyên tử được phát hiện ra là gần như nhau. Tại sao lại như vậy?

Nhà vật lý nổi tiếng Wolfgang Pauli (1900-1958) là người đã đưa ra lời giải của câu đố này. Năm 1925, ông đã phát biểu một định luật rất mạnh của tự nhiên (mà nhờ đó năm 1945 ông được trao giải thưởng Nobel) có tên là nguyên lý loại trừ. Định luật này liên quan tới một số hạt cơ bản cùng loại như các electron, chẳng hạn. Về các tính chất nội tại thì tất cả các electron trong vũ trụ đều giống hệt nhau hay đồng nhất với nhau, tức là không có cách nào phân biệt hạt này với hạt khác. Ngoài điện tích và khối lượng ra, các electron còn có một tính chất cơ bản khác gọi là *spin*. Để dễ hiểu, trong một số trường hợp có thể coi spin như là sự tự quay của electron giống như một viên bi nhỏ quanh trục của nó. Cơ học lượng tử - lý thuyết mô tả các nguyên tử, ánh sáng và các hạt nội nguyên tử - nói với chúng ta rằng spin của electron chỉ có hai trạng thái (nói đại khái thì điều này tương tự như viên bi quay với một tốc độ xác định theo một hướng và theo hướng ngược lại). Nguyên lý loại trừ Pauli khẳng định rằng không thể có 2 electron ở trong cùng một trạng thái, tức là có cùng một quỹ đạo và cùng một hướng spin. Nhưng điều này thì có liên quan gì đến đối xứng? Để phát biểu nguyên lý loại trừ một cách chính xác hơn, cần ý thức được rằng cơ học lượng tử nói bằng ngôn ngữ xác suất. Chúng ta không bao giờ có thể xác định được một cách chính xác vị trí của electron trong nguyên tử. Đúng hơn, chúng ta chỉ có thể xác định được xác suất tìm thấy nó ở những vị trí khác nhau mà thôi. Tập hợp của tất cả các xác suất này được gọi là *hàm xác suất*. Hàm xác suất đóng vai trò như một tấm bản đồ cho chúng ta biết đâu là chỗ có khả năng nhất tìm thấy electron. Theo đó, Pauli cũng phát biểu nguyên lý loại trừ của ông qua một tính chất của hàm xác suất mô tả chuyển động của các electron trong nguyên tử. Ông phát biểu rằng hàm xác suất là phản đối xứng đối với sự hoán đổi vị trí của một cặp electron bất kỳ. Nói một cách cụ thể, một hàm được gọi là phản đối xứng, nếu chuyển vị hai electron chuyển động dọc theo cùng một quỹ đạo và có cùng hướng spin thì chỉ làm đổi dấu của hàm đó (ví dụ, từ cộng chuyển sang trừ), chứ giá trị của hàm không thay đổi. Ví dụ, ký hiệu a là một tính chất nào đó của electron thứ nhất, và b là giá trị của chính tính chất đó của electron thứ hai. Một hàm có giá trị $a+b$ là đối xứng đối với phép đổi chỗ hai electron vì $a+b=b+a$. Trái lại, hàm $a-b$ là phản đối xứng vì sự thay đổi a thành b và b thành a làm cho $a-b$ trở thành $b-a$, mà $b-a$ thì đúng bằng – $(a - b)$ (ví dụ, $5-3=2$; $3-5=-2$).

Phát biểu của Pauli do đó là cực kỳ quan trọng. Một mặt chúng ta biết rằng nếu chúng ta hoán đổi hai electron đồng nhất thì điều đó không tạo ra bất cứ sự khác biệt nào, và do đó hàm xác suất vẫn không có gì thay đổi. Mặt khác, nguyên lý loại trừ lại nói với chúng ta rằng hàm xác suất khi đó phải đổi dấu (ví dụ, từ dương chuyển thành âm, chẳng hạn). Nhưng số nào lại có thể bằng với số đối của nó? Chỉ có một số như vậy – đó là số 0. Thay đổi dấu ở đằng trước số 0 không làm cho giá trị của nó thay đổi một mảy may nào. Nói một cách khác, xác suất tìm hai electron với cùng spin và chuyển động dọc theo cùng một quỹ đạo là bằng 0, nghĩa là không tồn tại một trạng thái như vậy.

Nguyên lý loại trừ Pauli nói với chúng ta rằng các electron với cùng các tính chất không muốn cụm lại ở cùng một chỗ. Do đó, không thể có hơn hai electron (mỗi hạt với một hướng spin) được phép ở trên một quỹ đạo đã cho. Như vậy, thay vì tất cả các electron tụ tập ở quỹ đạo nhỏ nhất (năng lượng thấp nhất), các electron buộc phải tuần tự xếp vào các quỹ đạo có kích thước lớn hơn và năng lượng cao hơn. Kết quả cuối cùng là thậm chí mặc dù kích thước của tất cả các quỹ đạo lượng tử hóa càng nhỏ trong các nguyên tử càng nặng (giàu proton hơn), các electron không có lựa chọn nào khác là phải chiếm số các quỹ đạo tăng dần. Điều kỳ lạ là, dáng điệu của hàm xác suất trong phép hoán vị các electron lại cho phép ta giải thích được tại sao, không giống như hình 15, các nguyên tử lại có kích thước gần như bằng nhau.

Bây giờ khi ta quay trở lại phép hoán vị nói chung, ta thấy phép biến đổi màu cũng được xem gần như tương tự. Đối với một hình mẫu bất kỳ có hơn một màu, ví như bàn cờ, chẳng hạn, các màu có thể đổi chỗ cho nhau. Nói một cách chặt chẽ, các hình mẫu thực thường không là đối xứng đối với phép biến đổi màu, tức là chúng sẽ thay đổi, chứ không bất biến. Người ta có thể coi một số ít bản vẽ tưởng tượng của M.C. Escher gần như là đối xứng về màu (hình 16). Chú ý rằng hình ảnh sẽ không còn thực sự như cũ nữa khi màu đen và trắng đổi chỗ cho nhau, và ngay cả bàn cờ cũng vậy. Tuy nhiên, ấn tượng thị giác nói chung là vẫn còn như cũ.



Hình 16

Bản thân Escher cũng không bao giờ biết chắc điều gì đã dẫn dắt ông tới sự ám ảnh bởi các hình mẫu đối xứng tịnh tiến và đối xứng màu đến như vậy. Theo lời của chính ông:

> Tôi vẫn thường băn khoăn không biết ma lực nào đã khiến tôi tạo ra các bức vẽ tuần hoàn. Một lần tôi đã hỏi một người bạn, một nhà tâm lý học, về lý do khiến tôi đam mê những thứ đó, nhưng câu trả lời của ông là: tôi đã bị thôi thúc bởi một bản năng nguyên thủy, không giải thích bằng cách nào khác được. Nhưng cái gì là lý do để chỉ có một mình tôi cô đơn trong lĩnh vực đó? Tại sao lại không có những họa sĩ bạn bè nào của tôi cũng đam mê những thứ đó? Nhưng quy tắc của chúng là thuần túy khách quan mà mỗi nghệ sĩ có thể áp dụng theo cách riêng của mình!

Sự suy tư có tính hoài niệm như thế của Escher đụng chạm tới hai chủ đề quan trọng: vai trò của đối xứng trong quá trình cảm nhận "nguyên thủy" và những quy tắc nằm bên dưới đối xứng. Chủ đề thứ hai sẽ được đề cập tới trong một vài chương sau. Tuy nhiên, vì tất cả các thông tin nhận được về thế giới đều thông qua cảm giác của chúng ta, nên vấn đề đối xứng như một nhân tố tiềm tàng trong sự cảm nhận đã trở thành vấn đề quan yếu trực tiếp.

II

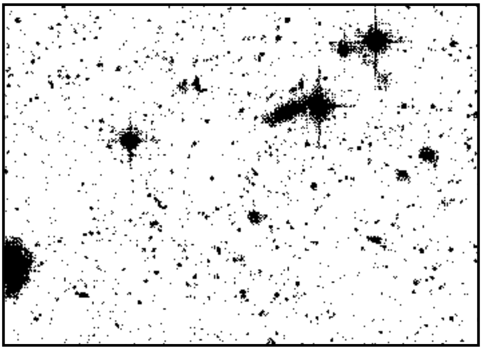
Đối xứng dưới con mắt của trí não

Trong số tất cả các giác quan của con người thì cho đến nay thị giác là phương tiện quan trọng nhất đối với quá trình nhận thức. Tuy nhiên, mắt cũng chỉ là một dụng cụ quang học; cảm nhận đòi hỏi phải có sự tham gia của bộ não. Cảm nhận thị giác là những quá trình phức tạp diễn ra trong não, nó tổ hợp những cảm giác từ thế giới bên ngoài để tạo nên một hình ảnh giàu thông tin. Môi trường xung quanh chúng ta tạo ra nhiều tín hiệu hơn so với những tín hiệu mà chúng ta có thể phân tích. Do đó, sự cảm nhận liên quan đến quá trình sàng lọc cả kho dữ liệu để chọn lấy những đặc điểm có lợi nhất. Khi những người chơi cờ xem xét nước đi tiếp theo, họ không xét trong óc mọi nước đi khả dĩ trên bàn cờ. Họ chỉ tập trung vào một số ít nước đi có vẻ là có lợi nhất khi nhìn nhận dựa trên các thông tin đã tích lũy được, tức cái chúng ta gọi là trí nhớ. Trong bộ phim *The Curse of the Jade Scorpion* của đạo diễn Woody Allen, Dan Aykroyd đóng vai sếp của một công ty bảo hiểm. Trong một cảnh anh ta nói với C.W Briggs (do chính Woody

Allen đóng), một trong số những người điều tra mình rằng "Anh biết đấy, có một từ để chỉ những người luôn nghĩ rằng mọi người đều âm mưu chống lại họ". Và Woody Allen đáp lại ngay "Đúng, đó là từ cảm nhận sắc bén (*perceptive*). Tất nhiên, trên thực tế, hoang tưởng thể hiện sự méo mó của nhận thức.

Ở bề mặt của nó, nhận thức thị giác phải thực hiện một nhiệm vụ bất khả thi. Nó cần phải biến đổi tác động vật lý của các đơn vị năng lượng ánh sáng (tức các photon) vào các tế bào thụ cảm ở đáy mắt thành những hình ảnh trong trí óc của các vật. Như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây, đối xứng hỗ trợ rất nhiều để hướng tới mục tiêu đó.

Trước hết, chúng ta cần đánh giá xem chúng ta cần phải vượt qua những loại khó khăn nào. Thiên văn học giúp chúng ta minh họa một trong những trở ngại liên quan đến quá trình này – cụ thể là cảm nhận về khoảng cách. Hình 17 là bức ảnh do kính thiên văn không gian Hubble chụp qua quầng hình cầu của các ngôi sao bao quanh thiên hà Andromeda (mà các nhà thiên văn gọi là M31). Một thiên hà là một khoảng rộng lớn chứa tới hàng trăm tỷ ngôi sao tương tự như Mặt Trời. M31 ở cách chúng ta 2,5 triệu năm ánh sáng và là một trong những thiên hà láng giềng gần dải Ngân Hà (cũng là một thiên hà) của chúng ta nhất. (Một năm ánh sáng bằng một ngàn tỷ kilometre). Bức ảnh trên hình 17 chứa khoảng 10 ngàn ngôi sao thuộc M31

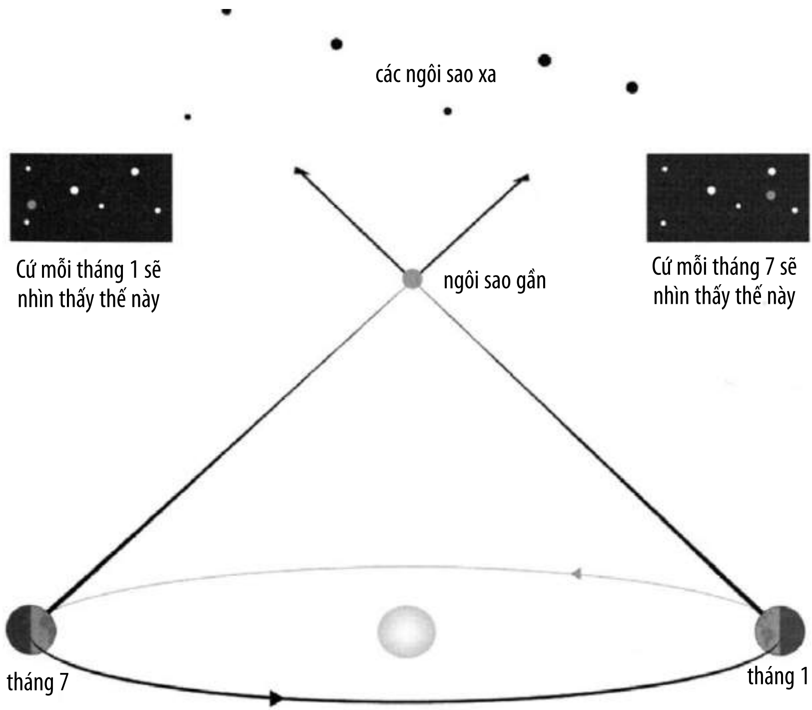


Hình 17

và trên nền của nó có thể nhìn thấy khoảng một trăm thiên hà khác (một số là những đối tượng có quảng tính và mờ nhòe).

Tuy nhiên, ở đây nảy ra một vấn đề. Nếu chỉ đơn giản nhìn bức ảnh, chúng ta không có cách nào nói được rằng, dù là nói một cách tương đối, những ngôi sao này ở trong cùng cái xó xỉnh với chúng ta (tức ở khoảng cách 2,5 triệu năm ánh sáng), trong khi một số thiên hà ở xa hơn 10 *tỷ* năm ánh sáng! Tương tự thế, khi nhìn chăm chú thế giới xung quanh chúng ta, thì mắt chỉ nhận ra hướng truyền của tia sáng mà photon chuyển động. Vì hình ảnh được chiếu lên bề mặt hai chiều (võng mạc), nên nếu không có thông tin phụ trợ thì não không có manh mối nào để biết được photon đã bắt nguồn từ bao xa. Trong trường hợp ngôi sao ở tương đối gần, các nhà thiên văn giải quyết bài toán xác định khoảng cách bằng cách dùng phương pháp *thị sai lượng giác*. Họ quan sát ngôi sao từ hai điểm khác nhau trên quỹ đạo quanh Mặt Trời của Trái Đất (hình 18). Trong thời gian một năm, ngôi sao ở gần dường như xê dịch tới lui đối với những ngôi sao (cố định) ở rất xa trên nền trời. Bằng cách đo góc gắn với độ dịch biểu kiến đó, biết đường kính quỹ đạo quay quanh Mặt Trời của Trái Đất, người ta có thể tính được khoảng cách tới ngôi sao mà chỉ cần dùng môn lượng giác sơ cấp được dạy ở trường phổ thông.

Con người dùng hai mắt cũng theo đúng cách như thế để tạo ra cảm nhận về không gian. Bạn có thể phát hiện ra cơ chế này, gọi là *nhìn lập thể*, bằng cách thực hiện một thí nghiệm đơn giản sau. Duỗi thẳng cánh tay ra phía trước, giữ cho một ngón tay thẳng đứng, rồi nhìn lên ngón tay đó trên một nền nào đó. Nếu bạn luân phiên nhắm mắt phải và mắt trái bạn sẽ thấy ngón tay bạn dường như xê dịch tới lui đối với các vật nền. Bằng cách đưa ngón tay lại gần mắt,



Hình 18

bạn sẽ thấy rằng sự nhảy giữa hai vị trí tăng lên. Sở dĩ có sự xê dịch biểu kiến (thị sai) đó là bởi vì hai mắt bạn nhìn ngón tay từ hai vị trí khác nhau. Vì thị sai phụ thuộc vào khoảng cách của vật, nên bằng cách đo góc giữa hai vị trí biểu kiến và biết khoảng cách giữa hai mắt, não sẽ dùng "lượng giác" tính ra khoảng cách tới vật. Nếu như bạn quen với sự mất mát tương đối về cảm nhận độ sâu liên quan đến sự nhắm một mắt, thì bạn có thể nghĩ rằng vai trò của hai mắt trong nhìn lập thể đã từng được biết tới từ thời cổ đại. Nhưng thật ngạc nhiên là ngay cả những nhà nghiên cứu vĩ đại nhất về phối cảnh cũng hoàn toàn không biết tới khái niệm nhìn lập thể. Các nhà toán học như Euclid ở Hy Lạp cổ đại, các kiến trúc sư thời Phục Hưng Brunelleschi và Alberti, các họa sĩ Piero della Francesca, Paolo Ucello, và Albrecht Dürer, và ngay cả Isaac Newton vĩ đại cũng coi hai mắt chỉ đơn giản là sự thể hiện đối xứng hai bên, chứ không hề có chức năng đặc biệt nào khác. Người đầu tiên thấy được hai mắt có thể cung cấp một điều gì đó mà chỉ một mắt thôi không thể có được là Leonardo da Vinci ((1452-1519) – một tinh hoa thời Phục Hưng. Ông nhận xét rằng khi nhìn một vật bằng cả hai mắt, mắt phải sẽ thâu tóm phần không gian sau vật sang bên phải nó, còn mắt trái nhìn quanh vật sang bên trái nó. Do đó, Leonardo rút ra kết luận rằng "vật... được nhìn bằng cả hai mắt trở lên, dường như là, trong suốt... nhưng điều này không xảy ra khi vật... được nhìn chỉ bằng một mắt". Mặc dù thấy trước được như vậy, nhưng do chỉ giới hạn chú ý tới các hình cầu, nên Leonardo đã bỏ lỡ cơ hội phát minh ra rằng điều đó không chỉ đúng trong nền mà còn đúng trong cả chính bản thân vật nữa, rằng hai mắt sẽ nắm bắt được hai hình ảnh khác nhau. Người đã xác lập được tầm quan trọng của việc nhìn bằng hai mắt đối với cảm nhận khoảng cách là nhà thiên văn học người Đức Johannes Kepler (1571-1630). Trong hai cuốn sách rất hay của ông, *Astronomiae Pars Optica* (*Phần quang học của thiên văn học*), xuất bản năm 1604, và *Dioptrice* (*Lưỡng chất*, phần quang học nghiên cứu sự khúc xạ), xuất bản năm 1611, Kepler đã mô tả chi tiết quang học của mắt, giải thích hoạt động của kính đeo mắt và phát triển một lý thuyết về nhìn lập thể. Tuy nhiên, không hiểu sao các tác phẩm của Kepler lại ít được chú ý tới, và thậm chí ngay cả Charles Wheatstone, người đã phát hiện ra cơ chế cảm nhận chiều sâu vào năm 1838, dường như cũng không biết về hai quyển sách đó.

Charles Wheatstone (1802-75) sinh ra trong một gia đình âm nhạc, và những nghiên cứu đầu tiên của ông liên quan tới âm thanh, tới dao động của các dụng cụ khác nhau như dây đàn và các ống, và các nhạc cụ. Năm 1822, ông đã thiết đặt một thí nghiệm chứng minh trong cửa hiệu của cha ông ở Pall Mall, London, thí nghiệm này cung cấp âm nhạc không chỉ cho tai mà còn cả cho mắt nữa. Chiếc đàn thất huyền (đàn lia) "thần diệu" được treo bằng một sợi dây mảnh đi qua trần tới phòng bên trên và được kết nối với hộp cộng hưởng của một đàn piano, một đàn thụ cầm và một cây dã cầm (dulcimer). Khi Wheatstone chơi các nhạc cụ ở phòng trên thì cây đàn thất huyền quyến rũ cứ như tự chơi vậy. Vốn là một nhà thực nghiệm rất giàu óc tưởng tượng, Wheatstone đã phát minh ra đàn concertine (một nhạc cụ tương tự như cây đàn phong cầm nhỏ) và ông cũng đã được cấp bằng phát minh ra điện tín ở Anh.

Wheatstone bắt đầu những thí nghiệm của ông về nhìn lập thể vào năm 1832 và đã giới thiệu lý thuyết của ông trong một bài báo công bố vào ngày 21 tháng 6 năm 1838. Nhan đề của bài báo này là "*Một số đóng góp vào sinh lý học của thị giác*. Phần I: *Về một hiện tượng đáng lưu ý nhưng cho đến nay chưa được quan sát của việc nhìn bằng hai mắt*". Đoạn đầu tiên của bài báo mô tả cốt lõi của phát minh – đó là sự không hòa hợp với nhau của hình ảnh trên hai võng mạc và việc xử lý sau đó trong não đã tạo ra sự cảm nhận không gian. Theo lời của Wheatstone:

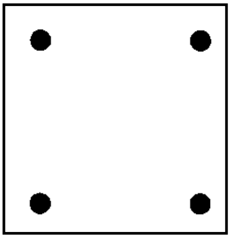
> Khi một vật được nhìn từ khoảng cách lớn sao cho quang trục của hai mắt nhìn vật gần như song song với nhau thì những hình chiếu phối cảnh của nó được nhìn bởi một mắt riêng lẽ là tương tự nhau và hình ảnh của nó đối với cả hai mắt chính xác là giống hệt như là khi chỉ nhìn bằng một

> mắt... Nhưng sự tương tự đó không còn tồn tại nữa khi vật đặt gần mắt sao cho để nhìn nó quang trục của hai mắt phải gặp nhau (chứ không còn song song với nhau nữa); trong những điều kiện đó, hình chiếu phối cảnh của vật được nhìn bởi mỗi mắt là khác nhau... Thực tế này có thể dễ dàng kiểm tra bằng cách đặt một hình ba chiều bất kỳ, như một khối lập phương, chẳng hạn, ở một khoảng cách vừa phải trước mắt, đồng thời đầu vẫn giữ cố định và lần lượt nhìn vật bằng một mắt, trong khi mắt kia thì nhắm lại.

Tôi đã mô tả khá dài dòng phát minh ra những quá trình liên quan tới sự cảm nhận một điều khá sơ cấp là chiều sâu không gian, bởi vì câu chuyện này giúp ta hình dung được những trở ngại to lớn gắn liền với sự phát triển một hiểu biết thấu đáo về nhận thức. Những lý thuyết về sự nhận thức của con người có thể choán đầy, và thực tế đã choán đầy, những bộ sách lớn. Ở đây chúng tôi chỉ tập trung vào chức năng của đối xứng trong quá trình đó.

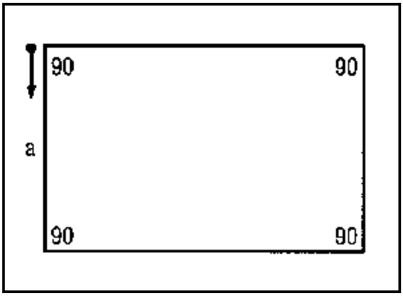
Vai trò của đối xứng trong nhận thức đã được đưa vào tâm điểm chú ý nhờ một trường phái tư tưởng có tên là *tâm lý học cấu trúc* (*Gestalt psychology*). Các nhà tâm lý học Max Wertheimer, Kurt Koffka và Ivo Kohler, những người đã khởi xướng học thuyết này, đã thiết lập một phòng thí nghiệm có tầm ảnh hưởng lớn để nghiên cứu tâm lý học ở Đại học Frankfurt vào năm 1912. Một trong số những vấn đề mà các nhà tâm lý học cấu trúc đặt ra để nghiên cứu là vấn đề tổ chức nhận thức, cụ thể là những mẩu nhỏ thông tin nhận được bởi các giác quan đã được tổ chức như thế nào thành những cấu trúc nhận thức lớn hơn. Làm thế nào chúng ta biết được những bộ phận nào từ gốc hợp lại để tạo nên một vật? Làm thế nào chúng ta tách được các vật ra khỏi nhau và làm thế nào phân biệt được vật với nền? "Định luật" trung tâm của tổ chức nhận thức trong tâm lý học cấu trúc được biết là nguyên lý Prägnanz, thường được gọi là định luật "hình tốt" (từ *Prägnanz* trong tiếng Đức có nghĩa là cô đọng, súc tích). Định luật này phát biểu: "Trong một số tổ chức khả dĩ về mặt hình học, tổ chức được nhìn thấy là tổ chức có hình dạng đẹp, đơn giản và ổn định nhất".

Do đó, đối với các nhà tâm lý học cấu trúc, đối xứng là một trong những yếu tố then chốt đóng góp đáng kể vào "độ tốt" của hình. Một bố trí gồm 4 chấm đen trên hình 19 sẽ được cảm nhận như một hình vuông, vì "độ tốt" của hình vuông như một hình đối xứng, khép kín và ổn định cao hơn "độ tốt", chẳng hạn, của bố cục gồm một tam giác và một chấm đen dư ra. Trong khi các nhà tâm lý học cấu trúc chưa bao giờ cố gắng phát biểu một lý thuyết chính xác về cảm nhận hình dạng, thì các nhà lý thuyết sau đó, như nhà tâm lý học người Hà Lan Emanuel Leeuwenberg và hai người Mỹ là Wendell Garner và Stephen Palmer, đã mở rộng các nguyên lý cơ bản của họ. Đặc biệt là Garner và Palmer đã nhận ra vai trò của các loại đối xứng khác nhau (như đối xứng đối với các phép quay và phản xạ) đối với "độ tốt" của hình.



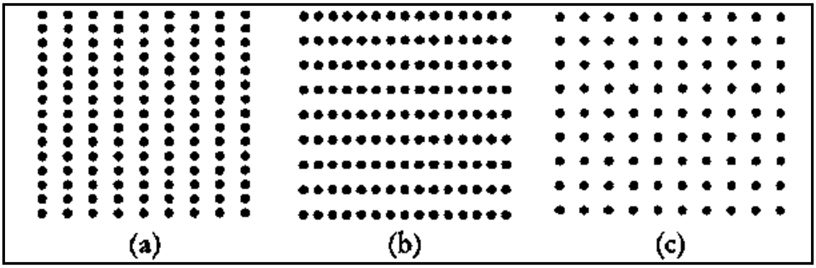
Hình 19

Leeuwenberg và các cộng sự của ông đã phát triển một lý thuyết về biểu diễn hình dạng được biết tới rộng rãi là *lý thuyết thông tin cấu trúc*. Hai khái niệm của lý thuyết này là *mã* (*codes*) và *tải thông tin* (*information loads*). Mã là những mô tả cảm nhận đơn giản mà dựa vào đó có thể tạo ra hình được quan sát. Ví dụ, để mô tả một hình chữ nhật, chúng ta có thể xuất phát từ góc trên bên trái và cho chiều dài của đoạn cần vẽ (hình 20), sau đó điều chỉnh góc để vẽ tiếp. Sau đó chúng ta phải cho chiều dài tiếp theo, rồi lại hiệu chỉnh góc. Mã cuối cùng để vẽ hình chữ nhật có dạng: *a 90 b 90 a 90 b 90*. Tuy nhiên, bạn cần lưu ý rằng vì chính những chỉ dẫn đó đã được lặp lại hai lần, nên ta có thể đơn giản mã này bằng cách viết như sau 2*(*a 90 b 90*).



Hình 20

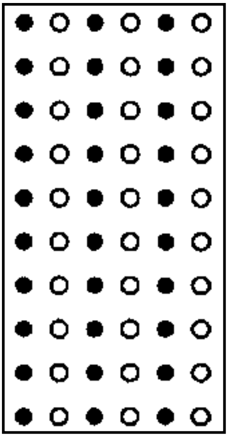
Tải thông tin đo độ phức tạp của mã đơn giản nhất mà vẫn còn hoàn thành được công việc. Nói chung, chúng ta có thể tính tải thông tin bằng cách đơn giản là đếm số các tham số trong mã (như *a, b, 90* trong ví dụ ở trên). Ý tưởng trung tâm của lý thuyết thông tin cấu trúc là ở chỗ "độ tốt" của hình càng cao thì tải thông tin càng thấp. Các hình đối xứng chứa tải thông tin thấp và do đó có "độ tốt" cao. Ví dụ, đối với mã hình chữ nhật ở trên tải thông tin là 4: số lần lặp (2); hai chiều dài (*a*, *b*); và góc (*90*). Trái lại, đối với một hình tứ giác tùy ý tải thông tin là 8 (4 chiều dài và 4 góc).



Hình 21

Hai yếu tố quan trọng trong các nguyên lý cấu trúc của tổ chức là *tính gần gũi* và *tính tương tự*. "Luật" gần gũi diễn đạt một thực tế là, nói chung, các hình gần gũi nhau sẽ được nhóm lại với nhau trong óc. Trong hình 21a chúng ta cảm nhận các cột, vì khoảng cách giữa các chấm đen theo phương thẳng đứng là nhỏ hơn so với phương nằm ngang. Điều ngược lại là đúng với hình 21b, tạo ra cảm nhận dòng. Khi khoảng cách theo hai phương là như nhau (như trên hình 21c) thì chúng ta có một ấn tượng mơ hồ, không rõ ràng.

Các hình dạng tương tự nhau cũng có xu hướng nhóm lại trong liên tưởng, và tính tương tự đôi khi còn là yếu tố tổ chức mạnh hơn tính gần gũi. Trong hình 22, chúng ta có xu hướng cảm nhận cột vì tính tương tự của các vòng tròn, thậm chí mặc dù, do tính gần gũi không thôi, nếu tất cả vòng tròn là đen thì chúng ta sẽ chỉ nhìn thấy hàng.

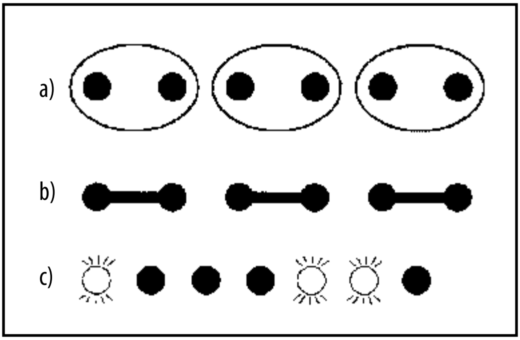


Hình 22

Đối xứng đóng vai trò quan trọng trong việc nhận ra sự tương tự vì nó biểu diễn một *bất biến* thực sự, tức là sự "miễn trừ" thay đổi. Do đó, đối xứng là một đặc điểm cực kỳ hữu ích đối với hệ thống cảm nhận dùng để xác định các hình mẫu quan sát có thực sự là tương tự hay khác nhau.

Một nguyên lý cấu trúc khác là *sự tiếp nối tốt* – chúng ta cảm nhận ký hiệu x như hai đường thẳng bắt chéo nhau, chứ không phải là hai ký hiệu v, một thẳng đứng và một lộn ngược nối với nhau ở đỉnh. *Số phận chung* cũng là cơ sở cho sự nhóm lại trong óc. Chúng ta cũng thường nhóm các vật chuyển động với cùng vận tốc hay cùng hướng lại với nhau. Nhà tiên tri Amos trong kinh thánh đã ý thức rất đầy đủ về nguyên lý này, khi ông hỏi: "Hai người có đồng hành được chăng, nếu không hẹn với nhau từ trước?"

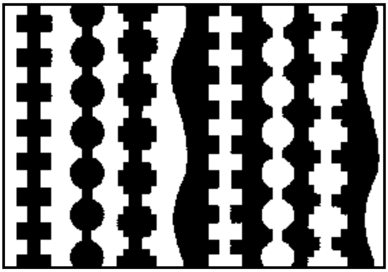
Nhà tâm lý học Stephen Palmer thuộc Đại học California ở Berkeley và các cộng sự còn bổ sung thêm các nguyên lý tổ chức *vùng chung, kết nối* và đồng bộ. Hình 23 minh họa cho các nguyên lý này. Vùng chung liên quan đến sự thật là các yếu tố sẽ được nhóm lại với nhau khi chúng được quây lại bên trong một vùng không gian (hình 23a). Tính kết nối có nghĩa là chúng ta cảm nhận các yếu tố đơn vị dường như kết nối với nhau về mặt vật lý (hình 23b). Cuối cùng, sự đồng bộ phản ánh thực tế là các sự kiện thị giác đồng thời được cảm nhận như có liên kết với nhau (hình 23c).



Hình 23

Đối xứng và đặc biệt là đối xứng hai bên, cũng là một trong những yếu tố then chốt trong việc tách hình khỏi nền, tức khả năng nhìn thấy các vật như các hình đứng tách riêng ra khỏi nền. Hãy liếc nhanh hình 24, cả bên trái lẫn bên phải, và quyết định xem màu nào là hình và màu nào là nền. Các vùng có đối xứng hai bên có xu hướng được cảm nhận là các hình nổi trên nền bất đối xứng. Do đó, ở bên trái hình 24, chúng ta thiên về cảm nhận vùng đen là hình, trong khi ở bên phải vùng trắng lại được cảm nhận là hình. Các định hướng thẳng đứng và nằm ngang cũng thường được xem là hình hơn so với các định hướng khác. Cuối cùng, các vùng nhỏ hơn được bao quanh bởi các vùng lớn hơn cũng có xu hướng được nhận dạng là hình, cũng như các hình dáng có nghĩa hoặc quen thuộc.

Chắc là bạn cũng đã nhận ra rằng các "định luật" cấu trúc không hơn gì *khoa học khám phá* (*heuristics*), chẳng qua đây là các nguyên lý phỏng đoán tốt nhất có thể vận hành được trong đa số thời gian nhưng không nhất thiết phải trong mọi thời gian. Chúng dùng các khái niệm được định nghĩa khá mơ hồ, như "độ tốt" hay "độ tương tự". Nhưng người ta có thể thắc mắc là tại sao các nguyên lý này vẫn vận hành được. Câu trả lời ở đây là, có lẽ, chúng biểu lộ sự tổ hợp của học hỏi và tiến hóa. Như Oscar Wilde đã từng nói: "Kinh nghiệm là cái tên mà mọi người đặt cho những sai lầm của mình". Con người đã "thực hành" sự cảm nhận trong nhiều thế hệ và thông qua vô số những đụng độ về cảm nhận họ đã học được những cái cần đoán trước. Mặc dù có những cái bất cập, nhưng các nguyên lý cấu trúc gốc vẫn rất hữu ích và chúng cung cấp cho ta câu trả lời nhanh. Khi bạn muốn tìm chìa khóa, trước hết bạn phải đi tới hai nơi bạn thường hay để nó và chỉ sau khi đã không tìm thấy, bạn mới phải tiến hành tìm kiếm một cách có hệ thống trong nhà.



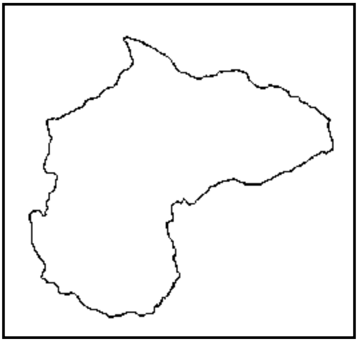
Hình 24

Nói chung, các lý thuyết tâm lý học hiện nay và các kết quả thực nghiệm đều khẳng định vai trò của đối xứng trong nhận thức. Nhiều thí nghiệm đã chứng tỏ rằng đối xứng hai bên đối với một trục thẳng đứng là dễ nhận dạng nhất (tức là nhận dạng nhanh nhất) và nó được khai thác như một tính chất chẩn đoán cho phán xét kiểu giống nhau-khác nhau. Về cơ bản, đối xứng là một tính chất bắt mắt trong những giai đoạn sớm của quá trình thị giác. Đối xứng cũng rất hữu ích để phân biệt các cơ thể sống (kể cả các thú săn mồi tiềm tàng) với các vật vô tri và trong sự lựa chọn bạn tình mong muốn (tôi sẽ còn quay trở lại các chủ đề này ở Chương 8). Những thực nghiệm khác đã chứng minh rằng các hình đối xứng dễ tái tạo hơn các hình bất đối xứng. Trong một nghiên cứu rất thú vị, hai nhà tâm lý học Jennifer Freyd và Barbara Tversky thuộc Đại học Stanford đã phát hiện ra rằng trong bước đầu tiên, những người tham gia thí nghiệm đã xác định rất nhanh có đối xứng tổng thể hay không. Sau đó, nếu hình được cảm nhận là có đối xứng tổng thể thì một số người trong số đó đã làm biến dạng hình ảnh trong óc họ và cho rằng (đôi khi là không đúng) nó có cả đối xứng về chi tiết nữa.

Một giả thiết rất hấp dẫn là sự thiên vị một số loại đối xứng có thể là một đặc tính do học hỏi nảy sinh từ những thí nghiệm của nhà tâm lý học Ioannis Paraskevopoulos thuộc Đại học Illinois. Đối tượng thí nghiệm của ông là 76 học sinh tiểu học. Ông đã phát hiện ra rằng đối xứng kép (phản xạ thẳng đứng và nằm ngang) được yêu thích hơn đối với lứa tuổi 6, đối xứng hai bên (chỉ phản xạ thẳng đứng thôi) đối với lứa tuổi 7 và đối xứng ngang (phản xạ ngang) đối với lứa tuổi 11.

Một số nghiên cứu thú vị nhất hiện nay là những nghiên cứu với ý định sử dụng sự tạo ảnh bằng cộng hưởng từ (MRI) để lập bản đồ các vùng trong não đáp ứng với đối xứng. Nhà tâm lý học Christopher W. Tyler thuộc Viện nghiên cứu mắt Smith-Kettlewell ở San Francisco đã giới thiệu cho những người tham gia thí nghiệm rất nhiều các hình mẫu đối xứng tịnh tiến và đối xứng phản xạ. Ông đã phát hiện ra rằng những kích thích này đã tạo ra sự kích hoạt một vùng của thùy chẩm, mà chức năng của nó hiện còn chưa rõ. Điều đáng ngạc nhiên là, người ta còn thấy một số vùng khác có những chức năng thị giác hẳn hoi lại rất ít hoặc không bị kích hoạt. Tyler kết luận rằng vùng chuyên môn hóa đó có nhiều khả năng đã mã hóa sự hiện diện của đối xứng trong lĩnh vực thị giác.

Mối liên hệ qua lại giữa đối xứng và định hướng cũng rất hấp dẫn. Các hình đối xứng không thay đổi khi quay, phản xạ hoặc tịnh tiến theo những cách nhất định. Tuy nhiên, nhiều hình không đối xứng đối với bất cứ phép biến đổi nào (trừ phép đồng nhất, không đụng chạm gì tới hình cả), và chúng ta cảm nhận chúng ra sao cũng bị ảnh hưởng nhất định, ví dụ, bởi sự định hướng của nó. Ví dụ, bạn hãy thử liếc nhanh hình 25 xem. Bạn có nhận ra đó là bản đồ châu Phi không? Hay không được quay quyển sách lộn ngược lại bạn có nhận ra ai trên hình 26 không?

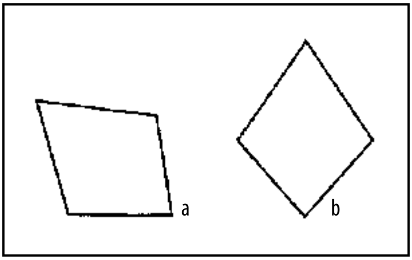


Hình 25

Hình 26

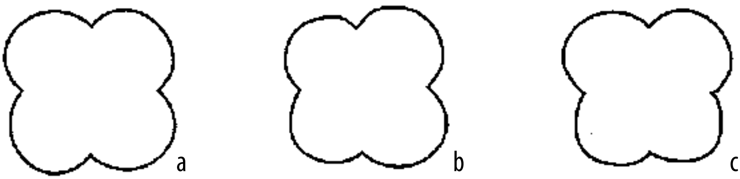
Ngay cả sự cảm nhận đối xứng cũng có thể phải khá khôn khéo. Một hình dạng có thể là đối xứng phản xạ đối với một trục nào đó, như trên hình 27a, chẳng hạn, nhưng nếu bạn không quay nó như trên hình 27b để trục đối xứng có phương thẳng đứng thì có thể sẽ không cảm nhận được đối xứng đó.

Nhà khoa học về nhận dạng Ivrin Rock thuộc Đại học Rutgers cùng các cộng sự đã tiến hành một loạt thí nghiệm được thiết kế để kiểm tra sự phụ thuộc của cảm nhận hình vào định hướng. Đặc biệt,



Hình 27

họ muốn kiểm tra sự cảm nhận đối xứng hai bên có phụ thuộc vào chuyện trục đối xứng có thực sự phải là thẳng đứng trong hình ảnh trên võng mạc hay là nó chỉ được cảm nhận như là thẳng đứng. Các nhà nghiên cứu đã sử dụng một hình dạng được thể hiện trên hình 28a, coi nó như dạng chuẩn. Hình này là đối xứng đối với cả phép phản xạ thẳng đứng và nằm ngang. Những người tham gia trắc nghiệm được yêu cầu hãy chỉ ra hình nào trong hai hình 28b và 28c là giống với hình 28a hơn. Lưu ý rằng hình 28b hơi bị thay đổi sao cho nó không còn là đối xứng đối với trục thẳng đứng nữa, nhưng vẫn còn giữ được đối xứng đối với trục nằm ngang. Điều ngược lại đã được làm với hình 28c. Khi những người tham gia trắc nghiệm quan sát các hình với đầu được giữ thật thẳng, thì phần lớn trong số họ đều chọn hình 28c. Đó cũng là điều mà các nhà nghiên cứu chờ đợi. Nhà vật lý và triết gia người Áo Ernst Mach (1838-1916) đã nhận xét từ năm 1914 rằng các hình được cảm nhận là đối xứng trước hết như là kết quả của đối xứng phản xạ đối với trục thẳng đứng. Tuy nhiên, ở đây xuất hiện một điều bất ngờ. Khi những người quan sát nghiêng



Hình 28

người một góc 45 độ, họ vẫn còn chọn hình 28c là hình giống với hình 28a hơn, mặc dù thực tế là trong định hướng đó thì cả hai hình 28b và 28c đều không còn là đối xứng thẳng đứng trong hình ảnh ở võng mạc nữa. Từ thí nghiệm này và những thí nghiệm khác, Rock đã rút ra kết luận rằng "đối với một hình mới thì ít có sự thay đổi về diện mạo khi chỉ có sự định hướng của hình ảnh trên võng mạc của nó là thay đổi". Rock đã phát hiện ra rằng cái thực sự quan trọng thậm chí phần nhiều không phải là sự định hướng hiện thời trong môi trường của nó, mà là thực tế chúng ta thường gán cho hình các hướng đỉnh, đáy, trái và phải. Những gán ghép đó lại thường phụ thuộc vào các manh mối thị giác khác, như hướng của trọng lực hay hệ quy chiếu môi trường xung quanh. Những hình không được định hướng đối với các hướng đó sẽ không dễ dàng được nhận ra. Thật thú vị là Rock đã phát hiện ra rằng tác động đến hình được cảm nhận là cực tiểu, khi sự thay đổi duy nhất được thực hiện là đảo ngược trái phải. Những kết quả này tiếp tục khẳng định tầm quan trọng hàng đầu của đối xứng hai bên trong nhận thức. Tuy nhiên, Rock đã thú nhận rằng một số hình dạng, như các chữ viết thảo hay các chân dung, sẽ trở nên khó nhận dạng hơn thậm chí khi chỉ có sự định hướng của hình ảnh trên võng mạc là thay đổi.

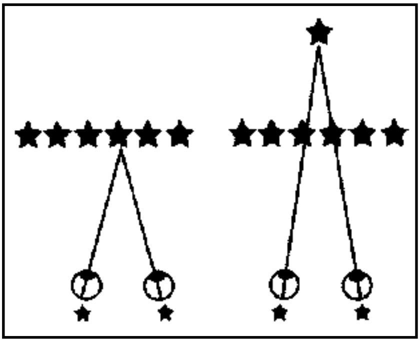
Trong khi đối xứng có tác dụng làm cho sự cảm nhận trong đa số trường hợp trở nên dễ dàng, thì có một loại đối xứng thực sự dụ dỗ mắt vào sự diễn giải sai lầm cái mà nó nhìn thấy. Nhà vật lý Scotland David Brewster (1781-1868), người cũng đã phát minh ra kính vạn hoa năm 1816, đã nhận thấy một điều gì đó hơi lạ khi nhìn chăm chú lên giấy dán tường có những hình mẫu đối xứng tịnh tiến. Sự phong phú và đa dạng các sản phẩm của Morris và các cộng sự và những người đương thời đã khiến cho các mẫu hình giấy dán tường đó tràn ngập khắp nơi thời Victoria. Rất ngạc nhiên, Brewster phát hiện ra rằng một số các bức vẽ này cứ như là "bật ra từ tường vậy" và trở thành những ảo giác ba chiều, mà ngày nay được gọi là *ảo giác giấy dán tường* hay *ảo giác cầu thang cuốn* bởi vì giấy dán tường và cầu thang cuốn đều có các hình mẫu lặp đi lặp lại. Bạn có thể đã quen với hiện tượng này từ nhiều cuốn sách Mắt Thần (*magic eye*). Sự đam mê các bức ảnh nổi do máy tính tạo ra – những hình mẫu chuyển thành ba chiều khi được nhìn bằng cách lé mắt – đã tạo ra một làn sóng cuồng ảnh nổi vào những năm 1990. Hình 29 minh họa một hiệu ứng khá bất ngờ. Nếu bạn chăm chú nhìn nó trong khoảng một phút dường như bạn đang tập trung nhìn vào một hình ảnh ở phía sau trang giấy, thì những người lướt sóng sẽ được hiện

Hình 29

lên một cách kỳ diệu như những thực thể ba chiều vậy. Vì những nguyên nhân còn chưa hoàn toàn rõ ràng, một số người không thể cảm nhận được các ảo giác do các bức ảnh nổi tạo ra. Vậy, nếu như hình 29 không bất ngờ có được chiều sâu đối với bạn thì cũng đừng thất vọng, vì bạn thuộc về một nhóm người đặc biệt mà.

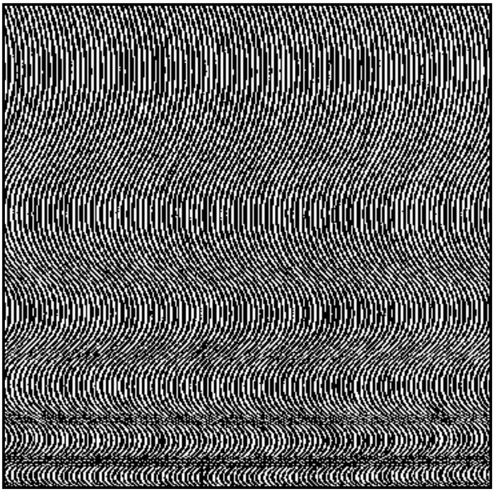
Ý tưởng đằng sau ảo ảnh Magic Eye bắt nguồn từ nghiên cứu cảm nhận chiều sâu của nhà tâm lý học người Mỹ gốc Hung Bella Julesz năm 1959. Một cộng sự của Julesz là nhà tâm lý học Christopher Tyler thuộc Viện nghiên cứu mắt Smith-Kettlewell, vào năm 1979 đã phát hiện ra rằng ông có thể dùng kỹ thuật in offset tạo ta được những bức ảnh lập thể một ảnh. Giải thích cơ bản cho sự thần kỳ của các hình mẫu lặp đi lặp lại này là khá đơn giản. Với mỗi một mắt nhìn cố định lên một thành phần khác nhau của một cặp kề nhau trong mẫu hình lặp đi lặp lại, não sẽ cảm nhận sai lầm cho rằng hai vật này như là một vật nhưng ở khoảng cách khác (hình 30). Nguyên nhân của "thất bại" này của não, tất nhiên, là thực tế rằng những motif lặp đi lặp lại tạo ra những hình ảnh đồng nhất trên hai võng mạc, tạo ra ấn tượng rằng một vật duy nhất nằm ở tiêu điểm.

Khi hình mẫu lặp đi lặp lại rất sít nhau và gồm những motif có độ tương phản cao, nó có thể tạo ra ảo giác rất mạnh về chuyển động. Họa sĩ Anh Bridget Riley đã làm sửng sốt nhiều người xem với hình mẫu gây hoang tưởng trong bức tranh *Thác* của bà (hình 31).



Hình 30

Ngoại trừ phép hoán vị và nguyên lý loại trừ Pauli ra, còn



Hình 31

thì tất cả các đối xứng được mô tả cho đến đây đều là những đối xứng của các dạng, các hình và các cấu hình. Chúng là những đối xứng của các vật trong không gian, được áp đặt bởi bố cục của các hệ cụ thể và được cảm nhận thông qua các giác quan. Chúng ta có thể *thấy* một nhà thờ có đối xứng hai bên, một thiết kế giấy dán tường có đối xứng tịnh tiến, và vòng tròn có đối xứng quay. Các đối xứng nằm sau những định luật cơ bản của tự nhiên là rất gần gũi với các đối xứng nói ở trên nhưng không tập trung vào những dạng và hình bên ngoài, mà tập trung vào câu hỏi: Có thể thực hiện những phép biến đổi nào đối với thế giới xung quanh chúng ta mà các định luật mô tả mọi hiện tượng được quan sát vẫn không thay đổi?

LUẬT CHƠI

Vậy các định luật của tự nhiên là gì? Nhà sinh học Thomas Henry Huxley (1825-1895), người bảo vệ học thuyết tiến hóa và chọn lọc tự nhiên của Darwin một cách nhiệt tình nhất, đã đưa ra lời giải thích sau:

> Bàn cờ là một thế giới, các quân cờ là các hiện tượng của vũ trụ, các luật chơi chính là cái mà chúng ta gọi là các định luật của tự nhiên. Người chơi phía bên kia là ẩn giấu đối với chúng ta. Chúng ta biết rằng người đó chơi rất trung thực, đúng mực và kiên nhẫn. Nhưng chúng ta cũng biết, với sự trả giá của chúng ta, rằng người đó không bao giờ để lọt một sai lầm nào, hoặc không bao giờ mảy may chiếu cố cho sự ngu dốt.

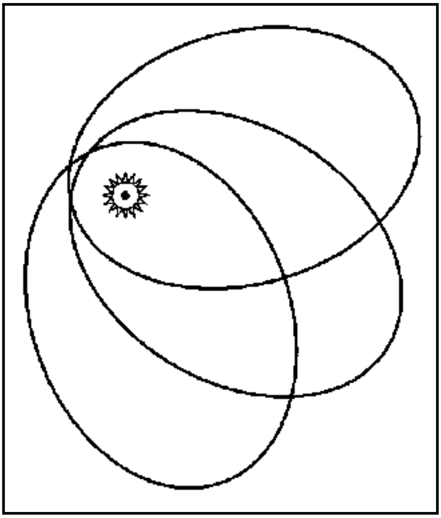
Định nghĩa này, của người có biệt danh là "kẻ bảo vệ trung thành của Darwin", là thiếu tham vọng theo các tiêu chuẩn hiện đại. Các nhà vật lý ngày nay muốn các định luật của tự nhiên không chỉ thể hiện luật chơi mà còn giải thích được thậm chí cả sự tồn tại của các tính chất của bàn cờ và của chính những quân cờ nữa!

Không phải đến tận thế kỷ 17 con người thậm chí mới mơ tới khả năng tồn tại một bộ các định luật có thể giải thích được vạn vật. Galileo Galilei (1564-1642), René Descartes (1596-1650) và đặc biệt là Isaac Newton (1642-1727) lần đầu tiên đã chứng minh rằng một số ít các định luật (như các định luật về chuyển động và hấp dẫn) có thể giải thích được rất nhiều các hiện tượng, từ quả táo rơi và thủy triều trên bãi biển cho tới chuyển động của các hành tinh.

Nhiều người khác đã đi theo các bước chân khổng lồ của họ. Năm 1873, nhà vật lý người Scotland James Clerk Maxwell (1831-1879) đã cho xuất bản tác phẩm *Khảo luận về điện và từ* - một công trình đồ sộ thống nhất tất cả các hiện tượng điện, từ và ánh sáng chỉ bằng bốn phương trình toán học. Xây dựng trên các kết quả thực nghiệm của nhà vật lý người Anh Michael Faraday (1791-1867), Maxwell đã chứng minh được rằng cũng giống như lực giữ các hành tinh trên các quỹ đạo của chúng xung quanh Mặt Trời và lực giữ các vật trên mặt Trái Đất thực chất chỉ là một, điện và từ cũng đơn giản chỉ là những biểu hiện khác nhau của một thực thể vật lý duy nhất. Thế kỷ 20 đã chứng kiến sự ra đời của không phải một mà là hai cuộc cách mạng khoa học lớn. Thứ nhất, các lý thuyết tương đối hẹp và rộng của Einstein đã làm thay đổi vĩnh viễn ý nghĩa của không gian và thời gian. Hai khái niệm này đã trở thành liên kết khăng khít với nhau trong một thực thể mà ngày nay gọi là *không-thời gian*. Thuyết tương đối rộng cũng gợi ý rằng lực hấp dẫn, tác dụng trên khoảng cách, không phải là lực thần bí gì mà đó chẳng qua chỉ là một biểu hiện của không-thời gian bị uốn cong do vật chất, giống như một tấm cao su bị trũng xuống dưới tác dụng của sức nặng quả đạn súng thần công. Mọi thứ chuyển động qua không gian cong này – như các hành tinh trong hành trình của chúng – đều không đi theo đường thẳng mà theo các quỹ đạo cong. Thứ hai, trên một trận tuyến khác, mọi hy vọng về một thế giới hoàn toàn xác định đã vỡ tan tành với sự xuất hiện của *cơ học lượng tử*. Trong cơ học Newton và thậm chí cả trong thuyết tương đối rộng, nếu bằng một cách nào đó, bạn biết được vị trí của mỗi hạt riêng rẽ trong vũ trụ ở một thời điểm đã cho, và biết nó chuyển động nhanh như thế nào và theo hướng nào tại thời điểm đó, thì bạn có thể tiên đoán một cách dứt khoát tương lai của vũ trụ và kể lại được toàn bộ câu chuyện về lịch sử trước đó của nó. Những hạn chế duy nhất ở đây gắn liền với những hoàn cảnh rất hiếm hoi mà ở đó thuyết tương đối rộng không còn đúng nữa, như trong trường hợp các ngôi sao bị co sập lại thành cái được gọi là lỗ đen. Cơ học lượng tử đã làm thay đổi tất cả. Ngay cả vị trí và vận tốc của một hạt riêng rẽ cũng không thể được xác định đồng thời chính xác. Điều duy nhất về vũ trụ là tất định, đó là xác suất của những kết cục khác nhau, chứ không phải bản thân những kết cục đó. Mặc dù vì những nguyên nhân khác, nhưng vũ trụ khá giống với thời tiết – điều tốt nhất ta có thể làm được là tiên đoán xác suất để ngày mai sẽ mưa, chứ không phải trời có thực sự mưa hay không. Tức là Chúa có chơi trò xúc xắc.

Với mỗi một bước tiến tới các cuộc cách mạng của thuyết tương đối và cơ học lượng tử, vai trò của đối xứng trong các định luật của tự nhiên lại được đánh giá cao hơn. Các nhà vật lý không còn hài lòng với việc tìm cách giải thích các hiện tượng riêng rẽ nữa, mà thay vì thế, giờ đây họ ngày càng tin rằng tự nhiên có một bản thiết kế nằm bên dưới nó mà trong đó đối xứng là một yếu tố then chốt. Đối xứng của một định luật có nghĩa là khi chúng ta quan sát các hiện tượng tự nhiên từ các điểm nhìn khác nhau, chúng ta sẽ phát hiện ra rằng các hiện tượng này được chi phối chính xác bởi cùng các định luật của tự nhiên. Ví dụ, dù bạn thực hiện các thí nghiệm ở New York, Tokyo hay ở mép bên kia của Ngân Hà, thì các định luật của tự nhiên giải thích kết quả của các thí nghiệm đó sẽ có cùng một dạng. Lưu ý rằng đối xứng của các định luật không hề ngụ ý rằng bản thân các kết quả của những thí nghiệm đó nhất thiết phải không thay đổi. Cường độ lực hấp dẫn ở Mặt Trăng là khác so với ở Trái Đất, và do đó các nhà du hành vũ trụ lên Mặt Trăng nhảy được cao hơn so với họ nhảy trên mặt đất. Tuy nhiên, sự phụ thuộc của cường độ lực hấp dẫn vào khối lượng và bán kính của Mặt Trăng thì giống hệt như sự phụ thuộc của lực hấp dẫn của Trái Đất vào khối lượng và bán kính của nó. Đối xứng này của các định luật – sự không thay đổi khi dịch chuyển từ nơi này đến nơi khác – chính là đối xứng tịnh tiến. Không có tính đối xứng qua phép tịnh tiến này thì chúng ta thực sự không thể hiểu được vũ trụ. Nguyên nhân chính để chúng ta có thể giải thích được tương đối dễ dàng những quan sát về các thiên hà ở cách xa hàng tỷ năm ánh sáng là chúng ta tìm thấy các nguyên tử hydrogen ở đấy cũng tuân theo đúng các định luật của cơ học lượng tử như ở trên Trái Đất.

Các định luật của tự nhiên cũng đối xứng đối với phép quay. Vật lý không thiên về đâu trong không gian – chúng ta phát hiện ra cùng các định luật bất kể chúng ta thực hiện thí nghiệm đứng thẳng hay nghiêng theo bất cứ cách nào hoặc chúng ta đo các hướng bất kể đối với hướng lên trên, xuống dưới, hướng Bắc hay hướng Tây-Nam. Điều này ít mang tính trực giác hơn ta tưởng. Hãy nhớ rằng đối với các sinh vật tiến hóa trên bề mặt Trái Đất, có một sự phân biệt rõ ràng giữa trên và dưới. Aristotle và những môn đệ của ông đã từng nghĩ rằng sở dĩ các vật rơi xuống dưới là vì đó là chỗ tự nhiên của các vật nặng. Tất nhiên, Newton đã hiểu rõ rằng trên và dưới dường như khác nhau đối với chúng ta không phải bởi vì các định luật vật lý phụ thuộc vào các hướng đó mà là bởi vì chúng ta cảm thấy lực hút hấp dẫn của cái khối lượng khổng lồ là Trái Đất nằm dưới chân chúng ta. Đó là sự thay đổi của môi trường chứ không phải trong định luật. Và chúng ta quả thật là may mắn, vì các đối xứng đối với phép tịnh tiến và phép quay đã đảm bảo rằng bất kể chúng ta ở đâu trong không gian, hoặc chúng ta định hướng như thế nào, chúng ta đều phát minh ra cùng các định luật như nhau.



Hình 32

Một ví dụ đơn giản có thể giúp ta làm sáng rõ hơn nữa sự khác nhau giữa đối xứng của các hình dạng và đối xứng của các định luật. Những người cổ Hy Lạp nghĩ rằng quỹ đạo của các hành tinh phải là tròn, vì hình đó đối xứng đối với phép quay một góc bất kỳ. Thay vì thế, đối xứng của định luật vạn vật hấp dẫn của Newton đối với phép quay lại có nghĩa rằng các quỹ đạo này có thể có định hướng bất kỳ trong không gian (hình 32). Những quỹ đạo này không cần phải tròn, nó có thể là, và thực tế đã là, các elip.

Cũng tồn tại những đối xứng khác, xa lạ hơn, làm cho các định luật của tự nhiên bất biến, và chúng ta sẽ quay trở lại với một số đối xứng này và những hệ quả quan trọng của chúng ở Chương 7. Tuy nhiên, điểm then chốt cần ghi nhớ là: đối xứng là một trong những công cụ quan trọng nhất để giải mã bản thiết kế của tự nhiên.

Cho đến đây, sự xem xét nhanh các đối xứng, bất kể là đối xứng của các vật hay của các định luật tự nhiên, mới chỉ là thoáng qua như các du khách ở nước ngoài vậy. Chúng ta có thể được ngắm nghía các danh lam thắng cảnh nhưng để có một hiểu biết sâu sắc hơn về văn hóa, chúng ta cần phải học ngôn ngữ ở đó đã. Và giờ chính là lúc để chúng ta theo học một lớp cấp tốc.

MẸ ĐẺ CỦA MỌI ĐỐI XỨNG

Ngay cả khi nhìn thoáng qua thế giới các đối xứng chúng ta có thể thấy rõ như ban ngày rằng đối xứng nằm ngay chính ở chỗ giao nhau của khoa học, nghệ thuật và tâm lý học nhận thức. Đối xứng biểu hiện những cái lõi ương bướng của các hình, các định luật và các đối tượng toán học bất biến đối với các phép biến đổi. Ngôn ngữ mô tả đối xứng cần phải nhận dạng ra những cái lõi bất biến này, ngay cả khi chúng được ngụy trang dưới những cái mặt nạ rất kín đáo.

Ví dụ, ngôn ngữ của thế giới tài chính là ngôn ngữ của các phép tính số học. Nếu bạn muốn, bằng cái nhìn thoáng qua, so sánh sức mạnh kinh tế của hai công ty, bạn không cần phải đọc các tập tài liệu dày cộp, mà chỉ cần so sánh một số con số then chốt thôi là đủ. Khi Newton phát biểu các định luật nổi tiếng của ông về chuyển động, ông cũng tự phát triển ngay ngôn ngữ toán giải tích để diễn đạt và vận dụng những định luật đó. Người ta còn cho rằng một trong những thành tựu của nghệ thuật trừu tượng và phi đối tượng là sự biến đổi màu sắc thành ngôn ngữ của ý nghĩa và xúc cảm. Một số họa sĩ đã vứt bỏ việc sử dụng hình và các yếu tố thị giác khác để chỉ dành hoàn toàn cho sự truyền đạt bằng màu sắc thôi.

Để khám phá cái mê cung của đối xứng, các nhà toán học, khoa học và các nghệ sĩ đã soi rọi con đường của họ bằng ngôn ngữ của *lý thuyết nhóm*. Giống như các câu lạc bộ đặc thù, một *nhóm* toán học được đặc trưng bởi các thành viên (phần tử) phải tuân theo một số quy tắc nhất định. Một *tập hợp* (thường gọi tắt là *tập*) toán học là bộ bất kỳ các thực thể, bất kể đó là các cấu phần của chiếc máy bay được tháo tung ra hay các chữ cái trong bản chữ cái Hebrew hay một mớ kỳ quặc gồm cái tai của van Gogh, con thỏ của Easter, toàn bộ các tờ báo của Albania, và thời tiết trên Hỏa tinh. Trái lại, một *nhóm* là một tập hợp cần tuân theo một số quy tắc nhất định đối với một phép toán nào đó. Ví dụ, một trong số những nhóm quen thuộc nhất gồm tất cả các số nguyên (dương, âm và số 0; cụ thể là:..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...) kết hợp với phép cộng đơn giản của số học.

Các tính chất định nghĩa nên một nhóm là:

1. *Tính đóng.* Kết quả của hai phần tử tổ hợp với nhau qua phép toán cũng phải là một phần tử của nhóm. Trong nhóm các số

nguyên, tổng của hai số nguyên cũng là một số nguyên (ví dụ, $3+5=8$).

2. *Tính kết hợp.* Phép toán cần có tính kết hợp, tức là khi tổ hợp (bằng phép toán) ba phần tử theo trật tự, bạn có thể tổ hợp hai phần tử nào là trước cũng được, kết quả thu được vẫn như thế, chứ không bị ảnh hưởng của cách đặt dấu ngoặc. Ví dụ, phép cộng là kết hợp: $(5+7)+13=25$ và $5+(7+13)=25$, ở đây các dấu ngoặc trong toán học cho biết bạn phải cộng cặp nào trước.

3. *Phần tử đồng nhất (hay phần tử đơn điệu).* Nhóm có chứa một phần tử đồng nhất sao cho khi tổ hợp nó (qua phép tính) với một phần tử bất kỳ thì phần tử đó không thay đổi, tức là kết quả lại là chính phần tử đó. Trong nhóm các số nguyên, phần tử đồng nhất là số 0. Ví dụ: $0+3=3+0=3$.

4. *Phần tử nghịch đảo.* Đối với mỗi phần tử trong nhóm đều tồn tại một phần tử nghịch đảo. Khi một phần tử bất kỳ tổ hợp với phần tử nghịch đảo của nó (qua phép tính) sẽ cho kết quả là phần tử đồng nhất. Đối với số nguyên phần tử nghịch đảo là số đối của nó: ví dụ, nghịch đảo của 4 là -4 và nghịch đảo của -4 là 4, vì $4+(-4)=0$ và $(-4)+4=0$.

Việc định nghĩa đơn giản này dẫn tới một lý thuyết có thể bao quát và thống nhất mọi đối xứng của thế giới chúng ta vẫn tiếp tục còn làm kinh ngạc ngay cả các nhà toán học. Như nhà hình học lớn người Anh Henry Frederick Baker (1866-1956) đã từng nói: "Cả một kho báu quý giá, cả một tầm cỡ tư tưởng lại nảy sinh từ những sự bắt đầu nhẹ nhàng đến thế". Lý thuyết nhóm đã được một học giả nổi tiếng về toán học James R. Newman gọi là "nghệ thuật tột bậc của trừu tượng toán học". Sức mạnh không thể tưởng tượng nổi của lý thuyết nhóm chính là do sự linh hoạt mà định nghĩa của nó mang lại. Như chúng ta sẽ thấy ở sau, trong cuốn sách này, các phần tử của nhóm có thể là bất cứ thứ gì từ những đối xứng của các hạt sơ cấp trong vũ trụ hay những lần xáo khác nhau của bộ bài tới đối xứng của các tam giác đều. Phép toán giữa các phần tử có thể là cái gì đó tầm thường như là phép cộng của số học (như trong ví dụ trên) hay phức tạp hơn, như phép "tiếp sau bởi" đối với phép toán của hai phép biến đổi đối xứng (ví như phép quay một góc được tiếp sau bởi phép quay một góc khác).

Lý thuyết nhóm giải thích điều gì sẽ xảy ra khi các phép biến đổi khác nhau, như phép quay và phép phản xạ, chẳng hạn, được áp dụng liên tiếp lên một đối tượng cụ thể, hay khi một phép toán cụ thể (như phép cộng) làm xáo trộn các đối tượng khác nhau (như các số nguyên) với nhau. Loại phân tích này sẽ phơi bày những cấu trúc cơ bản nhất của toán học. Do đó, khi các nhà phân tích thị trường chứng khoán hay các nhà vật lý hạt cơ bản đụng phải những cái dường như khó khăn không thể vượt qua trong việc nhận dạng các hình mẫu, họ thường dùng hình thức luận lý thuyết nhóm để bắc cầu vào những lĩnh vực khác nhằm vay mượn các công cụ đã được phát triển ở đó để giải các bài toán tương tự.

Để có được một hình dung đại khái về mối quan hệ giữa lý thuyết nhóm và các đối xứng, ta hãy bắt đầu từ một trường hợp đơn giản về đối xứng của thân thể con người. Con người hầu như không thay đổi đối với chỉ hai phép biến đổi đối xứng. Một là phép đồng nhất để cho vật y nguyên như nó vốn là và do đó là một đối xứng chính xác. Thứ hai là phép phản xạ qua mặt phẳng thẳng đứng – đây là đối xứng hai bên (nhưng chỉ là gần đúng thôi). Ta sẽ dùng *I* để ký hiệu phép biến đổi đồng nhất và r để ký hiệu phép phản xạ. Vậy tập hợp tất cả các phép biến đổi đối xứng của hình thể con người do đó chỉ gồm hai phần tử: I và r. Vậy điều gì sẽ xảy ra khi ta áp dụng liên tiếp hai phép biến đổi này? Phép phản xạ được tiếp sau bởi phép đồng nhất không khác gì với việc áp dụng chỉ một phép phản xạ. Để ký hiệu, ta có thể biểu diễn điều đó như sau: $I \circ r = r$, trong đó dấu $\circ$ ký hiệu cho cụm từ "tiếp sau bởi". Lưu ý rằng trật tự luôn được viết sao cho ký hiệu đầu tiên ở bên phải là phép biến đổi được áp dụng đầu tiên, và cứ thế lần lượt tiếp theo. Do đó $a \circ b \circ c$ có nghĩa là c sẽ áp dụng đầu tiên, sau đó đến b rồi đến a. Áp dụng hai phép phản xạ liên tiếp sẽ đưa hình thể người về dạng ban đầu, vì phép phản xạ đầu tiên tráo đổi trái và phải và phép thứ hai lại tráo đổi chúng trở lại. Do đó, áp dụng r tiếp theo r sẽ cho kết quả y hệt như áp dụng phép đồng nhất I vậy: $r \circ r = I$.

Bây giờ chúng ta có thể xây dựng một bảng giống như bảng nhân đối với hai phép đối xứng, trong đó ô nằm ở hàng I và cột r là $I \circ r$ và v.v... Từ *nhân* ở đây được dùng hơi phóng khoáng để biểu diễn phép toán giữa hai phép biến đổi (trong trường hợp này là "tiếp sau bởi":

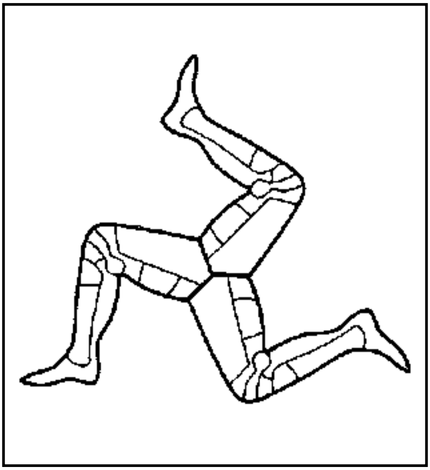
$\circ$	I	r
I	I	r
r	r	I

Bảng nhân này phát lộ một sự thật quan trọng: *Tập hợp tất cả các phép biến đổi đối xứng của hình thể con người tạo nên một nhóm*! Ta hãy kiểm tra để thấy rằng tất cả những tính chất định nghĩa của nhóm đều thực sự được thỏa mãn:

1. *Tính đóng*. Bảng nhân chứng tỏ rằng tổ hợp của hai phép biến đổi đối xứng bất kỳ bởi phép toán "tiếp sau bởi" cũng là một

phép biến đổi đối xứng. Suy nghĩ một chút bạn sẽ thấy điều này chẳng có gì đáng ngạc nhiên cả, bởi vì mỗi một trong hai phép biến đổi này đều làm cho hình không thay đổi, vậy áp dụng tổ hợp cả hai cũng sẽ làm như vậy.

2. *Tính kết hợp*. Điều này rõ ràng là được thỏa mãn, bởi vì nó đúng với ba phép biến đổi bất kỳ thuộc loại này được tổ hợp bởi phép toán "tiếp sau bởi". Thực vậy, khi ta áp dụng, chẳng hạn như I∘r∘r, ta thấy sẽ hoàn toàn không có sự khác biệt nào nếu ta đặt các dấu ngoặc vào.
3. *Phần tử đồng nhất.* Phần tử đồng nhất ở đây là phép biến đổi đồng nhất I.
4. *Phép nghịch đảo.* Bảng nhân cho thấy rằng mỗi phép biến đổi đồng nhất và phép biến đổi phản xạ là phần tử nghịch đảo của chính mình, bởi vì khi áp dụng phép biến đổi đó hai lần ta sẽ nhận được phép biến đổi đồng nhất.



Hình 33

Nhóm các đối xứng của cơ thể con người chỉ chứa hai phần tử, nhưng sự gắn kết giữa đối xứng và lý thuyết nhóm là sự gắn kết rất mạnh. Để chọn một ví dụ hơi phức tạp hơn một chút, ta hãy xét hình ba cẳng chân đang chạy trên hình 33. Đó chính là biểu tượng của Đảo Người (*Isle of Man*) thuộc Anh trên biển Ireland.

Hình này có đúng 3 phép biến đổi đối xứng: (1) phép quay 120 độ xung quanh tâm; (2) phép quay 240 độ và (3) phép đồng nhất (tức là phép quay 360 độ). Chú ý rằng hình này không đối xứng với bất kỳ phép phản xạ nào, bởi vì phép phản xạ sẽ làm cho các chân chỉ sai. Bây giờ ta ký hiệu phép quay 120 độ là a, phép quay 240 độ là b và phép đồng nhất là I và lại xem điều gì sẽ xảy ra khi ta tổ hợp các phép biến đổi đối xứng qua phép toán "tiếp sau bởi" (ký hiệu bằng dấu $\circ$). Nếu ta quay 120 độ rồi lại quay 120 độ nữa, ta sẽ nhận được phép quay 240 độ; nghĩa là $a \circ a = b$. Tương tự, nếu ta quay hai lần góc 240 độ, thì kết quả cũng như là ta quay 120 độ vì 480 độ gồm một vòng quay trọn vẹn (360 độ = đồng nhất) cộng với 120 độ. Do đó, ta có $b \circ b = a$. Cuối cùng, phép quay 120 độ và tiếp sau bởi phép quay 240 độ (nghĩa là quay một vòng trọn vẹn), kết quả ta được phép quay 360 độ, hay phép đồng nhất: $b \circ a = a \circ b = I$. Giờ ta có bảng nhân tương ứng sau:

$\circ$	I	a	b
I	I	a	b
a	a	b	I
b	b	I	a

Chúng ta thấy rằng tập các phép biến đổi của biểu tượng ba cái chân chạy này cũng lập nên một nhóm. Bảng nhân chứng tỏ tính đóng, và các phép biến đổi a và b là nghịch đảo của nhau, vì áp dụng phép biến đổi này tiếp sau phép biến đổi kia đều cho phép biến đổi đồng nhất.

Bạn có thể đã bắt đầu nhận ra rằng các nhóm xuất hiện ở bất cứ chỗ nào có đối xứng. Thực tế, *tập hợp tất cả các phép biến đổi đối xứng của một hệ bất kỳ luôn luôn lập nên một nhóm*. Điều này có thể hiểu được một cách dễ dàng. Nếu *A* là một phép đối xứng tức là việc áp dụng nó sẽ làm cho hệ không đổi, và *B* là một phép biến đổi khác, thì rõ ràng $A \circ B$ (*A* tiến sau *B*) cũng sẽ có tính chất như vậy. Cũng thế, mỗi phép biến đổi đều có một nghịch đảo đưa hệ trở về trạng thái ban đầu. Như chúng ta sẽ thấy trong suốt cuốn sách này, sức mạnh thống nhất của lý thuyết nhóm to lớn tới mức nhà lịch sử toán học Eric Temple Bell (1883-1960) đã từng bình luận: "Bất cứ nơi nào các nhóm tự bộc lộ hay được đưa vào, thì sự đơn giản sẽ được kết tinh từ đống hỗn độn".

Tuy nhiên, không giống như phần lớn các phát minh toán học, không ai đi tìm kiếm lý thuyết nhóm hay thậm chí lý thuyết của đối xứng cả khi khái niệm này được phát minh ra. Mà hoàn toàn trái lại, lý thuyết nhóm xuất hiện một cách hơi bất ngờ, từ cuộc tìm kiếm nghiệm của một phương trình đại số kéo dài cả thiên niên kỷ. Đúng như sự mô tả nó là khái niệm kết tinh sự đơn giản từ hỗn độn, lý thuyết nhóm bản thân nó tự sinh ra từ một trong những câu chuyện sục sôi nhất trong lịch sử toán học. Hầu như bốn ngàn năm của sự tò mò và vật lộn trí tuệ, cộng với âm mưu, nghèo khổ và ngược đãi đã tích tụ để tạo ra lý thuyết này ở thế kỷ 19. Câu chuyện kỳ lạ này sẽ được trình bày theo trình tự thời gian trong ba chương sau, bắt đầu từ buổi bình minh của toán học trên hai bờ sông Nile và sông Euphrates.

III

Khi say sưa với các phương trình của bạn, đừng bao giờ quên điều này

Trong bài nói chuyện nhan đề "Khoa học và Hạnh phúc" của mình tại Học viện Công nghệ California vào ngày 16 tháng 2 năm 1931, Albert Einstein đã nhận xét: "Mối quan tâm đối với bản thân con người và số phận của nó phải là mục tiêu chủ yếu của mọi nỗ lực công nghệ... để những sáng tạo của trí óc chúng ta sẽ là lời chúc phúc chứ không phải là tai họa đối với loài người. Đừng bao giờ quên điều này ở giữa những sơ đồ và phương trình của các bạn". Bản thân Einstein cũng không thể hình dung nổi, chưa đầy một thập niên sau, lời cảnh báo đó đã trở thành tiên tri như thế nào, trong những ngày đen tối của Thế chiến Thứ hai và trong những nỗi kinh hoàng của sự hủy diệt con người. Tuy nhiên, lịch sử của các phương trình toán học đã khởi đầu chỉ với ý nghĩ vì lợi ích của con người ở trong đầu. Những người giải phương trình đầu tiên chẳng có mưu toan gì hơn là phục vụ những nhu cầu cụ thể hàng ngày.

“US” VÀ “AHA”

Vào khoảng thiên niên kỷ thứ tư trước Công nguyên, những cộng đồng thị dân người Sumer đầu tiên đã xuất hiện ở Lưỡng Hà, vùng đất giữa hai con sông Tigris và Euphrates. Gần một nửa triệu các tấm đất sét có khắc các ký tự hình nêm và những đồ tạo tác khảo cổ khác được tìm thấy ở vùng này đã kể cho chúng ta biết câu chuyện về một xã hội với nền nông nghiệp có tổ chức, nền kiến trúc rất có ấn tượng cùng với lịch sử văn hóa và chính trị rất rực rỡ. Thời đó, cũng như ngày hôm nay, mảnh đất trù phú này thường là miếng mồi ngon cho những cuộc xâm lăng từ mọi hướng. Và kết quả là tầng lớp cai trị thường xuyên thay đổi. Một ít thế kỷ sau khi thất thủ trước vị vua người Akkad là Sargon I (khoảng 2276-2221 trước CN), người Armorite đã chiếm vùng đất Sumer và thiết lập thủ đô của họ ở thành phố thương mại Babylon. Do đó, văn hóa của toàn bộ vùng này giữa những năm 2000 và 600 trước Công nguyên thường được gọi là văn hóa “Babylon”. Xã hội Babylon phát triển nhanh đòi hỏi phải có rất nhiều những ghi chép về cung cấp và phân phối hàng hóa. Các công cụ tính toán cũng cần thiết cho những giao dịch buôn bán, cho những dự án nông nghiệp có liên quan tới sự phân lô và lập di chúc. Nhằm mục đích đó, người Babylon đã phát triển một nền toán học phức tạp nhất vào thời gian đó. Các văn bản còn ghi lại trên các tấm đất sét chứng tỏ rằng người Babylon không chỉ nắm vững những tính toán số học mà còn biết dùng trước môn đại số tiên tiến hơn. Ở đây tôi sẽ chỉ tập trung vào sự xuất hiện của các “phương trình” vì đó là phần quan yếu nhất đối với lịch sử của lý thuyết nhóm. Lý do để tôi đặt chữ *phương trình* trong dấu nháy là ở chỗ người Babylon không thực sự dùng khái niệm phương trình đại số theo cách như chúng ta ngày hôm nay. Thực tế, họ phát biểu các bài toán và giải chúng bằng lời, theo ngôn ngữ thảo luận hàng ngày. Nói một cách khác, hết bài toán này đến bài toán khác được giải theo những chỉ dẫn chính xác bằng lời, nhưng không có hình mẫu hay công thức nào được nhận dạng như một thủ tục tổng quát.

Khá chắc chắn rằng những bài toán toán học này lần đầu tiên xuất hiện trong bối cảnh nhu cầu xã hội cần phân chia các lô đất. Những từ được dùng cho các đại lượng ẩn số mà người ta cần để giải là *us* (chiều dài), *sag* (bề rộng) và *asa* (diện tích) ngay cả khi chẳng có liên quan gì đến đo lường.

Phương trình đơn giản nhất có thể phát biểu là những phương trình gọi là *tuyến tính* (hay bậc nhất) – nó được biểu diễn bằng một đường thẳng khi vẽ đồ thị. Theo ký hiệu hiện đại thì đó là những phương trình loại $2x+3=7$, trong đó ẩn số là x. Giải phương trình có nghĩa là tìm một giá trị của x mà đối với nó phương trình được nghiệm đúng (trong ví dụ trên nghiệm là $x=2$, vì $2\times 2+3=7$). Một số tấm bảng đất sét có chứa các bài toán cần phải được giải bằng cách dùng phương trình tuyến tính.

Đôi khi để tìm lời giải, người ta phải giải để tìm giá trị của hai ẩn số. Chẳng hạn, trong một bài toán cần phải tìm giá trị chiều rộng và chiều dài, nếu biết rằng một phần tư của chiều rộng cộng với chiều dài bằng 7 *tay* (một đơn vị chiều dài), và chiều dài cộng với chiều rộng là 10 *tay*. Bằng cách dùng đại số chúng ta đã học ở nhà trường, nếu ký hiệu chiều dài là x và chiều rộng là y thì bài toán này có thể được dịch ra thành hai phương trình tuyến tính: $\frac{1}{4}y+x=7$ và $x+y=10$. Các viên thư lại đã nhận xét đúng rằng chiều dài là 6 tay (hay 30 *ngón tay*, 1 tay bằng 5 ngón tay) và chiều rộng là 4 tay (20 ngón tay) sẽ thỏa mãn hai phương trình trên (trong Phụ lục 2, tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc quan tâm một bản ghi nhớ cách giải những hệ phương trình như vậy).

Phương trình tuyến tính còn được đề cao hơn thậm chí nổi bật hơn trong toán học cổ Ai Cập. Rõ ràng người Babylon thấy chúng quá ư là sơ cấp nên không đáng ghi chép lại một cách chi tiết. Rất nhiều hiểu biết của chúng ta về toán học Ai Cập là nhờ tấm giấy cói Ahmes (*Ahmes Papyrus*) đầy ma lực. Tấm giấy này (dài khoảng 5,5m) hiện đang được giữ ở Bảo tàng Anh (trừ một số ít mảnh được bất ngờ phát hiện trong một tập các giấy tờ về y tế hiện được giữ ở Bảo tàng Brooklyn). Tờ giấy cói này đã được nhà Ai Cập học người Scotland Alexander Henry Rhind mua được vào năm 1858 và sau đó nó thường được gọi là Tờ giấy cói của Rhind (*Rhind Papyrus*) (xem hình 34). Theo lời chứng của viên thư lại Ahmes thì ông ta đã chép lại tờ giấy này vào năm 1650 trước Công nguyên từ một văn bản gốc được viết khoảng vài trăm năm trước đó (dưới thời trị vì của Vua Ammenemes III thuộc Triều đại thứ 12). Tờ giấy cói, theo lời mô tả của nhà khoa học Anh D'Arcy Thompson, là "một trong những chứng

Hình 34

tích về kiến thức thời cổ đại", nó chứa tới 87 bài toán. Trước đó là một bảng các "bí quyết" về việc phân chia và một lời giới thiệu. Lời giới thiệu mô tả tài liệu này một cách hơi khoa trương như là "Lối vào kho tri thức về mọi thứ tồn tại và mọi bí mật mờ ám". Mặt khác, những bài toán mà Ahmes giới thiệu và giải đều liên quan chủ yếu tới những vấn đề có tính thực hành từ sự phân chia các ổ bánh mì cho tới độ dốc của kim tự tháp. Ẩn số thì được gọi là *aha*, nghĩa là "đống". Ví dụ bài toán 26 yêu cầu tìm giá trị của *aha*, nếu *aha* cộng với một phần tư của nó bằng 15. Trong ký hiệu hiện đại, ta có phương trình sau $x + \frac{1}{4}x = 15$. Đáp số $x = 12$ đúng như Ahmes đã tìm được.

Không phải tất cả các bài toán trong tờ giấy cói Ahmes đều đáp ứng những vấn đề bức bách của thời đó. Một số rõ ràng là được đưa vào như những bài tập cho học sinh, và ít nhất có một bài được chọn thuần túy là do vẻ hấp dẫn của nó. Bài 19 là: "7 nhà, 49 con mèo, 343 con chuột, 2401 bông lúa mạch, 16807 đấu (*hekat*) hạt, tổng cộng là 19607". Hiển nhiên, Ahmes tinh quái mô tả ở đây một câu đố, trong đó mỗi một nhà có 7 còn mèo, mỗi con mèo ăn 7 con chuột, mỗi con chuột ăn 7 bông lúa mạch và mỗi bông lúa mạch sản xuất ra được 7 *hekat* hạt. Ẩn số cần tìm ở đây là tổng cộng, tức tổng các ngôi nhà, các con mèo, các con chuột, các bao lúa mạch và các hekat hạt rõ ràng là không có ý nghĩa thực tiễn. Nhiều người cho rằng bài toán cổ nát óc này trong nhiều thế kỷ đã được biến tướng thành hai câu đố khác đã biết. Năm 1202, nhà toán học Italia nổi tiếng Leonardo xứ Pisa (biệt danh là Fibonacci, sống khoảng 1170-1240) đã cho xuất bản quyển sách của ông nhan đề *Liber abaci* (Sách về tính toán). Trong cuốn sách này ông đã đưa ra bài toán: "7 bà già đi tới Roma, mỗi bà có 7 con la. Trên mỗi con la có 7 túi đồ, trong mỗi túi đồ có 7 ổ bánh mì, mỗi ổ bánh mì lại có 7 con dao và mỗi con dao lại có 7 cái bao. Tìm tổng số tất cả các thứ đó".

Nửa thiên niên kỷ sau đó, trong cuốn sách *Mẹ Ngỗng* tập hợp các bài hát ru vào thế kỷ 18, chúng ta tìm thấy có bài

Khi tôi đi tới St. Ives,
Tôi gặp một người có 7 vợ,
Mỗi người vợ có 7 cái túi,
Mỗi cái túi có 7 con mèo,
Mỗi con mèo có 7 con mèo con;
Mèo con, mèo mẹ, túi và các bà vợ
Hỏi cả thảy có bao nhiêu cùng tới St. Ives.

Liệu có phải bài ru con này thực sự đã lấy cảm hứng từ tờ giấy cói Ahmes có từ hơn ba ngàn năm trước? Khó có thể tin nổi. Nhân tiện, cũng nên chú ý rằng tùy thuộc vào cách giải thích mà đáp số của bài toán hát ru kia là 1 (đó là người kể chuyện; còn tất cả đều đi ra từ St. Ives) hoặc là 0 (người kể chuyện không thuộc nhóm "mèo mẹ, mèo con, túi và các bà vợ"). Cấp số nhân loại này, trong đó mỗi phần tử tiếp theo được tăng lên với cùng một thừa số (*nhân tử*), luôn rất hấp dẫn con người. Hơn thế nữa, phẩm chất tâm linh luôn được gắn với số 7 trong cả hai truyền thống phương Đông và phương Tây (ví dụ, 7 ngày trong một tuần, 7 vị thần may mắn của Nhật Bản, 7 tội lỗi chết người). Do vậy, ba câu đố trên có thể là những sáng tạo độc lập của ba bộ óc giàu tưởng tượng, cách xa nhau hàng thế kỷ.

Tri thức về cách giải các phương trình tuyến tính như thế nào không chỉ có ở Trung Đông. Một bộ sách Trung Quốc rất ấn tượng nhan đề *Cửu chương toán pháp* được soạn khoảng giữa năm 206 trước Công nguyên và năm 211 sau Công nguyên và dựa trên những bộ sách còn sớm hơn nữa. Trong chương 8 của cuốn *Cửu chương* chúng ta thấy có các bài toán liên quan tới không ít hơn ba phương trình tuyến tính với ba ẩn số và tất cả đã được giải một cách xuất sắc.

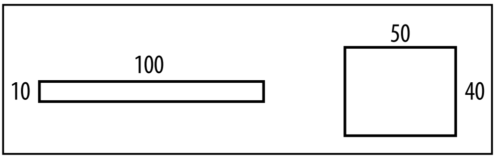
Mức tiếp theo về độ phức tạp của các phương trình đại số được đại diện bởi các *phương trình bậc hai*. Phức tạp thêm là do thực tế là trong các phương trình đó, ẩn số x xuất hiện dưới dạng bậc hai, như trong phương trình $3x^2+x=4$. Đối với những người lần đầu làm quen thì phương trình này nhìn giống như một sự thay đổi ghê gớm, nhưng phương trình bậc hai thực sự không khó giải hơn nhiều so với các phương trình tuyến tính. Điều này nghe có vẻ như không thể tin nổi, nhưng chủ đề về các phương trình nói chung và các phương trình bậc hai nói riêng đã từng gây tranh cãi gay gắt ở quốc hội Anh năm 2003.Trong một bài diễn văn xuất sắc về chương trình học ở trường phổ thông, nghị sĩ Tony McWalter đã giải thích:

> Tại sao vẫn có ai đó say mê với những x và y trong các hệ phương trình? Câu trả lời là: bởi vì nếu người ta không nỗ lực để xem các x và các y đó giữ kín điều bí mật gì thì người ta sẽ bị cắt đứt không thể có sự hiểu biết đích thực về khoa học được... Tại sao vẫn có người cố gắng hiểu cho được các phương trình bậc hai và những nguyên tắc nằm sau cách giải nó? Vì chúng xây móng cho khoa học hiện đại cũng chắc chắn như những phương pháp luyện kim của những người La Mã là chìa khóa cho nền văn hóa xây dựng của họ.

Tuy nhiên, bạn có thể băn khoăn tự hỏi, vậy thì ai là người đầu tiên đã vấp phải sự cần thiết phải phát biểu và giải những phương trình đó?

NHỮNG NGƯỜI BẢO VỆ CỘNG ĐỒNG

Trong bộ luật dân sự và bộ giáo luật (the Talmud) của người Do thái có một câu chuyện về một thủ lĩnh cộng đồng Do thái ở Babylon phải chịu một án phạt khá nặng. Ông phải đổ đầy một kho thóc có diện tích đáy là 40×40. Con người bất hạnh này đã tới gặp Rabbi Huna (khoảng 212-297) lúc đó là người đứng đầu Viện Hàn lâm Sura ở Babilonia để xin lời khuyên. Vị học giả nói: “Hãy thuyết phục họ nhận từ anh theo hai kỳ: bây giờ là diện tích 20×20 thôi, rồi sau đó một thời gian làm nốt kỳ thứ hai cũng 20×20, và như vậy là anh đã lợi được một nửa rồi”. Tất nhiên, diện tích của hình vuông mỗi cạnh 40 đơn vị là $40 \times 40 = 1600$ đơn vị vuông, trong khi đó diện tích tổng cộng của hai hình vuông 20×20 chỉ là 800 đơn vị vuông. Ở đây Rabbi Huna đã lợi dụng một sai lầm thường mắc phải thời cổ đại là diện tích của một hình chỉ hoàn toàn phụ thuộc vào chu vi của nó. Ví dụ, nhà sử học người Hy Lạp Polybius (khoảng 207 – 125 trước Công nguyên) cho chúng ta biết rằng nhiều người vào thời gian đó đã từ chối không tin rằng thành Sparta với bức tường bao dài có 48 *stadia* lại có dung lượng lớn gấp đôi Megalopolis có chu vi những 50 *stadia*. Hình 35 giới thiệu một chứng minh đơn giản một vật có chu vi nhỏ hơn nhưng vẫn có thể có diện tích lớn hơn. Hình chữ nhật dài có chu vi $2 \times (100 + 10) = 220$ đơn vị, và diện tích $100 \times 10 = 1000$ đơn vị vuông. Hình chữ nhật ngắn hơn có chu vi $2 \times (50 + 40) = 180$ đơn vị, nhưng lại có diện tích 2 lần lớn hơn: $50 \times 40 = 2000$ đơn vị vuông. Nhà toán học Hy Lạp Proclus (410-485) đã nhận xét rằng ngay cả vào cuối thế kỷ thứ 5 mà các thành viên của một số cộng đồng



Hình 35

vẫn thường lường gạt đồng bào của mình bằng cách nhường cho họ mảnh đất có chu vi lớn hơn nhưng diện tích nhỏ hơn phần đất mà những tên lường gạt này chọn cho mình. Tệ hơn nữa, những tên bất lương ấy thường dùng sơ đồ này để được tiếng là người hào phóng.

Chúng ta tạm lạc đề một chút để xét xem tại sao lại có sự nhầm lẫn chu vi – diện tích như thế. Giả sử chúng ta có hình chữ nhật với chu vi 18 đơn vị. Nếu ta ký hiệu chiều dài của nó là x và chiều rộng là y thì ta có $x+y=9$ (vì chu vi bằng hai lần chiều dài cộng chiều rộng). Thêm nữa, giả thiết rằng diện tích của hình chữ nhật là 20 đơn vị vuông. Điều đó có nghĩa là $xy=20$ (diện tích bằng tích của chiều dài với chiều rộng). Do đó, chúng ta có hệ hai phương trình hai ẩn sau:

$$x+y=9$$
$$xy=20$$

Một cách đơn giản để giải hệ phương trình này là rút ẩn số y ra từ phương trình thứ nhất (bằng cách trừ cả hai vế cho x): $y=9-x$, rồi thay vào phương trình thứ hai: $x(9-x)=20$. Mở dấu ngoặc ở vế trái, ta được $9x-x^2=20$. Nhiều bài toán Babylon dẫn tới phương trình bậc hai đều thường có dạng chung như thế. Ví dụ, trên tấm đất sét số 13901 được giữ ở Bảo tàng Anh có bài toán sau: "Tôi lấy diện tích hình vuông của tôi trừ đi một cạnh. Được 870". Điều này tương ứng với phương trình bậc hai $x^2-x=870$. Do đó, có suy luận cho rằng các phương trình bậc hai ra đời như một nỗ lực của các nhà toán học Babylon có lương tâm nhằm bảo vệ cho cộng đồng của họ tránh được những kẻ lường gạt và âm mưu ăn cắp đất của họ. Tuy nhiên, các nhà toán học này đã phát minh ra cách giải phương trình bậc hai như thế nào hiện vẫn còn là một bí mật, vì, trong khi người Babylon đã nói ra rất chi tiết các bước của thủ tục dẫn đến nghiệm, thì họ lại chẳng bao giờ tiết lộ họ đã rút ra thủ tục đó như thế nào.

Những người Ai Cập cổ đại mới chỉ xử lý được các phương trình bậc hai đơn giản nhất, loại như $x^2 = 4$, chứ không phải loại "hỗn hợp" chứa cả x^2 và x. Vậy cái gì là nghiệm của phương trình $x^2 = 4$? Nó là căn bậc hai của 4, được ký hiệu là $\sqrt{4}$. Vậy 2 rõ ràng là một nghiệm của nó, vì $2 \times 2 = 4$. Đối với người Ai Cập cổ đại thế là đủ, bởi vì số được giả thiết biểu diễn các đại lượng như chiều dài hay các ổ bánh mì đều phải là dương. Tuy nhiên, phương trình $x^2 = 4$ còn một nghiệm nữa, ít hiển nhiên hơn, đó là -2. Vì khi một số âm nhân với một số âm ta sẽ được một số dương. Nói cách khác, $(-2) \times (-2) = 4$, và do đó phương trình bậc hai $x^2 = 4$ có hai nghiệm: $x = 2$ và $x = -2$. Đây là chỉ dẫn đầu tiên cho thấy các phương trình bậc hai có thể có hai nghiệm, chứ không phải chỉ một. Trong khi những người Babylon biết giải các phương trình bậc hai hỗn hợp, nhưng họ vẫn còn chỉ quan tâm đến các nghiệm dương, vì các ẩn số thường biểu diễn các chiều dài. Họ cũng tránh những trường hợp tìm được hai nghiệm dương, vì các nghiệm này làm họ hoang mang như những điều vô lý phi logic.

Mặc dù có những khả năng toán học tuyệt vời, nhưng những nhà toán học rất sớm của Hy Lạp lại tập trung chủ yếu vào hình học và logic, còn đại số thì rất ít được chú ý. Cảm nhận một cách rõ ràng hình và số như là hai phương diện của một toán học phải đợi những bộ óc toán học xuất sắc của thế kỷ 17. Euclid vĩ đại của thành Alexandria, mà tác phẩm đồ sộ *Cơ sở* của ông (được công bố khoảng năm 300 trước Công nguyên) đặt nền móng cho hình học, cũng đã đề cập tới phương trình bậc hai nhưng chỉ là gián tiếp thôi. Ông giải những phương trình này theo cách hình học, bằng cách nêu ra các phương pháp tìm các chiều dài, mà thực tế, là nghiệm của phương trình bậc hai. Các nhà toán học Ảrập còn cần phải mở rộng hơn nữa loại đại số hình học này nhiều thế kỷ sau đó.

CHA ĐẺ CỦA ĐẠI SỐ HỌC

Trường phái Hy Lạp vĩ đại ở Alexandria đã sản sinh ra nhiều nhà toán học xuất chúng trong suốt hai thời đại vàng. Mặc dù có những thăng trầm, nhưng thành phố Alexandria, trường học của nó (được gọi là *Museum*) và thư viện gắn liền với nó nổi tiếng đã có hơn 700 ngàn cuốn sách (nhiều cuốn là tịch thu của những du khách bạc phước), đã kéo dài được gần 600 năm. Một trong những nhà tư tưởng quan trọng nhất của trường phái Alexandria là Diophantus, người đôi khi được gọi là "cha đẻ của đại số học". Nhưng chi tiết về cuộc đời của ông bị bao bọc trong bóng tối đến mức chúng ta không biết chắc chắn ông đã sống ở thế kỷ nào, trừ điều là nó phải muộn hơn năm 150 trước Công nguyên (vì ông đã trích dẫn nhà toán học Hypsicles, sống trong khoảng 168 – 120 trước Công nguyên) và sớm hơn năm 270 sau Công nguyên (vì ông đã được nhắc tới bởi Anatolius – một giám mục ở Laodicea, người nhậm chức vào khoảng thời gian đó). Nói chung, Diophantus được coi là đã phát triển rực rỡ vào khoảng năm 250, mặc dù khả năng ông sống một thế kỷ trước đó vẫn không loại trừ. Chúng ta biết về các công trình thiên tài của ông chủ yếu thông qua quyển sách *Arithmetica* (Số học), nguyên gốc gồm 13 tập. Chỉ có 6 tập bằng tiếng Hy Lạp là còn sống sót sau cuộc tấn công của những người Hồi giáo vào thư viện Alexandria, thế kỷ 7. Một bản dịch ra tiếng Ảrập có thể gồm thêm 4 tập sách nữa (bản dịch được gán cho nhà toán học thế kỷ 9 Qusta Ibn Luqa) đã được phát hiện một cách thần kỳ vào năm 1969.

Mặc dù được vinh danh là "cha đẻ của đại số học", nhưng phần lớn cuốn *Arithmetica* thực sự liên quan đến các bài toán của lý thuyết số. Tuy nhiên, Diophantus chắc chắn là người đại diện cho một giai đoạn quan trọng trong sự phát triển của đại số học, giai đoạn trung gian giữa phong cách dùng lời của người Babylon và dạng ký hiệu của các phương trình (ví dụ, $2x^2 + x = 3$) mà chúng ta dùng ngày nay. Nhà toán học và thiên văn người Đức Johannes Regiomontanus đã không kiềm chế được sự khâm phục của mình đối với cuốn *Arithmetica* vào năm 1463: "Trong những tập sách cổ này đã ẩn giấu chính bông hoa của toàn bộ số học, *ars rei et census* (ý muốn nói tới các phương trình với các ẩn số và số học) mà ngày hôm nay chúng ta gọi theo tiếng Ảrập là đại số". Diophantus đã chứng tỏ một khả năng sáng tạo và sự thành thạo không thể tưởng tượng nổi trong việc giải nhiều bài toán. Nhưng ông cũng mới chỉ xét các nghiệm dương, và ngay cả trong số đó, ông cũng chỉ xét những nghiệm có thể được biểu diễn như các số nguyên (1, 2, 3,...) hoặc như các phân số ($2/3$, $4/9$, $5/13$...; tập hợp các số nguyên và các phân số gọi là các số *hữu tỷ*). Để thấy sự tài tình của ông, ta hãy xét bài toán 28 trong tập 1 của cuốn *Arithmetica*: Tìm hai số sao cho tổng của chúng và tổng các bình phương của chúng là các số đã cho". Rõ ràng đây là bài toán có hai ẩn (hai số). Nhưng bằng một mẹo rất xuất sắc, Diophantus đã thành công rút gọn số ẩn số từ hai về một và vì thế nhận được một phương trình đơn giản. (Đối với các bạn đọc quan tâm, tôi sẽ giới thiệu lời giải của Diophantus trong Phụ lục 3). Sở dĩ cuốn *Arithmetica* phổ cập đến như vậy rõ ràng là do Diophantus đã biết cách giải các phương trình bậc hai thuộc ba loại: $ax^2 + bx = c$(trong đó a, b, c là các số dương đã cho, ví dụ như:$2x^2 + 3x = 14$); $ax^2 = bx + c$ và $ax^2 + c = bx$. Đây chính xác là những loại phương trình mà các nhà toán học Ảrập sẽ xem xét lại hơn năm thế kỷ sau.

Diophantus nổi tiếng nhất ngày hôm nay vì một lớp đặc biệt các phương trình mang tên ông – các phương trình Diophantus – và cũng bởi vì cái lời ghi rất khác thường trên mộ chí của ông. Các phương trình Diophantus thực sự bí hiểm là ở chỗ, nhìn bề ngoài, nó có thể chấp nhận bất kỳ số nào là nghiệm. Ví dụ, xét phương trình $29x+4=8y$. Đối với những giá trị nào của x và y thì phương trình được nghiệm đúng? Nếu chúng ta chọn, chẳng hạn, $y=5$ thì ta sẽ nhận được $x=36/29$. Nếu chúng ta chọn $y=1$, thì ta nhận được $x=4/29$, v.v... Chúng ta có vô số các giá trị để chọn cho y, và đối với giá trị bất kỳ mà chúng ta đã chọn, ta có thể tìm được giá trị tương ứng của x khiến cho phương trình thỏa mãn. Cái làm cho phương trình Diophantus trở nên đặc biệt là ở chỗ chúng ta được yêu cầu chỉ tìm những nghiệm cho x và y, mà cả hai đều phải là các số nguyên thôi (như 1, 2, 3...). Điều đó ngay lập tức giới hạn các nghiệm khả dĩ và làm cho chúng khó tìm hơn nhiều. Bạn có thể tìm ra những nghiệm như thế của phương trình trên không? (Nếu không, tôi sẽ giới thiệu ở Phụ lục 4).

Phương trình Diophantus nổi tiếng nhất trong lịch sử có tên là Định lý cuối cùng của Fermat, phát biểu nổi tiếng của Pierre Fermat (1601-1655) nói rằng phương trình $x^n+y^n=z^n$ với n là số nguyên dương bất kỳ lớn hơn 2 là không có nghiệm nguyên. Khi $n=2$, ta có rất nhiều nghiệm (thực tế có vô số). Ví dụ, $3^2+4^2=5^2$ $(9+16=25)$; hay $12^2+5^2=13^2(144+24=169)$. Điều kỳ lạ là khi chuyển từ $n=2$ sang $n=3$ lại không có các số nguyên x, y, z nào thỏa mãn phương trình $x^3+y^3=z^3$, và chính điều này cũng đúng với tất cả các giá trị khác của n lớn hơn 2. Thật không gì thích hợp hơn là ở bên lề một trang của tập 2 cuốn *Arithmetica* của Diophantus mà Fermat đọc ngấu nghiến, ông đã viết một tuyên bố phi thường mà mãi 356 năm sau người ta mới chứng minh được.

Một hợp tuyển ở thế kỷ thứ 6 nhan đề *Tuyển tập Hy Lạp* chứa khoảng sáu ngàn bài thơ hoặc đoạn văn ngắn được viết thông minh và dí dỏm (epigram). Một trong số những bài đó được cho là có nói sơ qua về cuộc đời của Diophantus:

> Chúa ban cho chàng là chú bé khoảng một phần sáu cuộc đời chàng, và thêm vào đó một phần mười hai nữa, Ngài đã phủ kín râu hai má và dưới cằm chàng. Ngài đã thắp lên trong lòng chàng ngọn lửa ấm áp của gia đình sau một phần bảy nữa và 5 năm sau khi cưới Ngài đã ban cho chàng đứa con trai. Nhưng than ôi! Thằng bé sinh muộn thật tội nghiệp. Sau khi bằng nửa tuổi đời của bố, số phận đã cướp nó đi. Và sau 4 năm được an ủi bằng khoa học các con số chàng cũng qua đời.

Bản thân Diophantus chắc cũng thấy tủi bởi thực tế là câu chuyện về cuộc đời ông lại chỉ quy gọn về một phương trình tuyến tính, loại phương trình mà ông chả bao giờ thực sự quan tâm. Nếu mô tả trong đoạn văn trên là đúng thì ông đã sống được 84 tuổi.

Thừa nhận rằng các nhà toán học Babylon, Hy Lạp và đặc biệt là Hindu ở thế kỷ thứ 7 đã biết cách giải các loại phương trình bậc hai khác nhau, chúng ta sẽ không lấy gì là ngạc nhiên khi thấy rằng cách giải của những phương trình như vậy ngày hôm nay chỉ được coi là một phần của đai số sơ cấp. Dạng tổng quát nhất của phương trình bậc hai là: $ax^2+bx+c=0$ với a, b, c có thể là một số đã cho bất kỳ (a không thể bằng 0, vì nếu không, phương trình không còn là bậc hai nữa). Vấn đề thực sự đặt ra ở đây là liệu có một công thức vạn năng cho nghiệm của phương trình trên trong mọi trường hợp không. Chắc bạn cũng còn lờ mờ nhớ rằng trong môn đại số ở trường trung học thực sự có một công thức như vậy. Đó là

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Mặc dù nhìn bề ngoài hơi có vẻ rắc rối, nhưng đây thực sự là một công thức đơn giản. Chỉ cần thay giá trị đã cho của *a, b, c* vào công thức trên là ta ngay lập tức tính được các giá trị của *x* thỏa mãn phương trình. Ví dụ, giả sử chúng ta cần giải phương trình: $x^2 - 6x + 8 = 0$, trong đó $a = 1$, $b = -6$ và $c = 8$. Tất cả những gì chúng ta cần làm bây giờ là thay những giá trị này của *a, b, c* vào công thức trên và sẽ tìm được hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 4$. (Ký hiệu ± trong công thức trên có nghĩa là ta chọn dấu cộng để nhận được một nghiệm và chọn dấu trừ để nhận được nghiệm khác).

Tiếp sau sự suy tàn và sụp đổ của trường phái Alexandria, toán học châu Âu đã trải qua một giấc ngủ đông gần một thiên niên kỷ. Cây gậy làm cho toán học và thực tế là cả khoa học nói chung sống lại được chuyển giao cho Ấn Độ và thế giới Ảrập. Nghĩa là con đường từ Diophantus đến cách giải phương trình bậc hai đã không phải đi qua các nhà toán học châu Âu. Nhà toán học và thiên văn Ấn Độ Brahmagupta (598 – 670) đã bắt tay giải một số ít các phương trình Diophantus có ấn tượng cũng như các phương trình bậc hai có nghiệm âm. Ông đã gọi những số như vậy là "nợ" khi nhận thấy rằng các số âm rất thường xuất hiện trong những giao dịch về tiền bạc. Cũng theo tinh thần đó, ông gọi các số dương là "có" (tài sản). Do đó, quy tắc nhân và chia các số âm và dương cũng được phát biểu như sau: "Tích và thương của hai nợ là có, tích và thương của một nợ và có là nợ".

Hình 36

Người thực sự cho đại số cái tên đó là Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (khoảng 780-850; hình 36 là chân dung của ông trên con tem của Liên Xô cũ). Cuốn sách mà ông soạn ở Baghdad nhan đề *Kitab* *al-jabr wa al-muqabalah* (*Cuốn sách cô đọng về hồi phục và cân bằng*) trở thành đồng nghĩa với lý thuyết các phương trình trong nhiều thế kỷ. Từ một trong các từ ở nhan đề cuốn sách (*al-jabr*) đã xuất hiện từ *algebra* – đại số. Ngay cả từ *algorithm* (thuật toán hay thuật giải) được sử dụng ngày nay để mô tả một phương pháp cụ thể để giải một bài toán bằng cách lần lượt đi theo các bước thủ tục cũng xuất hiện từ sự biến dạng của cái tên al-Khwarizmi. Cuốn sách của al-Khwarizmi không có những đột phá đặc biệt về nội dung, nhưng nó lại là cuốn sách đầu tiên trình bày một cách có hệ thống cách giải các phương trình bậc hai. Từ *al-jabr* có nghĩa là "hồi phục" hay "hoàn tất", ám chỉ việc chuyển những số hạng âm từ vế này sang vế kia của phương trình, như khi biến đổi $x^2 = 40x - 4x^2$ (bằng cách thêm $4x^2$ vào cả hai vế) thành $5x^2 = 40x$. Ảnh hưởng của cuốn sách của al-Khwarizmi lớn tới mức, ngay cả 8 thế kỷ sau, trong lời văn hài hước bậc thầy của cuốn tiểu thuyết nổi tiếng *Don Quixote xứ Mancha* chúng ta còn tìm thấy ông thầy nắn xương được gọi là "*algebrista*" vì công việc của ông là làm "hồi phục".

Cuốn sách đầu tiên bao gồm cách giải đầy đủ của phương trình bậc hai tổng quát nhất đã xuất hiện ở châu Âu chỉ vào thế kỷ 12. Tác giả là một nhà toán học chiết trung người Do thái Tây Ban Nha Abraham bar Hiyya Ha-nasi (1070-1136; Ha- nasi có nghĩa là "thủ lĩnh"). Dường như để nhắc nhở chúng ta về nguồn gốc của các phương trình bậc hai, quyển sách có nhan đề: *Hibbur ha-meshihah ve-ha-tishboret* (*Chuyên luận về đo lường và tính toán)*. Abraham bar Hiyya giải thích:

> Những ai mong muốn học các phương pháp đo và phân chia diện tích, nhất thiết phải thấu hiểu những định lý tổng quát của hình học và số học, mà việc dạy đo đạc... dựa trên đó.

> Ai nắm vững một cách hoàn chỉnh các ý niệm này, thì người đó sẽ không bao giờ phạm sai lầm.

Điều đó đã đưa đến sự kết thúc một kỷ nguyên dài trong đó các nhà toán học Ảrập đóng vai trò duy trì và giữ gìn toán học. Sự tiến bộ trong suốt ba ngàn năm tiếp sau thời kỳ Babylon cổ thực chất chỉ là gia tăng thêm mà thôi. Tuy nhiên, với sự thức dậy hùng mạnh về mặt trí tuệ vào thời Phục Hưng, trọng tâm đã dịch chuyển về Bắc Italia với sự tiếp nối của các nước Tây Âu. Các nhà nghiên cứu văn hóa Hy-La đã phát hiện ra những công trình của người cổ Hy Lạp và khuyến khích quá trình đào bới toàn bộ vốn tri thức tích lũy được họ, kể cả toán học. Vì việc sao chép các bản thảo trở thành nền công nghiệp quan trọng (theo một báo cáo, ông Cosimo de Midici chủ nhà băng ở Florence đã phải dùng tới 45 viên thư lại), nên việc phát minh ra in ấn với các con chữ tháo lắp được là điều có thể tiên đoán trước, cùng với sự phát triển như vũ bão sau đó của tri thức khoa học.

Trong lịch sử tương đối bình lặng và khá uể oải của lịch sử phương trình bậc hai không có dấu hiệu gì chỉ ra rằng giai đoạn tiếp theo trong việc giải các phương trình sẽ là đặc biệt kịch tính. Tuy nhiên, đó chỉ là sự yên lặng trước cơn bão. Mà chương tiếp sau mới là bắt đầu.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Cũng giống như các bài toán liên quan đến diện tích đã dẫn đến phương trình bậc hai (vì một chiều dài nhân với một chiều khác cho chiều dài bình phương), phép tính thể tích các hình khối như khối lập phương (trong đó người ta nhân chiều dài với chiều rộng và chiều cao) sẽ dẫn tới các *phương trình bậc ba*. Phương trình bậc ba tổng quát nhất có dạng $ax^3 + bx^2 + xc + d = 0$, trong đó a, b, c, d là những số đã cho (a cần phải khác 0). Mục tiêu của tất cả những người giải phương trình có tham vọng là đã rõ ràng: đó là phải tìm được một công thức, tương tự như công thức nghiệm của phương trình bậc hai, nghĩa là khi thay các giá trị của a, b, c, d vào công thức đó ta sẽ tìm được các nghiệm mong muốn. Những người Babylon cổ đại đã lập ra một số bảng cho phép họ giải được một số rất ít các phương trình bậc ba cụ thể, và nhà toán học kiêm nhà thơ người Ba Tư là Omar Khayyam đã giới thiệu một cách giải hình học cho một số phương trình còn ít hơn nữa vào thế kỷ 12. Tuy nhiên, cách giải tổng quát đối với phương trình bậc ba vẫn còn là một thách thức đối với các nhà toán học cho đến tận thế kỷ 16. Đó không phải là do thiếu nỗ lực. Ba nhà đại số nổi tiếng ở Florence là Maestro Benedetto ở thế kỷ 15 và hai bậc tiền bối của ông ở thế kỷ 14, Maestro Biaggio và Antonio Mazzinghi đã tốn rất nhiều tâm sức để tìm hiểu về các phương trình và các cách giải chúng. Tuy nhiên, đối với phương trình bậc ba thì những nỗ lực của họ tỏ ra là chưa đủ. Nhà toán học thế kỷ 14 Maestro Dardi ở Pisa cũng đã giới thiệu những cách giải rất tài tình đối với hơn 198 loại phương trình khác nhau – nhưng không có đối với phương trình bậc ba tổng quát. Ngay cả một họa sĩ nổi tiếng thời Phục Hưng là Piero della Francesca, một nhà toán học tài năng, cũng góp phần để tìm ra một cách giải. Mặc dù thế và rất nhiều nỗ lực can đảm khác, câu trả lời vẫn lảng tránh họ. Vì thế không có gì lạ là nhà toán học kiêm tác giả nổi tiếng Luca Pacioli (1445-1517) đã kết luận cuốn sách có ảnh hưởng của ông xuất bản năm 1494 nhan đề *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita (Tập hợp tri thức về số học, hình học, về tỷ lệ và tính tỷ lệ*) trong một tâm trạng rất ngao ngán. “Đối với các phương trình bậc ba và bậc bốn (có liên quan đến x^4)", ông nói, "thì cho đến nay vẫn chưa tìm ra được quy tắc tổng quát". Một tin tốt lành là công trình bách khoa 600 trang của Pacioli được viết bằng thứ tiếng Italia dễ đọc. Do đó, quyển sách đã thúc đẩy những nghiên cứu đại số ngay cả đối với những người không thạo tiếng Latinh. Tại thời đó, tính thực tiễn đã nhường chỗ cho những tham vọng. Không có ai đi tìm cách giải cho phương trình bậc ba vì một mục đích thực tiễn nào cả. Giải phương trình bậc ba đã trở thành một thách thức về trí tuệ đáng được xem xét đối với những bộ óc toán học ưu tú nhất. Vào vai một nhân vật khiêm tốn, nhà toán học ở Bologna tên là Scipione dal Ferro (1465-1526), không hề biết rằng mình đang tham gia vào một vở bi kịch đang diễn ra.

Hình 37

Scipione dal Ferro là con trai của người làm giấy tên là Floriano và vợ ông là Filippa. Vào thế kỷ đó, thế kỷ đã chứng kiến sự phát minh ra nghề in, thì việc sản xuất giấy trở thành một nghề nghiệp đáng mong ước. Chúng ta được biết rất ít về tuổi trẻ của Scipione hoặc động cơ gì đã thúc đẩy ông nghiên cứu toán học. Có lẽ ông đã tốt nghiệp Đại học Bologna. Trường đại học có uy tín này và cũng là trường lâu đời nhất đến nay vẫn còn hoạt động (hình 37 cho thấy một hành lang tuyệt đẹp trong tòa nhà cũ, nay thư viện đặt ở đó) được thành lập năm 1088 và đến thế kỷ 15 đã nổi tiếng là trường đại học tốt nhất ở châu Âu. Toán học (ngoài hình học cơ sở của Euclid ra) đã là một phần của chương trình học chính quy ở Bologna vào cuối thế kỷ 14, và vào năm 1450 Giáo hoàng Nicholas V đã cho thêm biên chế giảng dạy bốn vị trí về toán học nữa. Năm 1496, dal Ferro đã trở thành một trong số năm giảng viên về toán ở đại học này, trừ một thời gian ngắn ông chuyển tới Venice, còn thì ông tiếp tục giữ cương vị này cho tới hết đời. Mặc dù có một số nguồn mô tả ông là một nhà đại số lớn, nhưng không có bản thảo công trình quan trọng nào dưới dạng chép tay hay in của ông còn tồn tại cả. Một tập ghi chép các bài giảng ở Đại học Bologna vào những năm 1554 – 1568 có thể có một số tác phẩm của Ferro (hình 38). Trang này có ghi trên đầu là "Của Hiệp sĩ Bolognetti, người đã ghi chép từ những bài giảng trước kia của thầy Scipione dal Ferro ở Bologna". Scipione có lẽ đã gặp Luca Pacioli vào năm 1501, khi ông này tới giảng bài ở Bologna. Chính xác mà nói, Pacioli không phải là nhà toán học lớn, nhưng ông là người truyền bá vĩ đại những tri thức toán học. Thất vọng vì đã không giải được phương trình bậc ba, Pacioli có thể đã thuyết phục Scipione, người rất có tài nghệ xử lý các biểu thức có liên quan đến các căn bậc ba và bậc bốn, hãy thử xem. Khoảng năm 1515, những nỗ lực của Ferro cuối cùng đã mang lại kết quả. Ông đã có một đột phá quan trọng là giải được phương trình bậc ba dạng $ax^3 + bx = c$. Theo ngôn ngữ toán học của thế kỷ 16 thì những phương trình như vậy được mô tả là "các ẩn và các lập phương bằng các con số". Mặc dù đây chưa phải là dạng tổng quát nhất, nhưng nó

Hình 38

đã mở rộng cửa cho các phát minh tiếp sau. Scipione dal Ferro đã không vội vã công bố kết quả mang tính đột phá của mình. Giữ kín các phát minh toán học là chuyện hoàn toàn bình thường cho đến tận thế kỷ 18 (thật khác xa biết bao với sự săn đuổi bài báo khoa học ngày nay!). Tuy nhiên, ông đã phổ biến cách giải này cho một sinh viên đồng thời là con rể tên là Annibale della Nave và ít nhất là một sinh viên nữa người Venice tên là Antonio Maria Fiore. Ông cũng đã trình bày phương pháp của mình trong một bản thảo và bản thảo này đã rơi vào tay con rể ông sau khi ông mất.

Bologna thế kỷ 16 đã trải qua một làn sóng quan tâm tới toán học. Những nhà toán học và các học giả khác đôi khi tham gia những cuộc tranh luận công khai và các cuộc đấu khẩu đó thường thu hút những đám đông rất lớn. Trong đám cử tọa này không chỉ có những cán bộ của trường đại học, các thẩm phán đã được bổ nhiệm, mà còn có cả sinh viên và những người ủng hộ các bên tranh luận và người xem, những người tới đây cho vui và để có cơ hội cá cược. Thường những người tranh luận đặt cược một số tiền kha khá vào thắng lợi được đoán trước của mình. Theo lời mô tả của một nhà lịch sử toán học thế kỷ 19 thì các nhà toán học rất quan tâm đến các cuộc đấu trí như vậy, bởi vì

> Không chỉ tiếng tăm của thành phố và trường Đại học mà cả việc bổ nhiệm và tăng lương cũng phụ thuộc vào kết quả đấu trí của họ. Những cuộc tranh luận này thường diễn ra ở những quảng trường công cộng, trong nhà thờ hay trong cung điện của các nhà quý tộc hay các hoàng tử, những người coi là một vinh dự khi có những học giả tùy tùng của mình vừa tinh thông không chỉ trong việc bói toán chiêm tinh mà cả trong các cuộc tranh luận về những vấn đề hóc búa và hiếm hoi của toán học.

Antonio Maria Fiore, người đã giấu nhẹm phương pháp giải của dal Ferro, là một nhà toán học khá tầm thường. Sau khi dal Ferro chết, anh ta đã không cho công bố ngay lời giải này, thậm chí còn xem nó như là của mình để khai thác. Đúng hơn là anh ta quyết định đợi đến một thời điểm thích hợp, thời điểm có thể cho phép anh ta làm nên tên tuổi của mình. Ở một xã hội mà những bổ nhiệm mới trong trường đại học phụ thuộc rất nhiều vào sự thành công trong những cuộc tranh luận thì việc có được một vũ khí bí mật có thể có nghĩa là sự khác biệt giữa sống sót và chết. Cơ hội này đã đến vào năm 1535 và Fiore đã thách thức nhà toán học Niccolò Tartaglia thi giải toán trước công chúng. Vậy Tartaglia là ai và tại sao Fiore lại chọn ông ta trong một danh sách dài những ứng viên tiềm năng làm đối thủ của mình?

Hình 39

Niccolò Tartaglia (hình 39) sinh ở Brescia năm 1499 hoặc 1500, họ của ông có lẽ là Fontana, nhưng ông có biệt danh là Tartaglia (có nghĩa là "người nói lắp") vì một tên lính Pháp đã dùng gươm chém vào miệng ông khi ông mới 12 tuổi. Cậu đã bị bỏ mặc cho chết trong nhà thờ, nơi cậu trú ẩn, nhưng mẹ cậu đã chăm sóc cho tới khi bình phục. Ở tuổi trưởng thành ông luôn mang râu để giấu đi vết sẹo xấu xí trên mặt. Tartaglia xuất thân từ một gia đình rất nghèo. Cha ông, Michele, một bưu tá đã chết khi Niccolò mới 6 tuổi, để lại người vợ góa và những đứa con nhỏ trong cảnh nghèo khổ đến não lòng. Tartaglia đã phải dừng học đọc và viết bảng chữ cái khi mới đến chữ *k* vì gia đình ông không đủ tiền trả cho thầy giáo. Sau này nhớ lại, Tartaglia đã mô tả sự hoàn tất học vấn của mình như sau: "Tôi không bao giờ trở lại học thầy nữa, nhưng vẫn tiếp tục khổ công tự học qua các tác phẩm của những người đã khuất và chỉ đồng hành với một người duy nhất đó là đứa con của sự nghèo khổ được gọi là nền công nghiệp". Mặc dù với hoàn cảnh xuất thân nghèo khổ như vậy, nhưng Tartaglia tỏ ra là một nhà toán học tài năng. Cuối cùng ông chuyển đến Venice vào năm 1534 với tư cách là một thầy giáo dạy toán, sau khi đã sống một thời gian ở Veron. Trong những hồi ức về toán học của mình, Tartaglia kể rằng vào năm 1530, sau những nỗ lực rất lớn, ông đã giải được phương trình bậc ba $x^3+3x^2=5$. Đây là thách thức đặt ra cho ông bởi một người bạn ở Brescian tên là Zuanne de Torin da Coi. Tin đồn về thông báo của Tartaglia là đã giải được phương trình bậc ba chắc hẳn đã đến tai Antonio Maria Fiore, nhưng y chào đón thông tin với vẻ hoài nghi vì nghĩ rằng Tartaglia bịp bợm. Tin vào khả năng sẽ đánh bại Tartaglia do đã có trong tay bí mật về lời giải của Ferro, Fiore đã tung ra thách thức. Không lâu sau đó, Fiore và Tartaglia đã đi đến thỏa thuận về những điều kiện chính xác của cuộc thách đấu. Mỗi bên sẽ đưa ra 30 bài toán cho đối phương giải. Những bài toán này được niêm phong và giao cho công chứng viên Iacomo di Zambelli. Hai đối thủ ấn định thời hạn từ 40 đến 50 ngày để mỗi bên chuẩn bị giải, một khi dấu niêm phong được mở ra. Họ cũng thỏa thuận rằng ai giải được nhiều bài toán hơn thì người đó sẽ thắng và ngoài vinh dự ra, người thắng cuộc còn được nhận một khoản tiền thưởng kha khá được nêu ra cho mỗi bài toán (theo một số nguồn thì người thua cuộc phải thanh toán hóa đơn cho bữa tiệc dành cho người thắng và 30 người bạn của anh ta). Hóa ra, Fiore chỉ có một mũi tên trong bao, tất cả những bài toán mà anh ta đưa ra đều có dạng $ax^3 + bx = c$ mà anh ta đã biết cách giải từ Ferro. Trái lại, bản danh sách của Tartaglia lại có tới 30 bài toán khác nhau, mỗi bài toán là một loại khác mà theo lời ông là "để chứng tỏ rằng tôi ít bận tâm về ông ta và không có lý do gì để phải sợ hãi ông ta cả."

Ngày tranh tài được định vào 12 tháng 2 năm 1535. Những người có chức trách ở trường đại học và một số trí thức thượng lưu ở Venice đều đã đến dự. Khi các bài toán được đưa cho các đối thủ, một điều gì đó hoàn toàn bất thường đã xảy ra. Trước sự kinh ngạc của khán giả, tất cả các bài toán được đưa cho Tartaglia đã được ông giải trọn vẹn chỉ trong vòng hai giờ đồng hồ! Trong khi đó Fiore không giải được dù chỉ một bài của Tartaglia. Hai mươi năm sau, Tartaglia đã kể lại về sự kiện này:

> Lý do tại sao tôi đã giải được 30 (bài toán) của ông ta trong một thời gian ngắn như vậy vì tất cả 30 bài toán đó đều liên quan đến đại số của những ẩn số và lập phương bằng các con số (tức là các phương trình có dạng $ax^3 + bx = c$). Ông ta làm như thế vì tin rằng ngay cả một bài tôi cũng sẽ không thể giải nổi, do Fra Luca (tức Pacioli) đã khẳng định trong chuyên luận của mình rằng không thể giải được những bài toán như vậy bằng một công thức tổng quát nào. Tuy nhiên, thật may mắn là chỉ trong 8 ngày trước thời hạn ấn định để nhận từ viên công chứng hai tập 30 bài toán, tôi đã phát hiện ra công thức tổng quát tìm nghiệm của các phương trình đó.

Thực tế, một ngày sau khi giải được phương trình $ax^3 + bx = c$, Tartaglia cũng giải được phương trình $ax + b = x^3$. Vì ông cũng biết giải phương trình $x^3 + ax^2 = b$ (chính là thách thức mà Coi đã đặt ra cho ông), nên đúng là chỉ qua một đêm Tartaglia đã trở thành một chuyên gia trên thế giới về giải các phương trình bậc ba. Tuy nhiên, ông đã khước từ đề nghị của Coi là hãy công bố ngay lập tức lời giải, với lý do rằng ông định viết một cuốn sách về chủ đề này. Công thức mà Tartaglia phát minh ra phức tạp đến mức chính ông cũng thấy là khó nhớ những công thức riêng của ông cho ba trường hợp. Để giúp ông nhớ các công thức này, Tartaglia đã soạn ra cả một bài thơ với mấy câu đầu như sau

Trong trường hợp lập phương và ẩn
Cộng lại bằng một số nguyên, đã biết:
Trước hết hãy tìm hai số khác nhau đúng bằng thế
Tích của chúng, khi đó, ai mà chả biết...

Bài thơ hoàn chỉnh của Tartaglia và công thức của ông sẽ được giới thiệu trong Phụ lục 5.

Giờ đây, Tartaglia không còn là thầy giáo dạy toán vô danh nữa, ông đã trở thành một nhà toán học nổi tiếng. Nhưng ở nước Ý thời Phục Hưng không có câu chuyện nào, ngay cả câu chuyện về toán học, xuất hiện mà lại không có những yếu tố kịch tính trong đó.

TÌNH TIẾT PHỨC TẠP THÊM

Tin tức về cuộc đấu trí giữa Tartaglia và Fiore đã lan rộng khắp Italia như một trận cháy rừng và tới tai một trong số những nhân vật xuất sắc nhất và cũng là gây tranh cãi nhất của thế kỷ 16, đó là một bác sĩ, nhà toán học, chiêm tinh học, một tay cờ bạc và triết gia Gerolamo Cardano (1501-1576; hình 40).

Ngay cả so với nhiều thiên tài đặc sắc của thời Phục Hưng thì cuộc đời của Cardano dễ lôi cuốn trí tưởng tượng hơn. Ông là đứa con ngoài giá thú của một luật sư ở Milan tên là Fazio Cardano và một bà

Hình 40

góa ít tuổi hơn nhiều tên là Chiara Micheri. Trong cuốn tự truyện sau này của ông, *De vita propria liber* (*Cuốn sách về cuộc đời tôi*), Cardano đã khoái chí mô tả lại một cách rất chi tiết và không cần thiết tất cả những vấn đề y tế mà ông đã phải chịu lúc đầu đời, kể cả sự bất lực trong chuyện tình dục vào khoảng thời gian giữa tuổi 21 và 31. Được khuyến khích bởi người cha có học vấn, người đã một vài lần góp ý với Leonardo da Vinci về hình học, Gerolamo đã học toán, học các tác phẩm kinh điển, và cả y học nữa tại hai trường Đại học Pavia và Padua. Trong những ngày còn đi học, cờ bạc là nguồn hỗ trợ tài chính. Ông chơi bài, xúc xắc, và đánh cờ, biến những hiểu biết về lý thuyết xác suất thành công cụ kiếm tiền. Sau này trong đời, ông đã biến thói ham cờ bạc thành một cuốn sách rất lý thú: *Liber de ludo aleae* (*Cuốn sách về những trò chơi may rủi*), cuốn sách đầu tiên về những tính toán xác suất. Sở hữu một giọng nói rất to và thái độ hơi thô bạo, Cardano đã làm cho nhiều giáo sư xa lánh và vào lúc tốt nghiệp, tổng số phiếu, trong lần bỏ đầu tiên, không đồng ý trao cho ông học vị tiến sĩ về y học đã chiếm áp đảo là 49 trên 9. Chỉ sau hai vòng bỏ phiếu nữa, cuối cùng ông đã nhận được học vị này. Trong khi những dự định kiếm một chân bác sĩ ở Milan đã bị thất bại thảm hại, vận may đã làm cho số phận ông thay đổi thật đột ngột. Năm 1534, qua tác động của những người quen biết cha ông, ông đã được bổ nhiệm làm giảng viên toán của Quỹ Piatti. Đồng thời, ông cũng đã bắt đầu hành nghề y một cách bí mật, một hoạt động tỏ ra cực kỳ hiệu quả. Tuy nhiên, thành công của ông vẫn không giành được sự ủng hộ của trường Bác sĩ ở Milan. Năm 1536, Cardano quyết định đưa sự bất đồng của mình với trường này tới một thách thức. Ông đã cho xuất bản một cuốn sách với nội dung công kích đầy ác ý nhan đề *De malo recentiorum medicorum medendi usu libeluss* (*Về những thực hành tồi tệ thường gặp trong y khoa*). Đặc biệt, Cardano đã chế nhạo cung cách huyênh hoang của các bác sĩ đương thời: "Những điều làm nên phần lớn tăm tiếng của một bác sĩ thời nay là kiểu cách của anh ta, những người phục vụ, xe ngựa, quần áo, sự ranh ma và khôn khéo tất cả đều được trưng ra một cách giả tạo và vô cảm. Học vấn và kinh nghiệm dường như chả là cái đinh gì". Thật đáng kinh ngạc là cuộc công kích này của Cardano không chỉ mang lại cho ông chân bác sĩ mà vào giữa thế kỷ ông còn trở thành một trong số những người hành nghề y khoa nổi tiếng nhất ở châu Âu, chỉ đứng sau nhà giải phẫu học huyền thoại Andreas Vesalius.

Cardano dường như là người rất mạnh trong tranh luận và thi đấu. Có lẽ điều đó bắt nguồn từ thói say mê cờ bạc của ông. Cardano đã từng nói, "Ngay cả nếu cờ bạc xét chung là một điều ác, thì do chỗ có một số lượng rất đông người chơi, nên dường như nó chỉ là một điều ác tự nhiên mà thôi. Chính vì lý do đó nên nó được các bác sĩ thảo luận giống như một trong những căn bệnh không chữa được". Nhanh trí và miệng lưỡi sắc sảo, nên Cardano đã thắng trong nhiều cuộc tranh cãi ngay từ hồi sinh viên cũng như sau này đã là một học giả trưởng thành. Nên không có gì lạ là cái tin về cuộc thi đấu Tartaglia-Fiore đã khơi dậy trí tò mò của ông. Vào thời gian đó ông đang hoàn tất một cuốn sách thứ hai về toán học, đó là cuốn

Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis (*Thực hành số học và đo lường đơn giản*) và ông nhận thấy rằng nếu gộp thêm cả phương pháp giải phương trình bậc ba vào thì cuốn sách sẽ rất hấp dẫn. Trong ít năm tiếp sau đó, Cardano đã nỗ lực tự tìm lấy cách giải, nhưng đã vô ích. Sau khi thất bại, Cardano đã quyết định nhờ một người bán sách tên là Zuan Antonio de Bassano đến gặp và thuyết phục Tartaglia tiết lộ công thức của ông ta. Sau này, Tartaglia đã nhắc lại câu trả lời rất sòng phẳng của ông: "Xin về nói với Ngài rằng hãy tha lỗi cho tôi, rằng nếu tôi muốn công bố phát minh của tôi, thì nó phải nằm trong tác phẩm của tôi chứ không phải trong tác phẩm của người khác. Vậy nên Ngài nên chấp nhận lời xin lỗi của tôi". Sau những trao đổi rất dài dòng và gay gắt, trong đó Tartaglia đã gạt bỏ mọi đề nghị của Cardano, nhưng cuối cùng ông đã bị bẫy nhận lời tới thăm Cardano ở Milan. Cái mồi của bẫy này là lời hứa hẹn của Cardano giới thiệu Tartaglia với vị phó vương Tây Ban Nha và vị tư lệnh Milan tên là Alfonso d'Avalos. Tartaglia đã viết một cuốn sách về pháo binh và cuộc tiếp xúc như vậy sẽ đảm bảo cho ông một món thu nhập đáng kể.

Ở Milan, Cardano đã có màn tiếp đón Tartaglia rất nồng hậu và lịch thiệp, nhưng vẫn còn ý định dẫn dụ để moi lời giải của vị khách. Nhưng đôi môi Tartaglia dường như bị gắn xi kín mít, ít nhất là trong một thời gian. Ông thậm chí còn từ chối đề nghị để cho Cardano gộp vào cuốn sách của ông ta một chương đặc biệt nêu rõ Tartaglia là người đã phát minh ra lời giải.

Thật không may, từ thời điểm đó, thông tin của chúng ta về các sự kiện tiếp theo hầu như chỉ từ phía Tartaglia, không còn bằng chứng khách quan nữa. Theo Tartaglia thì cuối cùng ông đã đồng ý tiết lộ bí mật cho Cardano, nhưng chỉ sau khi ông này phải trang trọng thề: "Tôi xin thề với ông trên Kinh Phúc âm Thiêng liêng và trên đức tin của tôi với tư cách một người đàng hoàng, rằng tôi không chỉ không bao giờ công bố các phát minh của ông, nếu như ông cho tôi biết, mà tôi cũng còn xin hứa và thề trên đức tin của tôi với tư cách một người gia tô giáo rằng tôi sẽ cất nó vào két sắt sao cho sau khi tôi chết đi không ai có thể hiểu được nó". Cuộc nói chuyện nặng nề đó đã xảy ra ngày 25 tháng 4 năm 1539. Ludovico Ferrari, khi đó là quản gia trẻ nhà Cardano, đã kể lại một câu chuyện hơi khác. Theo anh ta thì Cardano không thể sẽ giữ bí mật. Ferrari tuyên bố rằng anh ta đã có mặt trong cuộc nói chuyện và kể rằng Tartaglia đồng ý tiết lộ là để đáp lại sự hiếu khách của Cardano. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây, tính khách quan của Ferrari chí ít cũng đáng ngờ như của Tartaglia vậy. Tuy nhiên, sự thực còn lại là cuốn *Practica arithmeticae generalis* xuất bản tháng 5 năm 1539 đã không có phần lời giải của Tartaglia.

Ludovico Ferrari (1522 – 1565) bước lên trung tâm sân khấu như một nhân vật tiếp sau của vở kịch bi hài này. Anh ta lần đầu tiên tới nhà Cardano từ Bologna khi mới 14 tuổi. Cardano ngay lập tức nhận ra chàng trai này có những tài năng đặc biệt và nhận hoàn toàn trách nhiệm dạy dỗ cho cậu. Tuy nhiên, là người sắc sảo nhưng Ferrari lại là người nóng nảy, thiếu kiên nhẫn. Trong một cuộc ẩu đả, ở tuổi 17, anh ta đã để mất nhiều ngón tay trên bàn tay phải. Ngay khi Cardano biết được công thức nghiệm của Tartaglia, ông không chỉ tiếp tục chứng minh nó một cách chặt chẽ mà còn bắt tay nghiên cứu các phương trình bậc ba tổng quát hơn. Cũng cần nhắc lại rằng, Tartaglia mới chỉ thực sự giải được những dạng đặc biệt của phương trình bậc ba, như $x^3 + ax = b$ hay $x^3 = ax + b$. Nhận thức rằng đây mới chỉ là các trường hợp đặc biệt của phương trình tổng quát $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ còn chưa được thấm sâu vào các nhà toán học thế kỷ 16. Thực tế, họ chỉ xét riêng rẽ từng phương trình một trong số 13 dạng khác nhau của các phương trình bậc ba. Cũng trong thời gian đó, được sự khuyến khích của Cardano, chàng thanh niên xuất sắc Ferrari, vào năm 1540, đã tìm được một nghiệm rất đẹp của *phương trình bậc bốn* $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Thầy và trò giờ đây thực sự đang trong cuộc chạy đua. Tin đồn dal Ferro có để lại cho con rể một công thức gốc quan trọng đã đến tai Cardano. Năm 1543, Cardano và Ferrari đã thực hiện một chuyến du hành đặc biệt tới Bologna để gặp Annibale della Nave, người đã được Scipione dal Ferro tin tưởng giao cho giữ bài báo gốc. Tại đây họ đã có thể khẳng định một cách đích xác rằng, thực sự hai mươi năm trước Ferro đã phát minh ra công thức giống như của Tartaglia. Ngay cả nếu như Cardano có thực sự thề thốt với Tartaglia đi nữa thì phát hiện này khiến ông cảm thấy cần thiết phải giải phóng mình khỏi sự ràng buộc đó. Lời thề này, xét cho cùng, về mặt chính thức, là không được tiết lộ công thức của Tartaglia, chứ không phải của Ferro.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa vocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgo tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plane inexhausto totius Arithmeticae thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Hình 41

Năm 1545, Cardano đã cho xuất bản một quyển sách có liên quan đến nhiều nhà toán học như một sự kiện đánh dấu sự bắt đầu của đại số hiện đại – *Artis magnae sive de regulis algebraicis lber unus* (*Nghệ thuật vĩ đại hay là những quy tắc của đại số học, Quyển 1*) thường nổi tiếng dưới cái tên *Ars magna* (*Nghệ thuật vĩ đại*; hình 41 là trang bìa lót của cuốn sách).

Trong cuốn sách này, Cardano đã khám phá rất chi tiết các phương trình bậc ba và bậc bốn cùng với các công thức nghiệm của chúng. Ông đã chứng minh lần đầu tiên rằng các nghiệm có thể là âm, là vô tỷ và trong một số trường hợp thậm chí có thể có liên quan tới cả căn bậc hai của một số âm – những đại lượng mà ông gọi là *sophistic* (ngụy biện), đó cũng chính là các số ảo theo cách gọi cuả thế kỷ 17. Nhà in Johannes Petreius ở Nürnberg đã cho xuất bản lần đầu tiên cuốn sách này và nó đã tràn ngập châu Âu toán học và giành được sự chào đón nồng nhiệt ngay lập tức. Có một nhà toán học – khỏi cần phải nói là ai – là ít trân trọng cuốn sách đó nhất. Cơn giận của Tartaglia quả là không thể tưởng tượng nổi. Chưa đầy một năm sau, ông đã cho xuất bản cuốn sách *Quesiti et invention diverse* (*Những bài toán và các phát minh mới*) trong đó ông buộc tội Cardano là đã phản bội lại lời thề. Khi trình bày tất cả những gì được coi là đúng từng chữ một của những cuộc trao đổi giữa hai người (ngay cả mặc dù những cuộc trao đổi này đã diễn ra những 7 năm trước), Tartaglia đã dùng những lời lẽ sỉ nhục nhất để mạt sát Cardano. Ông ta biện bạch: "Tôi thực sự không biết điều xấu xa nào lớn hơn là sự phản bội lời thề". Nhưng liệu Cardano có phải là kẻ đạo toán hay không? Theo đạo đức khoa học chuẩn mực thì chắc chắn là không. Xin mời các bạn hãy đoạn thứ hai, chương mở đầu của cuốn *Ars magna*:

> Thuở sinh thời, Scipione dal Ferro ở Bologna đã giải được trường hợp lập phương cộng với lũy thừa bậc nhất bằng một hằng số, một lời giải rất đẹp và đáng khâm phục. Vì nghệ thuật đó vượt qua mọi sự tài giỏi và thông tuệ của một tài năng trần thế và thực sự là một món quà tặng trời cho đồng thời là một thử thách rất rõ ràng đối với khả năng trí tuệ của con người, bất kỳ ai tận tâm vào đó cũng đều phải tin rằng không có gì mà mình không thể hiểu được. Để ganh đua với ông ta, bạn tôi ông Niccolò Tartaglia ở Brescia, nhờ mong muốn chiến thắng đã giải được một trường hợp tương tự, khi bước vào cuộc đấu trí với Antonia Maria Fior, học trò cũ của Sciopione, và do đã cảm động trước sự mến khách và ân cần của tôi, đã đưa nó cho tôi. Vì bị lừa mị bởi những lời lẽ của Luca Pacioli, người khẳng định rằng không thể phát minh ra những công thức tổng quát hơn của ông ta được. Mặc dù tôi đã phát minh ra nhiều điều, như mọi người đều biết, nhưng tôi đã ngã lòng và không có ý định nghiên cứu tiếp nữa. Tuy nhiên, khi nhận được công thức của Tartaglia và tìm kiếm một chứng minh cho nó, tôi đã ngộ ra rằng có rất nhiều điều khác nữa có thể làm được. Theo đuổi ý nghĩ đó và với niềm tin ngày một gia tăng, tôi đã phát hiện ra nhiều thứ khác được trình bày ở đây, một phần là của tôi và một phần là nhờ Ludovico Ferrari, một học trò cũ của tôi.

Trong Chương XI ("*Về lập phương cộng với lũy thừa bậc nhất bằng một hằng số*") Cardano đã nhắc lại một cách ngắn gọn món nợ đó:

> Sciopio Ferro ở Bologna gần ba mươi năm trước đã phát hiện ra công thức này và trao nó cho Antonia Maria Fior ở Venice mà cuộc đấu trí của ông ta với Tartaglia ở Brescia đã cho Niccolò cơ hội phát hiện ra nó. Ông ta [Tartaglia] đã trao nó cho tôi để đáp lại tấm thịnh tình của tôi, mặc dù đã giữ lại phần chứng minh. Với sự trợ giúp này, tôi đã tìm lại

> được chứng minh dưới những dạng [khác nhau]). Đó là công việc rất khó khăn. Phiên bản của tôi như sau.

Tartaglia không hề dịu bớt trước lời cám ơn mà Cardano đã dành cho ông. Thực tế, trận công kích không những được đốt nóng hơn mà còn biến thành một trò phô diễn nhơ bẩn sự sỉ nhục vô cùng tàn nhẫn trước toàn bộ công chúng Italia. Trong khi bản thân Cardano kiềm chế tránh cãi cọ, thì người cộng sự nóng nảy của ông là Ludovico Ferrari lại vui vẻ nhảy vào đóng vai trò là người bảo vệ "đấng sáng tạo" của anh (theo lời của chính Ferrari). Đáp lại quyển sách của Tartaglia, Ferrari đã tung ra một *cartello* – tức một bức thư thách thức – phân phát tới 53 học giả và những người có chức trách trên khắp nước Italia. Ferrari đã áp dụng một phong cách hạ cấp độc ác: "Đọc những điều nhảm nhí của ông người ta có cảm giác đang đọc những truyện cười của Piovano Arlotto [một mục sư sống ở thế kỷ 15 nổi tiếng với những truyện cười dân dã]". Sau đó, anh ta tiếp tục khinh miệt và buộc tội chính Tartaglia đạo toán: "Trong số hơn một ngàn sai sót trong cuốn sách của ông, tôi nhận thấy trước hết ở mục 8 ông đã lấy kết quả của Giordano [tức nhà toán học Đức thế kỷ 13 Jordanus Nemorarius, thường được gọi là Jordanus de Nemore] làm kết quả của mình, mà không hề nhắc tới ông ấy, đó là sự ăn cắp". Bức *cartello* thứ nhất được tung ra ngày 10 tháng 2 năm 1547. Tartaglia nhận được vào ngày 13 và chỉ sáu ngày sau đã phản công lại. Đầu tiên, ông phàn nàn về thực tế là bản thân Cardano không buồn trả lời:

> Vậy tôi xin khuyên anh một lần nữa rằng trong trường hợp nếu như Ngài Gerolamo Cardano không có ý định viết thư cho tôi, sáng suốt thừa nhận rằng mình đã sai, thì ông ta không có lý do gì để phàn nàn về tôi cả... Chí ít thì anh

cũng nên đảm bảo chắc chắn rằng ông ta đã tự tay ký vào bức cartello này với tư cách là người cộng tác trong vụ tranh cãi này.

Đáp lại lời mời tranh luận công khai về toán học của Ferrari, Tartaglia đã tuyên bố rằng ông sẽ rất vui lòng tranh luận với chính Cardano. Rõ ràng, Tartaglia đã thấy là không hay ho gì nếu thi đấu với một thanh niên còn chưa có tên tuổi gì đặc biệt, bởi vì dẫu có thắng đi nữa thì cũng chẳng có ý nghĩa gì nhiều, nên ông thích trận thư hùng với Cardano hơn vì tiếng tăm trên khắp lục địa của ông ta đang nổi như cồn. Tuy nhiên, ở thời gian đó, Cardano đang muốn có một cuộc sống cân bằng (như ông đã từng khuyên các học giả nên sống theo phong cách "đọc các chuyện về tình yêu") nên ông đã im lặng.

Vào khoảng giữa 10 tháng 2 năm 1547 và tháng 24 tháng 7 năm 1548, Tartaglia và Ferrari đã trao đổi với nhau không ít hơn 12 *cartello* (6 thách thức và 6 đáp lại), tất cả đều được lưu hành trong giới trí thức thượng lưu. Mặc dù, giọng điệu chung là chê bai, nhưng các bức *cartello* đó cũng có thể được dùng như những tư liệu thú vị về tri thức của hai nhà toán học hàng đầu thời Phục Hưng. Những ý định tiếp tục kéo Cardano vào cuộc tranh luận của Tartaglia đã thất bại thảm hại. Năm 1548, Tartaglia được mời làm giảng viên môn hình học tại thành phố quê hương, Brescia. Tuy nhiên, do ấn tượng mạnh của những trao đổi của ông với Ferrari, nên việc bổ nhiệm sẽ phụ thuộc chủ yếu vào điều kiện đánh bại Ferrari trong cuộc thi đấu trước công chúng. Do đó, Tartaglia, miễn cưỡng buộc phải chấp nhận cuộc tranh luận. Điều kiện được thỏa thuận cho cuộc tranh cãi là 62 bài toán do hai đối thủ đề xuất (mỗi người 31 bài) – những bài toán đã được giới thiệu trong các *cartello* mà hai người trao đổi. Đa số những bài toán này chủ yếu là toán học, nhưng theo tinh thần thời Phục Hưng, cũng có một số câu hỏi thuộc các lĩnh vực khác, như kiến trúc, thiên văn, địa lý và cả quang học nữa.

Cuộc đấu trí đã xảy ra vào ngày 10 tháng 8 năm 1548, tại nhà thờ trong ngôi vườn Frati Zoccolanti, ở Milan. Tất cả những nhân vật quan trọng ở Milan đều có mặt, trong đó có cả tổng đốc Don Ferrante di Gonzaga, người được xem là vị trọng tài tối hậu. Ferrari tới với một đám đông lớn những người ủng hộ, trong khi Tartaglia chỉ có một người anh trai đi cùng. Cardano đánh tiếng để mọi người tin rằng lúc đó ông đang ở ngoài thành phố. Thật không may là không tồn tại bản ghi chép chính thức về cuộc đấu trí cũng như biên bản cuối cùng. Trong hai cuốn sách sau đó, Tartaglia đã giới thiệu một cách khá mơ hồ về quá trình diễn ra. Đặc biệt, ông đã buộc tội cử tọa can thiệp quá ồn ào, ngăn cản ông trình bày một cách đầy đủ những lập luận của mình. Tuy nhiên, những sự thật khô khan lại vẽ nên một bức tranh hơi khác. Tartaglia đã bỏ dở cuộc đấu trí trước khi có kết luận cuối cùng, ngay sau khi kết thúc ngày đầu tiên. Chúng ta cũng biết rằng ông đã bị từ chối trả lương sau một năm giảng dạy ở Brescia và đã bị buộc phải trở về công việc giảng dạy khiêm tốn ở Venice. Do đó, tất cả các dấu hiệu đều chỉ ra rằng Tartaglia đã phải chịu một thất bại đau đớn và nhục nhã ở Milan. Cardano cũng đã nhắc lại một cách sơ qua trong một số bài viết rằng Ferrari đã thắng Tartaglia một ván.

Còn về phần người thắng cuộc, Ludovico Ferrari, thì sự nghiệp của anh ta tiến vọt như tên lửa. Sau chiến thắng của mình, những lời mời tới tấp đến với anh ta như bươm bướm. Thậm chí, Ferrari còn từ chối cơ hội làm thầy dạy kèm cho hoàng tử để nhận một bổ nhiệm béo bở hơn, đó là chức định thuế cho tổng đốc Milan. Tuy nhiên, cuộc đời của ông kết thúc thật bất ngờ, và đó cũng là màn chót của vở kịch này.

Một lần ông trở về Bologna đâu đó sau năm 1556, Ferrari đi cùng với người chị góa bụa nghèo khổ, tên là Maddalena. Mặc dù không có bằng chứng trực tiếp chứng tỏ bà đã đầu độc Ferrari vào năm 1565, nhưng hành vi và hoàn cảnh sống dư dả sau đó của bà đã khiến người ta thực sự nghi ngờ. Hai tuần sau khi Ferrari chết, Maddalena lấy chồng và đã chuyển cho chồng toàn bộ tiền bạc và tài sản mà bà được kế thừa từ người em trai. Khi Cardano tới Bologna để xin lại những cuốn sách và các bản ghi chép của mình thì ông đã thấy chẳng còn gì hết. Chồng của Maddalena đã sở hữu tất cả và rõ ràng có ý định cho xuất bản một số tư liệu dưới tên đứa con trai từ cuộc hôn nhân trước của ông ta.

Lịch sử giải các phương trình bậc ba và bậc bốn đã đặt ra nhiều câu hỏi lý thú vượt ra ngoài phạm vi toán học. Câu chuyện này sẽ là không hoàn chỉnh nếu như không có sự suy xét về những vấn đề sở hữu trí tuệ và quyền sở hữu những thông tin khoa học. Trong những cuộc trao đổi đầy chua chát Tartaglia-Ferrari, Ferrari đã tuyên bố rằng Cardano thực sự cứu công thức của Tartaglia khỏi bị lãng quên và trồng nó trong một "khu vườn màu mỡ" – đó là cuốn *Ars magna*. Nhưng liệu điều đó có đúng không? Hay Tartaglia có quyền đáp lại rằng nếu không có công thức của ông thì ngôi vườn của Cardano liệu có còn là một cánh đồng tăm tối và đầy cỏ dại hay không? Rõ ràng là theo quan điểm của Tartaglia thì Cardano là kẻ đáng ghê tởm. Không chỉ phản bội lời thề, mà bằng cách làm như thế ông ta đã tước đi sự thừa nhận và tăm tiếng mà Tartaglia cảm thấy mình xứng đáng được hưởng. Vài dòng cảm ơn trong cuốn sách của Cardano không thể hàn gắn được vết thương đó. Thực tế còn lại là mọi dẫn chiếu về điểm này sẽ là theo "công thức Cardano" và theo cuốn sách của ông ta. Tồi tệ hơn nữa, Cardano còn thêm vào nhiều công thức và chứng minh của riêng mình cho tất cả các dạng phương trình bậc ba và bậc bốn, nên bản chất đột phá của công thức Tartaglia đã bị biến mất trong sự đánh tráo đó.

Nhưng còn quan điểm của Cardano thì sao? Dù là có thể thốt trịnh trọng hay không, nhưng chắc chắn là Cardano cảm thấy rằng ông có đủ tư cách, chí ít, là công bố những công trình hạt giống của chính mình về đề tài đó. Quan điểm của Cardano thậm chí còn đáng thông cảm hơn nữa một khi chúng ta nhận ra rằng (và chính ông ta cũng thế) Tartaglia không phải là người phát minh đầu tiên của công thức này mà là Sciopione dal Ferro. Vậy Tartaglia có quyền gì mà ngăn cấm công bố một công thức mà dal Ferro đã để lại cho hậu thế? Tuyên bố của Tartaglia rằng ông sắp cho xuất bản một cuốn sách về đại số mới cũng không đứng vững được. Thực tế, mặc dù ý tưởng ban đầu của Tartaglia đã đi trước khá xa Cardano, nhưng do ông bị phân tán vì theo đuổi nhiều dự án khác nên quyển sách về đại số mới của ông không bao giờ trở thành hiện thực.

Một vài ví dụ thời nay về hoạt động khoa học chung liên quan tới việc công bố các phát minh có thể giúp minh họa rằng vấn đề quyền sở hữu các phát minh không hề đơn giản. Các nhà thiên văn hằng năm đều có những đề xuất được tiến hành quan sát bằng kính thiên văn không gian Hubble. Sau quá trình đánh giá rất chi tiết những đề xuất đó bởi một hội đồng các chuyên gia, thì chỉ khoảng một trong số bảy đề xuất là thực sự được lựa chọn để thực hiện quan sát. Dữ liệu thu thập được sẽ gửi ngay cho người đề xuất chỉ vài ngày sau khi quan sát được tiến hành. Sau đó, thời gian được quyền sở hữu dữ liệu là một năm, trong đó chỉ có người đề xuất mới được tiếp cận tới dữ liệu đó. Người đề xuất có thể dùng thời gian này để phân tích và công bố kết quả. Sau một năm dữ liệu này sẽ trở thành công khai, tất cả các nhà thiên văn trên khắp thế giới đều có quyền sử dụng. Quá trình này được xác lập đầu tiên và trước hết để thừa nhận thực tế là những phát minh khoa học (đặc biệt là những phát minh được thực hiện bằng tiền của người đóng thuế) phải thuộc một cộng đồng rộng lớn và không được coi như một tài sản riêng. Thứ hai, các thủ tục cũng được thiết kế để ngăn cản những kẻ làm chậm bước tiến của khoa học chỉ ngồi không trên những dữ liệu quan trọng.

Trong khi đó, những công ty tư nhân, chẳng hạn, có liên quan tới việc lập mô hình toán học của diễn tiến thị trường chứng khoán, cũng phải cực kỳ giữ bí mật những phát hiện của họ, nhưng có lẽ cũng không hơn một số đầu bếp giữ kín những công thức chế biến các món ăn của họ.

Trên quan điểm thuần túy khoa học, thì sẽ là có lý nhất nếu gọi công thức giải phương trình bậc ba là "công thức dal Ferro", vì không nghi ngờ gì nữa ông là người đầu tiên đã tìm ra nó. Tuy nhiên, đây không phải là trường hợp đầu tiên cũng không phải cuối cùng trong đó những phát kiến khoa học không được đặt đúng tên người thực sự là tác giả của nó. Thái độ của Tartaglia đối với sở hữu trí tuệ rõ ràng là hơi đạo đức giả khi người ta xem xét tới những hoạt động của chính ông. Ví dụ, Tartaglia đã tạo ra bản dịch mang tên mình một số công trình của Archimedes, trong khi thực tế ông lại cho công bố một bản dịch từ tiếng Latinh của học giả người Flemish thế kỷ 13 tên là William van Moerbeke. Tương tự, ông đã giới thiệu lời giải một bài toán cơ học về một vật nặng trên mặt phẳng nghiêng mà không nói gì về tác giả của lời giải đó – nhà toán học Đức Jordanus de Nemore.

Toàn bộ chuỗi Ferro-Tartaglia-Cardano-Ferrari của các sự kiện vẫn còn là một trong những vụ gây tranh cãi nhất trong lịch sử toán học. Vì vậy không có gì lạ là rất nhiều nhà lịch sử toán học thích bập vào mảnh đất này. Theo quan điểm của chúng tôi, thì điều quan trọng là vở kịch này đã hạ màn, các nhà toán học đã biết cách giải các phương trình bậc ba và bậc bốn, ngay cả nếu một lý thuyết tổng quát về các phương trình còn chưa có.

Cardano chưa bao giờ phủ nhận số phận may mắn của mình. Trong cuốn *Cuốn sách của đời tôi*, ông viết

> Mặc dù hạnh phúc là một khái niệm hoàn toàn trái ngược với bản thân tôi, nhưng tôi có thể thành thật nói rằng thi thoảng tôi cũng có đạt tới một mức độ hạnh phúc nhất định. Nếu có điều gì đó là tốt đẹp trong cuộc đời mà chúng ta có thể tô điểm cho cái sân khấu của tấn trò đời này, thì đó là tôi đã không bị lừa mất những món quà tặng đó.

Như đã nói ở trên, việc giải các phương trình sẽ đóng vai trò cốt yếu nhiều thế kỷ sau trong việc phát biểu lý thuyết nhóm như là một ngôn ngữ "chính thức" của đối xứng trong tự nhiên và trong nghệ thuật, sự thật lịch sử sau có thể coi là một chuyện lạ thú vị. Cardano đã lập lá số tử vi cho 100 người xuất sắc nhất thuộc thế kỷ ông. Chỉ có một trong số những người ấy là nghệ sĩ, đó là họa sĩ người Đức Albrecht Dürer.

Để kết thúc câu chuyện này tôi cần nói thêm một trải nghiệm cá nhân. Vào mùa hè năm 2003, tôi quyết định phải tìm ra nơi sinh của người hùng đích thực của phương trình bậc ba – Scipione dal Ferro. Sau một chút cố gắng, tôi đã tìm ra nơi đó. Ngày hôm nay nó ở góc đường Guerrazzi và đường S. Petronio Vecchio ở Bologna. Một tấm biển đã sắp rơi gắn trên một bức tường hông có ghi ngôi nhà

Hình 42

mà dal Ferro đã sinh ra (hình 42). Tôi bấm chuông ở cửa vào mấy căn hộ một cách hú họa thì có một bà già ló ra cửa sổ ở tầng ba. Tôi giải thích cho bà bằng một thứ tiếng Italia giả cầy rằng tôi đang tìm nơi ở của Sciopione dal Ferro. Bà nói hãy đợi một chút để chồng bà đi xuống. Một cụ già rất dễ mến giải thích cho tôi bằng một thứ tiếng Anh pha lẫn tiếng Italia rằng trong ngôi nhà này chẳng còn gì cho biết rằng người đã có những đột phá quan trọng trong đại số học đã từng sống ở đây. Cả hai chúng tôi im lặng nhìn tấm biển vài ba phút rồi chia tay.

Sau các công trình xuất sắc của Ferro-Cardano-Ferrari, thì lẽ tự nhiên phải tin rằng *phương trình bậc năm*, tức phương trình $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, cũng sẽ giải được bằng một công thức. Thực tế, với niềm tin có được từ cuốn *Ars magna*, người ta kỳ vọng rằng lời giải sẽ ở ngay đâu đây thôi và điều đó đã thôi thúc những bộ óc toán học sắc sảo nhất lao vào săn tìm kho báu đó.

HÉT TO THẤT BẠI LỚN NHẤT CỦA NGƯƠI

Tác giả châm biếm Jonathan Swift (1667-1745), nổi tiếng nhất với tác phẩm *Gulliver du ký*, có viết một bài thơ vui vào năm 1727 nhan đề "Trí óc đàn bà". Đây là mấy dòng của bài thơ đó:

Vì chuyện tẻ cố mà lắng nghe
Ả gọi tế nhị là thô lỗ
Và đặt lời sâu cay đúng chỗ
Hét to lên thất bại lớn nhất của ngươi.

Câu chuyện tìm kiếm công thức giải phương trình bậc năm 250 năm sau Cardano là một trong những thất bại vĩ đại nhất. Nó bắt đầu với Rafael Bombelli (1526-1572), một người Bologna khác. Do sự trùng hợp lịch sử, Bombelli ra đời đúng vào năm dal Ferro qua đời. Là người nghiên cứu *Ars magna* với sự ngưỡng mộ vô bờ bến, Bombelli cảm thấy rằng sự trình bày của Cardano còn chưa đủ rõ ràng và nhất quán; theo lời của Bombelli: "Trong những cái ông nói còn khá là mù mờ". Do đó, Bombelli đã bỏ ra hai mươi năm viết một quyển sách khá có ảnh hưởng tên là *Đại số học*. Không giống như các nhà toán học Italia khác, Bombelli không phải là giáo sư đại học mà chỉ là một kỹ sư thủy lực. Đóng góp quan trọng lớn nhất của Bombelli là ý thức được rằng người ta không thể lảng tránh các căn bậc hai của số âm. Điều này đòi hỏi phải có một bước nhảy lớn về trí tuệ. Vậy, nói cho cùng, thì căn bậc hai của -1 là gì? Rõ ràng là không có một số bình thường (tức số thực) nào nhân với chính nó lại cho -1 cả, bởi vì ngay cả một số âm nhân với chính nó cũng cho kết quả dương. Tuy nhiên, nghiệm của phương trình bậc ba (xem Phụ lục 5) đôi khi lại tạo ra căn bậc hai của một số âm như một bước trung gian, ngay cả khi nghiệm cuối cùng là số thực. Cardano thấy rất khó hiểu đối với các số mà ông gọi là "*sophistic*" (ngụy biện) đó và kết luận rằng "chúng quỷ quyệt đến nỗi chẳng có ích lợi gì", và khi thực sự phải tính toán với chúng, thì như ông nói, ông làm như vậy bằng cách phải "xua đi những nhức nhối trong đầu". Trái lại, Bombelli đã có một tuệ giác phi thường để hiểu rằng những số mới là phương tiện cần thiết để bắt cầu qua hố ngăn cách giữa phương trình bậc ba (được diễn đạt bằng các số thực) với nghiệm cuối cùng (cũng là những số thực). Nói cách khác, trong khi cả bắt đầu cũng như kết thúc đều liên quan đến các số thực thì lời giải phải đi qua một thế giới mới của những "số ảo". Căn bậc hai của -1 được ký hiệu là *i* vào năm 1777 bởi nhà toán học vĩ đại người Thụy Sĩ Leonhard Euler. Các số trong viễn cảnh mới đó, được phát lộ trong công trình của Bombelli, giờ đây được gọi là *số phức* – nó là tổng của các số thực (tức tất cả các số thông thường) và các số ảo (tức những số có liên quan đến căn bậc hai của một số âm).

Có một bài học lịch sử cần phải rút ra ở đây. Trong suốt chiều dài lịch sử, sự nghiên cứu các phương trình đã một vài lần đem lại cho các nhà toán học sự thoáng hiện đầu tiên của các loại số mới. Có các số âm như -1, -2; các số vô tỷ như $\sqrt{2}$ là những số không thể biểu diễn được bằng các phân số; và qua công trình của Bombelli, thậm chí có cả số ảo như $\sqrt{-1}$. Ai biết được rồi sẽ có những điều gì sâu xa nữa đây xuất hiện khi giải phương trình bậc năm?

Trong các thế kỷ tiếp theo, việc phá vỡ bí ẩn của phương trình bậc năm đã trở thành một trong những thách thức hấp dẫn nhất của toán học. Thật không may, những lời giải được phát minh bởi dal Ferro và Ferrari (đối với phương trình bậc ba và bậc bốn, tương ứng) lại không giúp được gì nhiều. Chúng thể hiện những mẹo mực xuất sắc nhưng chuyên biệt chứ không phải là những nghiên cứu hệ thống có thể mở rộng cho các phương trình bậc cao hơn. Cái mà chúng ta thật cần là một lý thuyết bao quát hơn của các phương trình nói chung chứ không phải là những thử nghiệm với các trường hợp riêng lẻ. Nói bằng ngôn ngữ của y học thì toán học đi từ điều trị theo triệu chứng tới tìm hiểu nguyên nhân và các hiệu ứng phụ liên quan.

Một luật sư Pháp là François Viète (1540-1603) và nhà thiên văn Anh Thomas Harriot (1560-1603) là hai người đã đi những bước theo hướng đúng. Họ đã hoàn thiện các ký hiệu được dùng để mô tả các phương trình đại số (vốn rất cồng kềnh trong tác phẩm của Cardano) cũng như chính phương pháp giải. Viète cũng chính là người đưa vào thuật ngữ *coefficient* (có nghĩa là hệ số) để chỉ các số mô tả phương trình (ví như *a, b, c* trong phương trình $ax^2+bx+c=0$). Mặc dù không phải là nhà toán học chuyên nghiệp, nhưng Viète đã xuất hiện trong một trường hợp để cứu danh dự của cả Hội toán học Pháp. Năm 1593, ở cuối lời tựa cuốn sách *Ideae mathematicae* của mình, nhà toán học Bỉ Adriaan van Roomen (1561-1615) đã thách thức tất cả các nhà toán học thời ông giải một bài toán có liên quan đến một phương trình khủng khiếp bậc 45 (xem Phụ lục 6). Viên đại sứ Hà Lan ở Paris khoái chí nhận xét một cách móc máy với vua Henry IV rằng ở nước Pháp không có nhà toán học nào có thể giải được bài toán đó. Nhà vua lúng túng cho gọi Viète tới và ngài đã vô cùng kinh ngạc khi thấy một thần dân của mình có thể (theo huyền thoại) tìm được một nghiệm dương trong vòng ít phút. Sở dĩ ông giải lẹ như vậy là do đã phát hiện một hệ thức lượng giác nằm phía sau bài toán đó. Thực tế, Viète còn làm được nhiều hơn thế - ông đã chứng tỏ được rằng phương trình này có 23 nghiệm dương và 22 nghiệm âm.

Ý định nghiêm túc đầu tiên giải phương trình bậc năm, nhưng than ôi lại không thành công, là của một người Scotland tên là James Gregory (1638-1675). Người ta biết đến Gregory trước hết là nhờ chiếc kính viễn vọng (kính Gregory) do ông sáng chế ra. Trong năm trước khi ông mất (chỉ mới ở tuổi 36), ông đã đã bắt đầu ngờ rằng liệu có tìm được công thức giải phương trình bậc năm hay không. Tuy nhiên, ông lại phát hiện ra một hệ thức giữa nghiệm của các phương trình khác nhau và các hệ số của chúng. Bước tiếp sau thuộc một bá tước người Đức tên là Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708). Là một người có nhiều thành tựu từ chế biến pha lê cho tới đại số học. Tschirnhaus đã thảo ra được một phương pháp rất lý thú mà trong một thời gian cho hy vọng sẽ rọi được ánh sáng vào cuối đường hầm. Ý tưởng cơ bản ở đây thật đơn giản. Nếu bằng một cách nào đó quy được phương trình bậc năm về các phương trình bậc thấp hơn (ví như bậc bốn hoặc bậc ba, chẳng hạn), thì người ta có thể dùng các công thức nghiệm đã biết của các phương trình đó. Đặc biệt, bằng các cách thế thông minh, Tschirnhaus đã loại được các số hạng chứa x^4 và x^3 trong phương trình bậc năm. Thật không may, vẫn còn một trở ngại chính trong phương pháp của Tschirnhaus, mà chẳng bao lâu sau nhà toán học Đức Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) đã nhận thấy và sau nhiều nỗ lực theo hướng đó Tschirnhaus đã chịu thất bại.

Thế kỷ 18 chứng kiến sự quan tâm trở lại và một loạt các cuộc tấn công mạnh mẽ vào bài toán này. Một người Pháp là Étienne Bézout (1730-1783), người đã công bố một số công trình về lý thuyết các phương trình đại số, đã dùng các phương pháp hơi tương tự với Tschirnhaus, nhưng cũng không có kết quả. Tính tới thời điểm này thì các nhà toán học có sức sáng tạo dồi dào nhất của mọi thời đại đều đã bước vào cuộc đua.

Leonhard Euler (hình 43) là người có sức sáng tạo to lớn đến mức phải cần tới một tập sách dày cộp mới liệt kê hết các công trình đã được công bố của ông. Tổng lượng các công trình công bố của Euler về toán học và vật lý toán đã chiếm một phần ba tổng các công trình đã được công bố trong các lĩnh vực này của ba phần tư cuối của thế kỷ 18. Euler phỏng đoán rằng nghiệm của phương trình bậc năm có thể biểu diễn qua cỡ bốn đại lượng và ông kết luận với một giọng đầy hy vọng: "Người ta có thể ngờ rằng nếu việc khử được làm một cách thận trọng thì có thể dẫn tới một phương trình bậc bốn". Nói một cách khác, ông tin tưởng một cách lạc quan rằng bài toán có thể được quy về những bài toán đã được giải. Triết lý chung này là một đặc trưng của những tiến bộ trong toán học. Trong một chuyện tiếu lâm cũ, người ta hỏi một nhà toán học và một nhà vật lý rằng các anh sẽ làm gì nếu cần phải là (ủi) quần của mình, bàn là thì họ đã có sẵn nhưng ổ cắm điện thì ở phòng bên cạnh. Cả hai đều trả lời rằng họ sẽ mang bàn là sang phòng thứ hai và cắm điện ở đó. Bây giờ họ lại được hỏi sẽ làm gì nếu họ đang ở trong phòng có ổ cắm. Nhà vật lý thì trả lời rằng anh ta sẽ cắm trực tiếp bàn là vào ổ cắm. Trái lại, nhà toán học nói rằng anh ta sẽ đem bàn là sang phòng không có ổ cắm vì đây là bài toán đã được giải rồi.

Hình 43

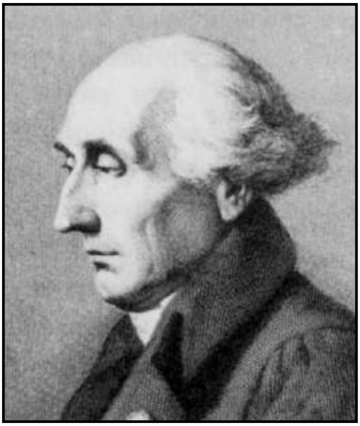
Mặc dù sự lạc quan của Euler, nhưng ông cũng không giải được phương trình bậc năm tổng quát. Tuy nhiên, ông đã chứng minh được rằng một số ít phương trình bậc năm, cụ thể như $x^5 - 5px^3 + 5p^2x - q = 0$(với p và q là hai số đã cho) đều giải được bằng một công thức. Điều này đã mở rộng cửa cho những nỗ lực tiềm tàng trong tương lai. Tiếp theo trên đường hướng này là một người Thụy Điển tên là Erland Samuel Bring (1736-1798). Là một thầy giáo dạy lịch sử ở Đại học Lund, nhưng trò giải trí của ông lại là toán học. Mà còn có câu đố nào hay hơn là giải phương trình bậc năm? Bring đã đạt được kết quả dường như là một bước tiến lớn tới gần lời giải. Cụ thể là ông đã tìm được một phép biến đổi toán học có thể quy phương trình bậc năm tổng quát ($ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$) về một dạng đơn giản hơn nhiều $x^5+px+q=0$. Thật không may, cái dạng gọn hơn và dường như dễ giải hơn đó không chỉ còn vấp phải một trở ngại không thể vượt qua, mà phép biến đổi quan trọng này của Bring lại không được chú ý tới và nó chỉ được phát hiện lại một cách độc lập vào thế kỷ 19 bởi nhà toán học Anh George Birch Jerrard.

Ba công trình tiếp theo là của ba nhà toán học làm việc gần như đồng thời ở ba nước khác nhau cũng không dẫn tới lời giải. Nhưng, những công trình sâu sắc của các nhà toán học đó đã đưa được một ý tưởng mới đầy hứng khởi vào công cuộc tìm kiếm. Đặc biệt, họ đã chứng tỏ được rằng những tính chất của các hoán vị của các nghiệm (được coi là tồn tại) của một phương trình có thể có liên quan đến chuyện phương trình đó có giải được bằng một công thức hay không. Vì về mặt lịch sử đây là điểm kết nối đầu tiên giữa nghiệm của các phương trình và khái niệm đối xứng, nên tôi sẽ giải thích ngắn gọn nguyên lý cơ bản của nó. Ví dụ, hãy xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với a, b, c là các số đã biết. Người ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu hai nghiệm của phương trình (được cho bởi công thức ở trang 60 được ký hiệu là x_1 và x_2 thì tổng x_1+x_2 và tích x_1x_2 của nó đều có thể biểu diễn qua các hệ số a, b, c của phương trình (xem Phụ lục 7). Cụ thể là $x_1+x_2=-b/a$ và $x_1x_2=c/a$. Nói cách khác, trong phương trình $x^2-9x+20=0$ thì tổng hai nghiệm bằng 9 và tích hai nghiệm bằng 20. Công thức cho nghiệm ở trang 60 có thể được biểu diễn như tổ hợp của x_1+x_2 và x_1x_2. Cụ thể:

$$\frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]$$

Điểm quan trọng cần lưu ý ở đây là biểu thức trên là đối xứng đối với sự đổi chỗ hai nghiệm x_1 và x_2, tức là công thức trên không thay đổi khi chuyển vị x_1 và x_2. Câu hỏi do một người Pháp là Alexandre-Thésophile Vandermonde (1735-1796) và một người Anh là Edward Waring (1736-1798) đặt ra là: liệu nghiệm của phương trình bậc năm, và thực tế là của một phương trình bậc bất kỳ, có được biểu diễn bằng một hệ thức đối xứng tương tự hay không. Điều đó, về nguyên tắc, có thể dẫn tới một công thức của nghiệm. Ý tưởng này đã bị tóm lấy bởi một người mà Napoleon Bonaparte coi là "cây kim tự tháp cao ngất của các khoa học toán học", đó là Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Lagrange (hình 44) sinh ra ở Turin (nay là Italia) nhưng gia đình ông, về phía cha, một phần có gốc gác là người Pháp, và chính ông cũng coi mình là người Pháp "hơn" là người Italia. Cha ông là người ban đầu vốn giàu có, nhưng đã tiêu xài phung phí hết cả gia sản của gia đình vào đầu cơ, nên chẳng còn gì để lại cho con cả. Sau này, Lagrange đã mô tả tai họa kinh tế đó như một điều tốt nhất đã xảy ra đối với ông: "Nếu tôi được kế thừa một tài sản lớn thì chắc là đời tôi đã không gắn bó với toán học".



Hình 44

Trong một chuyên luận xuất sắc của ông (được công bố ở Berlin) nhan đề *Những suy nghĩ về cuộc cách mạng của các phương trình đại số*, Lagrange là người đầu tiên đã tổng quan lại một cách kỹ lưỡng những đóng góp của Bézout, Tschirnhaus và Euler. Sau đó ông đã chứng minh rằng mọi thủ thuật mà người ta đã dùng để nhận được nghiệm của các phương trình bậc nhất (tuyến tính), bậc hai, bậc ba và bậc bốn đều có thể được thay bằng một quy trình nhất quán. Tuy nhiên, ở đây xuất hiện một bất ngờ khó chịu. Đối với các bậc 2, 3 và 4, các phương trình đều được giải bằng cách quy về các phương trình thấp hơn một bậc mà ta đã biết cách giải (tức là bậc 4 quy về bậc ba, v.v...). Đúng khi quy trình này đụng đến bậc năm, thì một điều bất ngờ đã xảy ra. Phương trình kết quả thay vì là bậc 4 hóa ra lại là phương trình bậc 6! Phương pháp đang vận hành ngon lành đối với các bậc 2, 3, 4 hóa ra lại thất bại cay đắng ở bậc 5. Thất vọng, Lagrange kết luận rằng "do đó rất có thể những phương pháp này không dẫn tới nghiệm của phương trình bậc 5 – một trong những bài toán quan trọng và nổi tiếng nhất của đại số học".

Như một cách thoát ra khỏi ngõ cụt, Lagrange đi vào một thảo luận chung hơn về các phép hoán vị. Cần nhớ rằng hoán vị là các phép tạo ra những cách sắp xếp khác nhau của các đối tượng, như các phép biến đổi *ABC* thành *BAC* hay *CBA*. Lagrange đã có một phát minh quan trọng rằng các tính chất của phương trình và khả năng giải được hay không của nó phụ thuộc vào một số đối xứng của nghiệm đối với các phép hoán vị.

Ngay cả cái nhìn mới và sâu sắc của Lagrange, được coi như một đột phá, cũng tỏ ra là chưa đủ để giải phương trình bậc 5. Vẫn còn lạc quan rằng, sự phân tích của ông có thể sẽ phát sinh ra một đột phá cần thiết, ông viết, "Tôi hy vọng sẽ còn quay trở lại phương trình này một lần khác, còn ở đây tôi hài lòng là đã đặt được nền móng cho một lý thuyết mới và tổng quát đối với chúng ta". Nhưng lịch sử đã cho thấy, Lagrange đã không quay lại phương trình bậc năm nữa. Hai ngày trước khi mất ông đã tổng kết cuộc đời mình như sau: "Sự nghiệp của tôi đã đến lúc kết thúc; tôi đã có một chút danh tiếng trong toán học. Tôi không căm ghét ai cả, cũng không làm điều gì xấu cho ai, nên sẽ thật thanh thản ra đi".

Còn có một bài toán đại số khác được tranh luận sôi nổi trong giới toán học cùng vào khoảng thời gian đó, và nó cũng có những hệ quả đối với những ý định giải phương trình bậc năm. Câu hỏi ở đây là: Tất cả các phương trình (bậc bất kỳ) liệu có ít nhất một nghiệm không? Ví dụ, làm thế nào chúng ta biết được rằng liệu có một giá trị nào đó của x để phương trình $x^4+3x^3-2x^2+19x+253=0$ được nghiệm đúng hay không? Hay nói một cách chính xác hơn, nếu chúng ta có một phương trình bậc n (trong đó n là một số nguyên 1, 2, 3, 4,...) và cho phép nghiệm có thể là các số thực hoặc phức (có liên quan tới $i=\sqrt{-1}$), thì phương trình đó sẽ có bao nhiêu nghiệm cả thảy? Chúng ta đã biết đáp án cho câu hỏi đó trong trường hợp phương trình bậc hai – cụ thể là có đúng hai nghiệm. Nhưng đối với $n=5$ hay $n=17$ thì sao? Mặc dù nhiều nhà toán học, kể cả Leibniz, Euler hay Lagrange, những người có ý định trả lời câu hỏi đó, nhưng phát biểu khẳng định dứt khoát đã phải nhường lại cho một nhân viên kế toán người Thụy Sĩ là Jean-Robert Argand (1768-1822) và người được coi là "ông hoàng của toán học" – Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855; hình 45).

Hình 45

Thiên tài của Gauss được thừa nhận từ khi ông mới 7 tuổi. Ở tuổi đó ông đã tính nhẩm được ngay tổng của tất cả các số nguyên từ 1 đến 100, bằng cách nhận xét rằng tổng này gồm 50 cặp, mỗi cặp bằng 101. Trong luận án tiến sĩ của ông viết năm 1799, Gauss đã cho chứng minh đầu tiên của một định lý mà sau này gọi là định lý cơ bản của đại số - định lý này phát biểu rằng mỗi phương trình bậc *n* có đúng *n* nghiệm (kể cả nghiệm thực và nghiệm phức). Chứng minh đầu tiên này của Gauss có một khe hở, nhưng sau đó, trong suốt cuộc đời, ông đã cho thêm ba cách chứng minh nữa, tất cả đều chặt chẽ. Chứng minh của Argand, được công bố năm 1814 mới thực sự là chứng minh hoàn hảo đầu tiên.

Định lý cơ bản đã chứng minh một cách dứt khoát rằng phương trình bậc năm tổng quát phải có đúng năm nghiệm. Nhưng các nghiệm này có thể tìm được bằng một công thức không? Cũng trong năm Gauss công bố chứng minh đầu tiên của định lý cơ bản, ông cũng đã bày tỏ sự hoài nghi của mình về nghiệm tính theo công thức của phương trình bậc năm: "Sau khi những nỗ lực của nhiều nhà hình học cho thấy ít có hy vọng giải được phương trình bậc năm bằng đại số, thì ngày càng thấy rõ rằng việc giải phương trình bậc năm là không thể và mâu thuẫn". Ông còn thêm một nhận xét đầy kích thích: "Có lẽ cũng không khó khăn lắm để chứng minh được một cách hoàn toàn chặt chẽ sự không thể giải được đối với phương trình bậc năm". Nhưng Gauss đã không công bố một lời nào khác về chủ đề này.

Những thất bại lặp đi lặp lại đối với những người săn tìm nghiệm của phương trình bậc năm trong hơn hai thế kỷ đã thúc đẩy một nhà lịch sử toán học người Pháp Jean Étienne Montucla (1725-1799) dùng những ẩn dụ quân sự để mô tả cuộc công kích vào phương trình bậc năm: "Những thành lũy được dựng lên khắp nơi, vây quanh vị trí quân sự quan trọng cuối cùng này, bài toán đã tự bảo vệ mình một cách kiên cường. Ai sẽ là thiên tài may mắn dẫn dắt cuộc tấn công hay buộc nó phải đầu hàng"?

Do một sự trùng hợp lịch sử khác, những loạt tấn công cuối cùng và kết thúc vào phương trình bậc năm lại diễn ra đúng vào năm Montucla qua đời. Giống như trường hợp phương trình bậc ba và bậc bốn, giai đoạn mới này cũng khởi đầu bằng một người Italia.

Paolo Ruffini (1765-1822; hình 46) sinh ở Valentano, Italia. Ông là con của bác sĩ Baslio Ruffini và bà Maria Francesca Ippoliti. Khi Ruffini ở tuổi thiếu niên thì gia đình chuyển đến Reggio ở gần Modena, và chính ở Modena này Ruffini đã học toán, y học, văn học, triết học, và ông tốt nghiệp năm 1788. Là người có nhiều tài năng khác thường, ở cùng thời gian đó, Ruffini đã hành nghề y và dạy toán. Sau cuộc Cách mạng Pháp, là thời kỳ rất nhiễu nhương. Quân đội Pháp do Napoleon chỉ huy đã chiếm hết thành phố này đến thành phố khác ở Italia và đã chiếm Modena vào năm 1796. Ruffini ban đầu được bổ nhiệm là đại diện của Hạ viện nước Cộng hòa Cisalpine do Napoleon lập nên, chỉ không được bổ nhiệm giảng dạy do ông từ chối tuyên thệ trung thành với nước cộng hòa mới. Thật lạ là trong thời kỳ lộn xộn như vậy mà Ruffini đã hoàn thành một công trình quan trọng nhất của đời ông. Ông tuyên bố là đã chứng minh được rằng phương trình bậc năm tổng quát không thể giải được bằng một công thức chỉ chứa các phép tính đơn giản như cộng, trừ, nhân chia và khai căn.

Hình 46

Chúng ta cần dừng lại đây một chút để đánh giá tầm quan trọng tuyên bố của Ruffini. Công thức tính nghiệm của phương trình bậc hai, về căn bản, đã được biết từ thời Babylon. Công thức nghiệm của phương trình bậc ba đã được tìm ra bởi Ferro, Tartaglia, Cardano. Còn Ferrari đã tìm ra với phương trình bậc bốn. Tất cả các công thức đó đều được biểu diễn qua các phép tính số học đơn giản và phép khai căn. Sau đó là hai thế kỷ rưỡi của kỳ vọng không thành, trong đó một số các nhà toán học xuất sắc nhất đã thử tìm ra một công thức cho phương trình bậc năm, nhưng đều thất bại. Giờ đây, Ruffini lại tuyên bố ông có thể chứng minh được rằng phương trình bậc năm là không thể giải được bằng một công thức loại như vậy, bất kể người ta có nỗ lực đến thế nào. Điều này đã thể hiện một cuộc cách mạng đầy kịch tính trong tư duy về các phương trình. Các nhà toán học đã quá quen với thực tế là một số phương trình là rất khó giải, nhưng chứng minh ở đây của Ruffini được cho là chứng tỏ rằng trong trường hợp phương trình bậc năm, sự nỗ lực đã là vô ích ngay từ đầu.

Ruffini đã công bố chứng minh của ông trong một chuyên luận hai tập nhan đề *Teoria generale delle equazioni* (*Lý thuyết tổng quát của các phương trình*) xuất bản năm 1799. Tuy nhiên, chứng minh của ông là cực kỳ phức tạp, và những suy luận nhức óc làm cho rất khó theo dõi suốt 516 trang của cuốn sách. Không có gì đáng ngạc nhiên là phản ứng của giới toán học may lắm chỉ là hoài nghi và ngờ vực. Ruffini có gửi một bản của cuốn *Teoria* cho Lagrange vào năm 1801, nhưng người nhận được không trả lời. Vẫn không ngã lòng, ông gửi tiếp một bản thứ hai, và viết:

> Không biết là ngài có nhận được quyển sách tôi gửi hay không, nhưng tôi cứ gửi tiếp bản thứ hai này. Nếu như tôi có sai sót trong chứng minh của mình hoặc nếu tôi có nói

> điều gì đó là mới nhưng thực tế lại không là mới và cuối cùng nếu tôi viết một quyển sách chẳng có lợi ích gì, thì tôi mong ngài hãy nói thật cho tôi biết.

Cả bức thư này Lagrange cũng không trả lời. Nhưng Ruffini vẫn cố một lần cuối vào năm 1802, với những dòng mở đầu ca ngợi các công trình của Lagrange:

> Không ai có quyền hơn... để nhận được quyển sách mà tôi đã mạo muội gửi cho ngài... Khi viết quyển sách này, chủ yếu là tôi muốn chứng minh sự không thể giải được của các phương trình bậc cao hơn 4.

Vẫn không có lời đáp.

Để đáp trả lại sự tiếp nhận lạnh nhạt công trình của mình, Ruffini dự định sẽ công bố những chứng minh chặt chẽ hơn và ít trừu tượng hơn vào năm 1803 và 1806. Ông cũng đã thảo luận chứng minh này với hai người bạn là các nhà toán học Gian-francesco Malfatti (người đã xuất bản một chuyên luận về phương trình bậc 5 vào năm 1771) và Pietro Paoli. Những cuộc nói chuyện với Paoli đã dẫn tới phiên bản cuối cùng của chứng minh được công bố năm 1813, trong một bài báo nhan đề "Những suy nghĩ về nghiệm của các phương trình đại số tổng quát". Thật không may, ngay cả chứng minh được coi là "trong suốt" hơn này cũng không gây được chú ý nào của giới toán học.

Trong một báo cáo gửi cho đức vua nhan đề "Báo cáo lịch sử về sự tiến bộ của các khoa học toán học từ năm 1709", nhà toán học và thiên văn Pháp Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749-1822) cũng chỉ nhắc mấy lời ngắn ngủi về Ruffini. Tuy nhiên, ông lại dùng một thứ ngôn ngữ khá là lấp lửng: "Ruffini đề nghị chứng minh rằng điều đó là không thể". Ruffini tuyệt vọng đã lập tức phản đối: "Tôi không chỉ đề xuất chứng minh mà trong thực tế tôi đã chứng minh được." Ngay cả sự trao đổi lại đó cũng không tạo được sự thừa nhận chung của những người đương thời và những người kế tục đối với chứng minh của Ruffini. Còn tệ hại hơn nữa, Delambre còn giải thích cho Ruffini rằng đừng có hy vọng chờ đợi một câu trả lời dứt khoát, bởi vì dù những người phản biện của ông [các nhà toán học Lagrange, Lacroix, và Legendre] dù có đi đến quyết định nào đi nữa [về sự đúng hay sai của chứng minh đó] thì họ cũng phải làm việc cật lực để đi đến ủng hộ hay từ chối chứng minh của ông. Từ những lời bình luận mà ông già Lagrange đã nói với nhà khoa học và nhà dược học Gaultier de Claubry, ta có thể suy ra rằng, mặc dù nói chung ông có ấn tượng với công trình của Ruffini, nhưng về mặt trí tuệ ông hoàn toàn không ngả về phía chấp nhận một ý niệm có tính cách mạng như là sự không thể giải được phương trình bậc 5 bằng một công thức. Do đó, Lagrange đã không bao giờ có những phát biểu công khai liên quan đến chứng minh của Ruffini.

Tuyệt vọng, Ruffini đã gửi chứng minh của ông cho Hội Hoàng gia London. Ông đã nhận được lời đáp rất lịch sự nói rằng trong khi có một số ít thành viên của hội đã đọc công trình của ông và thấy rất thỏa mãn, nhưng chính sách của Hội là không công bố sự ủng hộ chính thức đối với các chứng minh. Một nhà toán học xuất sắc đã xác nhận sự đúng đắn của công trình Ruffini là Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Năng suất làm việc của Cauchy thật là phi thường (ông đã công bố 789 bài báo về toán học – một con số gây choáng váng) đến nỗi đến một lúc ông phải lập ra một tạp chí riêng của ông. Trong một bức thư nhận được 6 tháng trước ngày mất của Ruffini, Cauchy, nói chung vốn vẫn dè sẻn lời khen, đã viết:

> Công trình của ông về lời giải tổng quát của các phương trình là một công trình, mà theo tôi, đáng được các nhà toán

> học chú ý, và nó, theo đánh giá của tôi, đã chứng minh được một cách đầy đủ tính không giải được của các phương trình tổng quát có bậc lớn hơn 4... Hơn nữa, tôi muốn nói thêm rằng công trình của ông về tính không giải được cũng đúng là cái nhan đề của một bài giảng mà tôi đã giảng cho một số viện sĩ của Viện hàn lâm.

Ngay cả với đánh giá của Cauchy thì chứng minh của Rufini cũng không được biết đến rộng rãi hay được chấp nhận. Đa số các nhà toán học vẫn còn thấy những lập luận của ông khó hiểu đến nỗi họ không xác nhận chắc chắn được sự đúng đắn của chúng.

Nhưng liệu có đúng là Ruffini đã chứng minh được phương trình bậc năm là không thể giải được bằng một công thức chứa các phép tính đơn giản? Với sự am hiểu của hậu thế sau khi mọi chuyện đã qua, chúng ta có thể nói rằng ông hoàn toàn chưa chúng minh được nó. Còn có một lỗ hổng quan trọng trong chứng minh của ông, cụ thể là trong chứng minh ông đã dùng một giả thiết mà không thấy rằng chính cái giả thiết ấy cũng cần phải chứng minh. Thay vì, ông lại thỏa mãn với nhận xét rằng mọi giả thiết khác sẽ dẫn đến tình huống phức tạp hơn, nên "ta hoàn toàn có thể vứt bỏ nó". Tuy nhiên, sự thiếu hoàn thiện này không hề làm mất tính sáng tạo độc đáo của công trình đó. Thực tế, không có người đương thời nào của Ruffini xác định được lỗ hổng trong chứng minh của ông. Ruffini chính là người đã làm được một sự thay đổi có tính cách mạng trong cách tiếp cận bài toán về các phương trình. Thay vì ra sức tìm cách giải phương trình bậc năm, ông đã nhanh chóng chuyển nỗ lực của mình sang tìm cách chứng minh rằng nó không thể giải được.

Ngày nay khi tiến hành đánh giá công trình của Ruffini, chúng ta thấy rằng thực ra ông đã làm được nhiều hơn là chỉ thay đổi những ý tưởng về phương trình bậc năm. Ông đã đưa các mối quan hệ giữa nghiệm của các phương trình bậc ba và bậc năm với một số phép hoán vị tiến lên thêm một bước nữa. Điều này đánh dấu sự bắt đầu của quá trình chuyển tiếp từ đại số truyền thống chỉ làm việc với các con số sang cội nguồn của lý thuyết nhóm liên quan tới những phép toán giữa các phần tử có bản chất bất kỳ. Cần nhớ rằng các phần tử của nhóm có thể là bất cứ thứ gì từ các số nguyên tới các đối xứng của cơ thể con người. Sự ra đời của đại số trừu tượng đã lấp ló ở phía chân trời.

Ruffini còn là người vô cùng tận tâm. Một lần ông đã từ chối một ghế giảng dạy về toán ở Padua vì ông không muốn bỏ rơi những gia đình mà ông đã phục vụ với tư cách một bác sĩ. Vô cùng tận tụy với các bệnh nhân của mình, Ruffini đã mắc bệnh thương hàn khá nghiêm trọng trong trận dịch 1817-1818. Ông đã dùng kinh nghiệm xương máu của mình viết nên quyển sách *Hồi ức về bệnh sốt phát ban truyền nhiễm*. Mặc dù đã yếu đi nhiều, ông vẫn tiếp tục tới thăm bệnh nhân nhưng cũng không từ bỏ nghiên cứu toán học. Tháng 4 năm 1822, ông đã bị đột quỵ do căn bệnh viêm màng tim kinh niên và qua đời một tháng sau. Điều lạ lùng là, sau khi ông mất, công trình của ông vẫn hoàn toàn bị lãng quên, và ngoài Cauchy ra thì những nhà toán học sau ông, về căn bản, đã phải phát minh lại những ý tưởng của ông.

Đây là bối cảnh cho hai người trẻ tuổi có lẽ cũng là hai nhân vật bi kịch nhất trong lịch sử khoa hoc xuất hiện. Niels Henrik Abel người Thụy Điển và Évariste Galois người Pháp sẽ là những người vĩnh viễn làm thay đổi đường hướng phát triển của đại số. Những câu chuyện về cuộc đời của hai cá nhân phi thường này sẽ làm rung động mọi con tim nên tôi cảm thấy buộc phải mô tả một cách chi tiết trong hai chương tiếp sau.

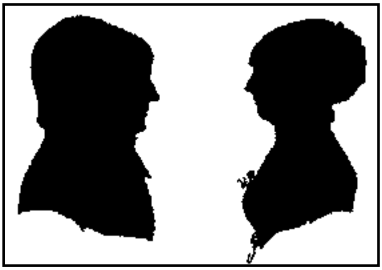
IV

Nhà toán học nghèo khổ

Những dòng đầu tiên của tiểu thuyết *Câu chuyện tình yêu* của Erich Segal viết: "Bạn có thể nói gì về một người con gái 25 tuổi xuân đã qua đời? Mà nàng thì đẹp, và thông minh, nàng yêu Mozart và Bach. Và cả ban nhạc Beatles và tôi nữa". Người ta có thể mượn mấy câu tóm tắt đượm buồn trên để nói về Évariste Galois (1811-1832) và Niels Henrik Abel (1802-1829). Đối với Évariste Galois câu đó sẽ có thể như thế này: "Bạn có thể nói gì về chàng trai 20 tuổi đã qua đời? Mà chàng thì lãng mạn, và thiên tài. Chàng yêu toán học. Và chàng đã qua đời vì bị hiểu nhầm và tự hủy hoại mình". Còn đối với Abel: "Bạn có thể nói gì về chàng trai 26 tuổi đã qua đời? Mà chàng thì nhút nhát, và thiên tài. Chàng yêu toán học và sân khấu. Và chàng buộc phải chết vì đói khổ". Nhà toán học Thụy Điển Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) đã mô tả những thành tựu toán học của Abel như sau: "Những công trình đẹp nhất của Abel thực sự là những bài thơ trữ tình với vẻ đẹp kiêu sa... đã vượt lên trên những điều tầm thường tẻ nhạt của cuộc đời và thăng hoa từ chính tâm hồn hơn bất cứ một thi sĩ nào, theo nghĩa thông thường của từ này, có thể tạo ra". Nhà toán học lớn người Áo Emil Artin (1898-1962) đã viết về Galois: "Ngay từ khi tôi mới theo nghiệp toán, tôi đã bị mê hoặc bởi lý thuyết cổ điển của Galois. Sự quyến rũ của nó đã buộc tôi phải trở đi trở lại với lý thuyết đó nhiều lần". Thực tế thì thiên tài của Abel và Galois chỉ có thể so được với ngôi sao siêu mới – một ngôi sao bùng nổ ngắn ngủi nhưng rực sáng hơn hết thảy mọi ngôi sao trong thiên hà của nó.

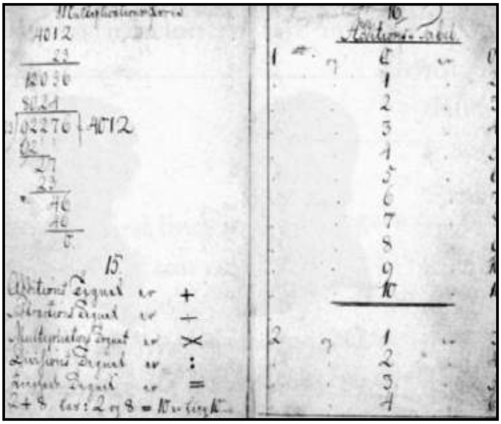
ABEL - NHỮNG NĂM TUỔI TRẺ

Niels Henrik Abel sinh ngày 5 tháng 8 năm 1802. Ông là con trai thứ hai của mục sư đạo Tin lành Søren Georg Abel và bà Anne Marie Simonsen, con gái một thương gia đường thủy (hình 47 là hình nhìn nghiêng của cha và mẹ Niels Henrik). Vài năm sau khi Abel ra đời, mẹ ông mới cho biết rằng bà đã đẻ non trước ba tháng và đứa bé sơ sinh chỉ cho thấy dấu hiệu của sự sống sau khi được tắm trong rượu vang đỏ. Sự kết hợp không mấy thuận giữa một người cha thuộc dòng dõi mục sư lâu đời và một người mẹ xinh đẹp còn đam mê niềm vui trần thế không hứa hẹn một cuộc hôn nhân hạnh phúc. Trước khi Henrik hai tuổi, người cha nhậm chức mục sư ở làng Gjerstad thay cho cha ông. Na Uy, trong những năm đó là một phần của Đan Mạch, luôn xảy ra chiến tranh, đầu tiên ở biển với hạm đội Anh và sau đó trên đất liền với Thụy Điển. Kết quả những vụ phong tỏa đường biển của Na Uy bởi tàu chiến Anh đã dẫn đến những hậu quả nghiêm trọng. Toàn bộ việc xuất khẩu gỗ đã bị dừng vào giữa năm 1808 và buôn bán lương thực từ Đan Mạch trở nên cực kỳ nguy hiểm nên chẳng được là bao. Nạn đói tràn lan khắp Na Uy vào năm 1809. Mục sư Abel phải chống chọi với nạn đói trong giáo phận của mình bằng cách khuyên giáo dân ở Gjerstad ăn thịt ngựa, điều mà trước kia đã bị cấm.



Hình 47

Niels Henrik được cha dạy học ở ngay trong nhà thờ cho đến tuổi 13. Vị mục sư không phải đảm nhiệm công việc dạy học này một cách được chăng hay chớ, mà ông soạn hẳn một cuốn giáo khoa viết tay để dạy cho các con ông. Cuốn sách bao gồm cả ngữ pháp, địa lý, lịch sử và toán học. Điều ngạc nhiên là ngay ở trang đầu của mục phép cộng (hình 48) đã chứa ngay một lỗi tổ bố: $1 + 0 = 0$! May mắn thay, thế giới toán học đã không mất đi một trong những ngôi sao chói sáng nhất vì cái thông tin ban đầu tai hại đó. Năm 1815, Niels Henrik được gửi đến Trường Dòng ở Christiania (nay là Oslo). Có lẽ, đời sống gia đình sa sút trong một ngôi nhà mà cả cha mẹ đều ngày càng chìm sâu vào rượu chè, còn người mẹ thì phóng túng với những quan hệ tình dục, đã hối thúc cậu bé phải sớm ra đi. Cha ông viết: “Cầu Chúa bảo vệ cho con! Nhưng cha không khỏi lo lắng khi phải gửi con vào cái thế giới suy đồi đó.”



Hình 48

Niels Henrik nhập trường Dòng đúng lúc trường này ở trong tình trạng khá tồi tệ trong lịch sử của nó. Việc mở Đại học Christiania vài năm trước đó đã lấy đi của trường Dòng tất cả những giáo viên giỏi nhất, để lại rặt những người không đủ tiêu chuẩn. Đặc biệt, thầy dạy toán, một ông Hans Peter Bader nào đấy, là một con người tàn nhẫn, ông ta thường xuyên đánh đập học trò tàn tệ. Điểm số của Niels Henrik ban đầu chỉ kha khá, thậm chí mặc dù cậu ít quan tâm đến những ngày học dài dằng dặc và buồn tẻ đó. Cậu có nguy cơ rơi vào tình trạng trầm cảm, khi không có bạn bè, đúng như sau này cậu đã chẩn đoán: "Do tình cờ mà thể trạng của tôi khiến cho tôi tuyệt đối không thể, hay chí ít là rất khó khăn, chịu được sự cô đơn. Khi đó tôi trở nên buồn bã và không có tâm trạng làm việc". Vào những năm sau đó, cách trốn tránh gánh nặng của bổn phận không tránh được của cuộc sống hàng ngày là nhà hát. Ở đó, cậu có thể thả mình vào cuộc sống của các nhân vật ảo, thay vì phải vật lộn giải những bài toán mà cậu không bao giờ được hướng dẫn một cách tử tế. Niels Henrik là người nhút nhát và bất an. Mối quan hệ của cậu với những người khác giới rất hạn chế, không phải chỉ khi là học sinh mà cả sau này cho đến lúc cuối đời. Vào cuối năm 1816, vì thành tích học tập của cậu ở trường tụt dốc, và sau khi đã bị ông Bader đánh đập vài lần, cậu đã phải rời trường một thời gian ngắn. Điểm của cậu tụt thấp đến nỗi năm 1817 cậu chỉ được phép học dự thính. Tuy nhiên, tháng 11 năm 1817, một sự kiện định mệnh ở trường Dòng đã đánh dấu một bước ngoặt quan trọng trong cuộc đời của Abel. Ngày 16 tháng 11, một học sinh là Henrik Stoltenberg bị bệnh sốt thần kinh kèm theo sốt phát ban. Một tuần sau thì cậu ta chết. Tám bạn cùng lớp của Stoltenberg đã ký đơn tố cáo thầy dạy toán Bader không chỉ dùng nắm đấm đánh đập học sinh này một cách tàn bạo, mà hơn thế, ông ta còn tiếp tục đấm đá sau khi Stoltenberg tội nghiệp đã bất lực ngã xuống nền nhà. Mặc dù pháp y không bao giờ khẳng định cái chết của Stoltenberg là do bị đánh đập, nhưng Bader cũng đã bị đuổi việc.

Để thay thế, nhà trường đã thuê thầy Bernt Michael Holmboe vốn là học sinh cũ của trường, người chỉ hơn Abel có 7 tuổi. Holmboe đưa vào một chương trình học mới bắt đầu bằng việc dạy cho học sinh hiểu được một cách đầy đủ các ký hiệu toán học. Chẳng bao lâu sau ông đã phát hiện ra rằng ước mơ của mỗi thầy giáo dạy toán đã thực sự xuất hiện trong lớp ông – ông đã có trong tay một thiên tài. Sau khi học vèo vèo hết chương trình quy định, Abel, dưới sự khuyến khích đầy nhiệt tình và giàu cảm hứng của Holmboe, đã bắt đầu lao vào những tác phẩm gốc của các nhà toán học lớn như Euler, Newton, Laplace, Gauss, và đặc biệt là Lagrange. Holmboe không thể kiềm chế nổi sự ngưỡng mộ đối với Abel. Trong phiếu nhận xét học sinh năm 1819, ông đã phải thốt lên: "Một thiên tài toán học xuất sắc". Trong năm sau, Abel thậm chí còn đi xa hơn nữa. Đánh giá của Holmboe được viết cho tất cả các môn học trong trường: "Với một thiên tài không thể tin nổi đó, em đã có cả mối quan tâm và niềm đam mê không bao giờ cạn đối với toán học. Do đó, rất có thể, nếu em ấy được sống thì nhất định sẽ trở thành một nhà toán học vĩ đại". Tất nhiên, ban lãnh đạo của nhà trường phải yêu cầu Holmboe kìm chế bớt sự ca ngợi của ông. Mấy từ "nếu em ấy được sống" hóa ra lại là một lời tiên tri bi thảm.

MỘT THIÊN TÀI NGHÈO KHỔ

Trong những năm cuối cùng ở trường, Abel đã có nỗ lực đầu tiên tung đôi cánh riêng của mình và đã làm một việc to lớn làm sao. Với sự liều lĩnh và táo bạo vốn đặc trưng cho tuổi trẻ trong chuyến phiêu lưu đầu tiên vào vùng đất xa lạ, Abel đã thử đương đầu ngay với việc giải phương trình bậc năm. Đây là một bài toán mà những nhà toán học ưu tú nhất của châu Âu đã từng vật lộn với nó gần ba thế kỷ mà giờ đây một cậu học sinh phổ thông lại dám tuyên bố rằng đã giải được nó. Abel đã đưa lời giải của mình cho Holmboe xem và ông thầy này không thấy có gì sai trong đó cả. Tuy nhiên, do thiếu sự tự tin của một nhà toán học dày dạn, Holmboe đã giới thiệu lời giải này cho hai nhà toán học ở Đại học Christiania là Christopher Hansteen và Søren Rasmussen. Cả hai người cũng đều không tìm thấy sai sót nào trong lời giải của Abel. Thấy được tầm cỡ của phát minh, Hansteen quyết định chuyển tiếp công trình này cho nhà toán học hàng đầu Bắc Âu thời đó là Ferdinand Degen ở Copenhagen để công bố tại Viện Hàn lâm Đan Mạch.

Degen là một người thực dụng, ưa thận trọng. Và mặc dù không tìm thấy sai sót nào trong lời giải của Abel, nhưng ông cứ yêu cầu anh gửi cho mình "một dẫn dắt chi tiết hơn những kết quả của anh và cả những minh họa bằng số " của phương pháp nữa, ví như giải phương trình $x^5+2x^4+3x^2-4x+5=0$, chẳng hạn. Xét cho cùng, những cơ may *tiên nghiệm* để một học sinh của trường Dòng giải được một trong những bài toán nổi tiếng nhất trong toán học là không thật cao. Trong khi định đưa ra một số ví dụ cụ thể, nhưng Abel vô cùng thất vọng phát hiện ra rằng lời giải của ông thực ra không đúng. Còn xa mới có thể phát tín hiệu kết thúc cuộc tìm kiếm, nhưng sự lùi bước tạm thời này là chuẩn bị cho một đột phá quan trọng. Dù thế nào thì Degen cũng đã có đủ ấn tượng để cho Abel một số lời khuyên. Đối với Degen, sự nghiên cứu các phương trình là một "đề tài rất khó nhằn". Ông gợi ý Abel thay vì, nên tập trung vào một lĩnh vực mới là các tích phân elliptic (một loại tích phân đặc biệt trong giải tích toán, sở dĩ chúng được gọi như vậy vì có thể dùng chúng để tính chiều dài các cung của một hình elip). Và đây, Degen nói: "một nhà nghiên cứu nghiêm túc với cách tiếp cận thích hợp... có thể phát hiện ra eo biển Magellan dẫn tới những khoảng rộng lớn của đại dương bao la của giải tích toán".

Ngay khi thiên tài toán học của Abel bắt đầu tỏa sáng thì bầu trời phía trước gia đình anh lại u ám đầy mây đen. Những năm 1818-1820 là cực kỳ bi thảm đối với Abel. Vị linh mục cha anh đã được bầu vào Storting (quốc hội) ngày 10 tháng 12 năm 1817, nhưng sự kiện tưởng như có uy thế này hóa ra lại là một tai họa. Thoạt đầu, vị nghị sĩ mới được bầu và đầy nhiệt huyết này đã đưa ra một ít dự luật thành công về giáo dục. Đặc biệt, ông là tác nhân trong việc lập ra một trường thú y. Tuy nhiên, có lẽ do sự xét đoán sai trái do say rượu và ham muốn tự tâng bốc mình không bao giờ thỏa mãn, ông đã phạm phải chuyện tương đương với sự tự sát về chính trị. Trong một phiên họp định mệnh, ông đã đột nhiên buộc tội hai quan chức đã bất công bỏ tù một người nguyên là bảo vệ của một nhà máy thép. Những buộc tội này hóa ra lại hoàn toàn không có bằng chứng, và điều này đã đánh dấu sự bắt đầu đi xuống của mục sư Abel. Cơn giận dữ của giới chính trị và của công chúng đã bùng nổ dẫn tới nguy cơ ông bị buộc tội vu cáo. Søren Georg Abel được cho một cơ hội cuối cùng để xin lỗi, nhưng ông đã cứng đầu từ chối. Vào mùa thu năm 1818, vị linh mục thất sủng và hết ảo tưởng quay trở lại Gjerstad. Ông ngày càng chìm ngập trong rượu và điều này đã nhanh chóng hủy hoại sức khỏe của ông. Khi ông mất vào năm 1820 thì dân làng Gjerstad chẳng mấy ai tỏ nỗi xót thương. Theo như người ta nói thì bà vợ góa bị suy sụp về tinh thần của ông phải nằm trên giường tiếp những vị khách đến an ủi và chỉ có một người hầu làm hết những việc trong nhà.

Vị linh mục mất đi đã để lại cho bà Anne Marie và năm anh chị em nữa của Henrik một số tiền trợ cấp quá ít ỏi không đủ để chi tiêu dù chỉ cho những nhu cầu thiết yếu của họ. Vấn đề tiền để chu cấp cho Abel hoàn tất học vấn của mình không được đặt ra, chứ đừng nói tới chuyện giải quyết. Mặc dù hoàn cảnh không có nhiều thuận lợi, nhưng rồi Abel cũng vào được đại học năm 1821. Trong môi trường mà ở đó sự giao tiếp giữa sinh viên và giáo sư nói chung không được khuyến khích, các giáo sư luôn giữ thái độ lạnh nhạt và xa cách, thế mà có tới không ít hơn ba giáo sư đã tình nguyện giúp đỡ Abel bằng tiền túi không mấy dồi dào của họ. Sự hảo tâm đó kéo dài tới tận năm 1824 khi cuối cùng Abel đã được nhận học bổng để sống. Trong những năm đầu tiên ở đại học, Abel là vị khách thường xuyên và được chào đón ở nhà giáo sư Christopher Hansteen và chính trên tạp chí mà Hansteen khởi xướng Abel đã công bố bài báo toán học đầu tiên của mình vào năm 1823. Đó chưa thật là bài báo gây chấn động (bài này và cả bài báo thứ hai đều không dễ hiểu đối với phần lớn người đọc của tạp chí). Tuy nhiên, bài báo thứ ba của Abel nhan đề "Lời giải của một cặp mệnh đề nhờ các tích phân xác định" đề cập tới những nội dung mà sau này trở thành cơ sở toán học của phóng xạ học hiện đại (nhờ nó nhà vật lý Allan Cormack và kỹ sư điện Godfrey Hounsfield đã nhận được giải Nobel về y học).

Trong khi đó, các giáo sư Hansteen và Ramunssen vẫn tiếp tục một cách không mệt mỏi tìm cách để hỗ trợ các công trình của Abel và đặc biệt cho phép anh ra nước ngoài để mở rộng những chân trời của mình. Khi mà sự ưu ái đó dành cho các sinh viên nghiên cứu khoa học không còn tồn tại trong trường đại học nữa do tệ quan liêu, chính Rasmussen đã bỏ tiền túi cho Abel đến Đan Mạch để gặp Degen và các nhà toán học Đan Mạch khác. Do đó, bất chấp mọi khó khăn, cuối cùng rồi Abel cũng có được một kỳ nghỉ hè ở Copenhagen vào năm 1823. Ở đây anh đã phát hiện ra "các nhà khoa học nghĩ rằng Na Uy là một xứ thuần túy man rợ" và anh đã làm hết sức mình "để thuyết phục họ điều ngược lại". Chuyến đi tới Đan Mạch còn có một kết cục khác thật bất ngờ - Abel đã gặp Christine Kemp (biệt danh là "Crelly"), vị hôn thê tương lai của mình. Cuộc gặp gỡ đầu tiên của hai người diễn ra ở bữa tiệc tại nhà người chú của Abel. Abel mời Christine nhảy, nhưng cả hai người đều lúng túng vì ban nhạc chơi thứ mà lúc đó còn là mới – đó là điệu luân vũ – mà cả hai người đều không biết. Hơi ngượng ngùng, họ đứng nhìn nhau ít phút rồi lặng lẽ rời sàn nhảy. Toàn bộ mối quan hệ của Abel và Crelly có điều gì đó hơi bí ẩn. Sau một mùa Giáng sinh ở bên nhau, Abel đã làm cho bạn bè ở trường đại học bị sốc khi tuyên bố mình sắp lấy vợ. Rõ ràng là Abel chưa hề có một trải nghiệm tình dục nào, cả về lời nói đến thể xác, mà đây vốn là chuyện bình thường đối với các sinh viên ở thủ đô. Việc hứa hôn ở tuổi rất trẻ đã dựng lên một bức tường bảo vệ cho phép anh tránh phải giải thích lôi thôi khi chủ đề đàn bà được đề cập tới. Nhưng Niels Henrik chưa bao giờ cưới Christine cả. Vào thời đó không thể tưởng tượng được rằng một ai đó có thể lấy vợ trước khi có đủ phương tiện đảm bảo cho cuộc sống gia đình. Thật đáng buồn là Abel không bao giờ có được vị thế đó. Năm năm sau lễ hứa hôn, trên giường lúc lâm chung, dằn vặt với lỗi lầm và trách nhiệm, Abel đã nhờ người bạn thân của mình là Baltazar Mathias Keilhau hãy quan tâm đến Crelly. "Cô ấy không đẹp", anh nói vừa đủ nghe, "có mái tóc đỏ và đôi chút tàn nhang, nhưng là một con người tuyệt vời". Keilhau – người cho tới lúc đó còn chưa gặp Crelly, đã thực sự cưới Kemp vào năm 1830 và cả hai đã sống hết phần đời còn lại với nhau.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NĂM

Ngay từ khi bắt tay giải phương trình bậc năm bằng một công thức nhưng không thành, vấn đề này lúc nào cũng ám ảnh đầu óc Abel. Tôn trọng những lời khuyên của Degen, Abel cũng đã tiếp cận những nghiên cứu tiên phong trong hai lĩnh vực khác của toán học, nhưng nỗi trăn trở của anh đối với phương trình bậc năm vẫn canh cánh khôn nguôi. Do đó, sau khi từ Copenhagen trở về, anh quyết định xem xét lại chủ đề này một lần nữa dưới một cái nhìn mới. Thay vì tấn công lại bài toán này một lần nữa với mục đích tìm ra công thức nghiệm, anh quyết định chứng minh rằng công thức nghiệm là không tồn tại. Cần nhớ rằng chính Ruffini tuyên bố đã chứng minh được điều đó trong một loạt công trình trong những năm 1799-1813, nhưng không phát hiện ra "chứng minh" của mình có khe hở. Vì công trình của Ruffini không được quảng bá rộng rãi, nên tới năm 1823 mà Abel cũng không hề biết. Sau một ít tháng làm việc căng thẳng, chàng sinh viên 21 tuổi từ nước Na Uy xa xôi đã đưa bài toán tồn đọng hàng thế kỷ đến hồi kết thúc. Anh đã chứng minh thành công, một cách chặt chẽ và dứt khoát, rằng không thể tìm được nghiệm của phương trình bậc năm dưới dạng một công thức đơn giản chỉ chứa các hệ số cùng với bốn phép tính số học và phép khai căn.

Trước hết, tôi xin phép được giải thích một cách ngắn gọn chứng minh của Abel có ý nghĩa gì và, cũng không kém phần quan trọng, là nó không có ý nghĩa gì. Abel đã chứng minh được rằng trong trường hợp phương trình bậc năm tổng quát, và cả những phương trình bậc cao hơn, người ta không thể lặp lại những cái đã đạt được đối với các phương trình bậc bốn, bậc ba và bậc hai. Nói một cách khác, nghiệm của phương trình bậc năm dưới dạng chỉ chứa các hệ số cùng với bốn phép tính số học và phép khai căn là không tồn tại. Toàn bộ công sức mà các nhà toán học xuất sắc đã đổ vào bài toán này cũng chẳng hơn gì công dã tràng. Chứng minh của Abel không ngụ ý rằng phương trình bậc năm là không thể giải được. Chẳng hạn, phương trình $x^5 - 243 = 0$ có nghiệm hiển nhiên $x = 3$, vì $3^5 = 243$. Hơn nữa, phương trình bậc năm tổng quát vẫn có thể giải được hoặc là giải bằng số, dùng máy tính hoặc bằng cách đưa vào các công cụ toán học tân tiến hơn, như các hàm elliptic chẳng hạn. Cái mà Abel phát hiện ra là sự thiếu hụt cơ bản của đại số khi nó bước vào chinh phục phương trình bậc năm. Các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và khai căn chẳng qua là đã đạt tới giới hạn sử dụng của chúng khi đối mặt với phương trình bậc năm. Đó là một nhận thức vĩ đại trong lịch sử toán học. Nó làm thay đổi toàn bộ cách tiếp cận các phương trình từ ý định đơn giản tìm nghiệm chuyển sang cần thiết phải chứng minh những nghiệm thuộc một loại nào đó có tồn tại hay không.

Chứng minh của Abel là quá chuyên môn nên không thể trình bày chi tiết lại trong một cuốn sách phổ biến khoa học như thế này được. Đối với các bạn đọc có thiên hướng toán học hơn, tôi xin giới thiệu hãy đọc cuốn *Chứng minh của Abel* của Peter Pesic. Ở đây cho phép tôi chỉ nêu nhận xét rằng chứng minh này dựa trên một công cụ logic được gọi là *reduction ad absurdum* (phản chứng). Ý tưởng đằng sau phương pháp này là thay vì chứng minh một mệnh đề nào đó, bạn chứng minh điều ngược lại của nó là mâu thuẫn. Nói cách khác, Abel giả thiết rằng phương trình bậc năm là giải được và chứng minh rằng giả thiết đó dẫn tới mâu thuẫn về mặt logic.

Abel rất quan tâm đến ý nghĩa phát minh của mình. Không giống như các bài báo trước, mà anh toàn viết bằng thứ tiếng Na Uy rất khó tiếp cận, lần này anh viết chứng minh về tính không giải được của phương trình bậc năm bằng tiếng Pháp với hy vọng thu hút được sự chú ý của các nhà toán học hàng đầu thời đó. Anh cũng quyết định dùng chứng minh của mình như một "tấm danh thiếp" vì nghĩ rằng đó "sẽ là lời giới thiệu tốt nhất mà tôi có". Vì thế anh đã phải trả cho nhà in Grøndahl bằng tiền túi của mình (chắc phải nhịn ăn mất mấy bữa) để in bài báo dưới dạng một cuốn sách nhỏ. Tuy nhiên, để giảm chi phí anh phải viết cô đọng lại bài báo "*Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*" (*Tiểu luận về các phương trình đại số trong đó có chứng minh tính không giải được của phương trình bậc năm*) chỉ còn có sáu trang mỏng dính. Nhưng sự hà tiện này đã phải trả giá. Phiên bản rút gọn quá nhiều, gần như một bức điện tín này, là quá mù mờ đối với đa số các nhà toán học, khiến cho mặc dù Abel đã gửi cuốn sách nhỏ này cho các người bạn ở Copenhagen và cả Carl Gauss vĩ đại nữa, nhưng bài báo vẫn ít được chú ý. Gauss thậm chí còn chưa buồn mở ra đọc – sau khi ông mất người ta đã tìm thấy bài báo vẫn nằm trong phong bì chưa cắt giữa đống giấy tờ của ông. Vậy là một trong những tuyệt phẩm của toán học đã không tìm thấy bạn đọc.

Cũng vào khoảng thời gian đó, các thiên thần hộ mệnh của Abel là các giáo sư Hansteen và Rasmussen đã đi đến kết luận rằng, để cho Abel ý thức được đầy đủ tiềm năng của mình, họ thấy rằng nếu cứ tiếp tục chu cấp cho anh bằng số tiền túi không mấy dồi dào của mình là điều không còn thực tế đối với họ nữa. Do đó, vào năm 1824, họ đã nộp đơn xin chính phủ Na Uy một khoản trợ cấp đi công tác cho Abel. Họ biện minh cho đơn yêu cầu không bình thường này bằng cách giải trình rằng đối với tài năng đặc biệt này, thì "chuyến công du ở nước ngoài, nơi có những nhà toán học xuất sắc nhất, sẽ là một đóng góp tuyệt vời nhất cho sự nghiệp giáo dục khoa học và học đường". Sau những trì trệ quan liêu cố hữu, Bộ tài chính cuối cùng cũng đã cấp cho Abel một khoản trợ cấp khiêm tốn. Đây thực sự là một nỗ lực đáng ghi nhận trong tình hình tài chính gặp nhiều khó khăn của đất nước lúc bấy giờ. Tuy nhiên, lời phê duyệt có đưa vào hai thay đổi quan trọng so với đơn xin gốc. Thứ nhất, Abel phải ở lại Na Uy mười tám tháng nữa để "tiếp tục học nốt chương trình khoa học ở trường, đặc biệt là tiếp tục học thêm các ngôn ngữ đã học" nhằm chuẩn bị cho chuyến đi. Thứ hai, và điều này hóa ra mới là quan trọng hơn, sẽ không có tiền hỗ trợ cho anh khi quay về. Và sự thiếu sót thứ hai đó đã để lại những hệ lụy rất tệ hại.

MỘT TRẢI NGHIỆM Ở CHÂU ÂU

Vào tháng 9 năm 1825, cuối cùng, Abel đã chia tay với Crelly lúc đó đang là bảo mẫu cho một gia đình ở Son, một trị trấn nhỏ ở gần Christiania. Cùng lên đường sang lục địa với anh còn có ba người bạn. Hai trong số họ sau này một người là nhà địa chất còn người kia là bác sĩ thú y. Ban đầu theo lời khuyên của Hansteen, Abel lập kế hoạch sẽ tới Paris một thời gian, sau khi dừng lại ít ngày ở Copenhagen. Tuy nhiên, khi những người bạn quyết định đến Berlin, vì sợ bị bỏ lại một mình ở Paris, anh cũng ngả theo đi cùng với họ. Trong trường hợp cụ thể này, nỗi sợ hãi cố hữu sự cô đơn của Abel lại dẫn đến một kết cục may mắn. Ở Berlin, anh đã gặp được một kỹ sư xây dựng có ảnh hưởng lại rất mê toán và gần như ông ta đã trở thành người hâm mộ nhiệt thành nhất, người bạn với tình cảm một người cha và là ân nhân của Abel. August Leopold Crell (1780-1855) ban đầu không hiểu rõ lắm mục đích đến Berlin của chàng trai Na Uy nói tiếng Đức còn bập bẹ này. Trong một bức thư gửi cho Hansteen, Abel đã mô tả về sự kiện đó:

> Phải mất khá lâu em mới làm cho anh ấy hiểu rõ mục đích em đến đây để làm gì và suýt nữa thì dường như mọi chuyện sẽ dẫn đến một kết cục buồn thì anh ấy hỏi em đã đọc gì về toán học chưa. Em đã lấy hết dũng cảm nhắc với anh ấy về những công trình của vài ba nhà toán học nổi tiếng nhất. Khi đó anh ấy trở nên thân thiện hơn và dường như thực sự thấy hạnh phúc. Anh ấy bắt đầu một cuộc nói chuyện kéo dài với em về những bài toán khó khác nhau còn chưa giải được. Khi nói tới phương trình bậc năm, em có nói với anh ấy rằng em đã chứng minh được tính không thể cho nghiệm đại số tổng quát, anh ấy không tin và nói sẽ còn thảo luận về chuyện này. Do vậy em cho anh ấy một bản, nhưng anh ấy nói rằng không hiểu lý do của một số kết luận của em. Một số người khác cũng nói y như vậy, do đó em đã xem xét lại một lần nữa.

Sau cuộc gặp đó, Crelle đã lập một tạp chí toán học mà sau này người ta thường dẫn chiếu là *Tạp chí Crelle* (tên chính thức của nó là *Journal for Pure and Applied Mathematics – Tạp chí toán học lý thuyết và ứng dụng*) – ấn phẩm này đã trở thành tạp chí toán học đầu tiên của Đức ở thế kỷ 19. Tập đầu tiên của *Tạp chí Crelle* ra mắt năm 1826 và nó gồm một số gây kinh ngạc gồm 6 bài báo của Abel (được viết bằng tiếng Pháp và được Crelle dịch ra). Một trong số những bài báo này là bản trình bày chi tiết hơn của chứng minh tính không giải được của phương trình bậc năm bằng một công thức đơn giản. Vào đầu năm 1926 rõ ràng là Abel vẫn còn chưa biết tới chứng minh của Ruffini, nhưng anh chắc đã phát hiện ra nó vào mùa hè năm đó qua một bản tóm tắt những ý tưởng của Ruffini của một tác giả khuyết danh. Trong một bản thảo đề năm 1828, được công bố sau khi anh mất, Abel viết: "Người đầu tiên, và nếu như tôi không lầm, cũng là người duy nhất trước tôi đã cố chứng minh tính không thể giải được của các phương trình đại số là nhà hình học Ruffini. Nhưng bài báo của ông phức tạp đến nỗi khó mà phán xét lập luận của ông có đúng hay không. Theo như tôi thấy thì dường như nó chưa thật thỏa đáng".

Trong khi đang có những nỗ lực khoa học đầy ấn tượng đó, thì thực tại khắc nghiệt về tình trạng tài chính vẫn tiếp tục đeo bám Abel. Với những phương tiện cực kỳ khiêm tốn như thế, nhưng anh vẫn phải hỗ trợ một phần cho các anh chị em. Trong một bức thư gửi cho bà Hansteen, anh viết:

> Chúa sẽ ban phước cho cô vì đã không quên người anh của em [ý muốn nói tới người anh trai Peder đang túng bấn của Abel]. Em đã rất lo lắng rằng mọi chuyện sẽ diễn ra tồi tệ hơn. Nếu anh ấy cần nhiều tiền hơn số tiền anh ấy đã nhận được thì cô hãy đưa cho anh ấy thêm một ít nữa. Khi số tiền 50 daler đã dùng hết, em sẽ thu xếp để gửi thêm cho cô.

Một tình hình nghiêm trọng hơn sắp sửa trùm cái bóng đen ngòm của nó xuống những kỳ vọng và viễn cảnh tương lai của Abel. Giáo sư Rasmussen nhận thấy không thể cáng đáng nổi cùng một lúc cả trách nhiệm giảng dạy lẫn các chức vụ khác nên đã xin từ chức ở trường đại học để nhận một vị trí ở Ngân hàng Na Uy. Điều đó dường như mở ra cơ hội vàng cho Abel, vì anh vốn mơ ước được bổ nhiệm vào vị trí đó. Tuy nhiên, có hai ứng viên tiềm năng cho vị trí ấy: đó là Holmboe – thầy dạy cũ của Abel và chàng Niels Henrik trẻ tuổi. Khi tin tức về cơ hội nói trên đến tai mấy chàng trai đang công du ở Berlin, một trong số họ là Christian Peter Boeck (bản thân là một bác sĩ thú y tham vọng) đã nhanh chóng viết thư cho Hansteen:

> Người anh em họ của em là Johan Collet vừa viết thư báo cho em biết sự bổ nhiệm thầy Rasmussen ở ngân hàng. Điều gì sẽ xảy ra với vị trí của thầy ấy? Liệu có hy vọng để Abel nhận được vị trí đó khi trở về hay là Holmboe sẽ được nhận trước? Tuy nhiên, về một vài phương diện nào đó bổ nhiệm người thứ hai là hợp lý, nhưng rõ ràng là hoàn toàn không công bằng, vì ai cũng biết Abel hơn hẳn Homlboe một cái đầu.

Bức thư trên được viết vào ngày 25 tháng 10 năm 1825. Khoa đã họp vào ngày 16 tháng 12 để thảo luận và thông qua đề cử cho vị trí mới. Họ đã giới thiệu Homlboe vào vị trí còn trống. Lý do chủ yếu là Abel "không dễ dàng điều chỉnh bản thân để hiểu rõ các sinh viên trẻ như một thầy giáo có kinh nghiệm hơn và do đó không thể giảng dạy một cách có kết quả những phần sơ cấp của toán học, mà đó là mục đích chủ yếu của vị trí nói trên". Sự đối lập này giữa tài năng trong giảng dạy và khả năng nghiên cứu như những phẩm chất để bổ nhiệm vốn không phải là chuyện bất thường gì. Tôi có thể kiểm chứng từ ngay kinh nghiệm của bản thân (đã từng hoạt động trong nhiều hội đồng xét duyệt) rằng những bàn cãi về chuyện này vẫn còn là đặc trưng của việc bổ nhiệm ở các trường đại học. Tuy nhiên, trong trường hợp cụ thể này, một ứng viên hơn hẳn ứng viên kia về mọi mặt, thì việc cái khoa thiển cận kia đã phạm một sai lầm nghiêm trọng là điều không cần bàn cãi. Không phải là họ không hoàn toàn ý thức được sự quyết định có vấn đề của họ, họ đã kết luận: "Chúng tôi cũng coi phận sự của mình phải chỉ ra rằng việc không để cho sinh viên Abel bị thui chột là quan trọng như thế nào đối với khoa học nói chung và trường đại học của chúng ta nói riêng".

Ngay cả khi những hy vọng của mình bị tan vỡ và ý thức về tương lai bất định của mình bắt đầu hiện ra, nhưng Abel với tấm lòng nhân hậu vẫn làm hết sức mình để giữ trọn tình bạn với Holmboe. Trong một bức thư nồng ấm gửi cho Holmboe, anh đã viết: "Ngoài những tin tức khác, bạn em có nói thầy đã được giới thiệu là giảng viên thay cho thầy Rasmussen. Mong thầy hãy nhận những lời chúc mừng chân thành của em và tin rằng không có ai trong số các bạn bè của thầy lại vui mừng về chuyện đó như em. Hãy tin em, em vẫn thường cầu mong sự thay đổi vị trí của thầy". Và tình bạn của Abel và Holmboe đã vượt qua được thử thách đó, họ vẫn còn là hai người bạn chí cốt của nhau trong suốt phần đời còn lại của Abel. Nhưng Abel thất vọng đã buộc phải thông báo cho Crelly rằng đám cưới của họ cần phải hoãn lại.

Mặc dù có những chuyện lùm xùm đó, nhưng mùa đông ở Berlin quả là một trong những thời gian hạnh phúc nhất của Abel. Anh làm việc rất có hiệu quả với những bài báo đóng góp quan trọng cho phép tính tích phân và lý thuyết của tổng các chuỗi vô hạn khác nhau. Các nhà khoa học trẻ cũng không bỏ lỡ cơ hội nào để tới nhà hát – niềm đam mê của Abel – và họ cũng thường được mời tới các cuộc khiêu vũ hay tổ chức các bữa liên hoan của riêng họ. Những bữa liên hoan vui nhộn đó đôi khi làm phiền cả nhà triết học nổi tiếng Georg Hegel (1770-1831), người tình cờ sống trong cùng ngôi nhà với họ. Người ta đồn rằng ông đã từng gọi những người hàng xóm hay gây ồn ào này là những "con gấu Nga".

Khi mùa xuân đến, Abel đã lập kế hoạch để tới Paris – mục tiêu ban đầu của anh. Tuy nhiên, ý nghĩ sẽ phải rời xa các bạn lại là một trở ngại đến mức, cuối cùng, anh đành cùng với Keihau đi đến Freiberg đầu tiên, rồi sau đó anh cùng hai người bạn nữa đi qua Dresden, Bohemia, Vienna, Bắc Italia và Thụy Sĩ, và anh chỉ tới được Paris vào tháng 7 năm 1826.

PARIS

Ai đã từng tới Paris vào tháng 7 hay tháng 8 đều biết nó đẹp như thế nào. Khi Abel nhanh chóng phát hiện ra điều đó, thì mọi người đều đang nghỉ hè và đi ra xa thủ đô cả. Không có gì phải bàn cãi chuyện Paris là thủ đô toán học của thế giới, và Abel đã ráng chờ cơ hội để được gặp những người khổng lồ về toán học mà anh đã từng ngưỡng mộ. Sau nữa, các công trình của Cauchy, Laplace và Legendre đã từng là những khối kiến thức mà anh đọc ngấu nghiến lúc đêm khuya. Trong bức thư đầu tiên anh gửi cho giáo sư Hansteen từ Paris, anh đã phải thốt lên một cách hân hoan: "Cuối cùng thì em cũng đến được tiêu điểm của toàn bộ những khát vọng toán học của em – Paris". Nhưng anh còn chưa biết rằng chuyến viếng thăm Paris này sẽ chỉ gây ra cho anh những thất vọng và hết ảo tưởng mà thôi. Abel thuê phòng của gia đình Cotte ở số 41, phố Ste. Marguerite, cạnh khu phố St. Germain-des-Prés nổi tiếng. Với giá tiền hơi cắt cổ 120 franc một tháng, anh có được một phòng "cực kỳ sơ sài", chăn đệm sạch sẽ và hai bữa ăn một ngày. Chủ nhà, theo Abel là một gã "thích toán học một cách bất lương", đã dẫn anh thực hiện ý định đầu tiên là tới gặp nhà toán học nổi tiếng Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Thật không may Abel đến đúng lúc ông vừa bước lên xe, và sự trao đổi giữa hai người chỉ là mấy câu chào hỏi xã giao. Ít năm sau, Legendre đã tỏ ra ân hận vì đã không nói chuyện thêm với Abel trong thời gian nhà toán học trẻ tuổi này còn ở Paris. (Thực ra, họ đã có những trao đổi rất kết quả vào năm 1829, nhưng đây là năm 1826 và ông già Legendre còn chưa biết Abel là ai).

Trong ít tháng đầu tiên ở Paris, Abel đã làm việc miệt mài về một vấn đề, mà sau này trở thành một thành tựu xuất chúng thực sự và được biết tới dưới cái tên định lý Abel. Mặc dù định lý này không liên quan trực tiếp đến phương trình bậc năm hay lý thuyết nhóm, nhưng nó lại đóng một vai trò rất quan trọng trong cuộc đời Abel mà bất cứ quyển tiểu sử nào về anh cũng sẽ là không đầy đủ nếu không nhắc tới nó. Định lý này liên quan tới một lớp đặc biệt các hàm số có tên là các *hàm siêu việt*, và nó đã tổng quát hóa rất rộng một hệ thức trước kia đã được Euler chứng minh. Sẽ không có gì là quá đáng nếu nói rằng định lý của Abel đúng là đã mở ra cho toán học những viễn cảnh mới. Tính rõ ràng và đơn giản nội tại của chứng minh của Abel không khác gì những bức tượng cổ điển của nhà điêu khắc Hy Lạp Phidias. Tính độc đáo của Abel được bộc lộ, đặc biệt, bởi khả năng đảo ngược các bài toán. Tôi xin phép được nêu một ví dụ phi toán học về thứ logic nghịch đảo này.

Hãy hình dung một số người gợi ý rằng một trong các lý do để súng ngắn trở nên phổ biến trong một số thành phố là bởi vì số vụ giết người quá cao, nên người ta phải có vũ khí để tự vệ. Tuy nhiên, người ta có thể đảo ngược vấn đề này và cho rằng một trong những lý do để có nhiều vụ giết người trong các thành phố là do việc sử dụng súng là không hạn chế. Trong toán học, hãy xét hệ thức $x = \sqrt[3]{y}$ (xin đọc là x bằng căn bậc ba của y). Hệ thức này ngụ ý rằng để tính x ta cần lấy căn bậc ba của y, như $2 = \sqrt[3]{8}$. Tuy nhiên, hệ thức ngược $y = x^3$ cũng tương đương một cách chính xác với hệ thức trước (ví dụ, $8 = 2^3$), nhưng đa số mọi người đều nhất trí rằng tính lũy thừa bậc ba là dễ hơn nhiều so với tính căn bậc ba. Đó chính xác là ý tưởng sâu xa mà Abel đã cung cấp trong định lý của anh, một định lý đã giải thoát cho Legendre gần 40 năm làm việc.

Bài báo của Abel hóa ra lại là một trong những bài báo dài nhất (chiếm tới 67 trang trong Tuyển tập các công trình của anh). Bài báo nổi tiếng này có nhan đề "*Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendantes*" (*Về một tính chất tổng quát của một lớp rất rộng các hàm siêu việt*) bao gồm cả lý thuyết và các ứng dụng. Khi bài báo hoàn tất, Abel vẫn chưa nguôi phấn khích. Anh đã gửi bài báo này với một sự kỳ vọng lớn lao cho Viện Hàn lâm Khoa học vào ngày 30 tháng 10 năm 1826. Đây là công trình mà anh nghĩ sẽ là tấm hộ chiếu để được công nhận. Abel cũng đã có mặt trong phiên họp giới thiệu bài báo của anh. Abel lắng nghe với cảm giác sung sướng khi vị thư ký của Viện Hàn lâm, nhà vật lý toán Joseph Fourier (1768-1830), đọc lời giới thiệu công trình. Cauchy và Legendre ngay lập tức được giao làm phản biện và Cauchy có trách nhiệm viết báo cáo và gửi cho Viện.

Abel mất tới hai tháng trời sau đó ở Paris để đợi biên bản. Anh cảm thấy ngày càng cô đơn, buồn bã và lo lắng: "Mặc dù em đang ở một nơi ồn ào và sôi động nhất ở lục địa", anh viết cho Homlmboe, "nhưng em vẫn cảm thấy như đang sống trong sa mạc. Em hầu như chẳng quen biết ai cả". Có lẽ một phần do bản tính hay u buồn của anh mỗi khi thiếu vắng bạn bè, nên anh cảm thấy rất khó giao thiệp:

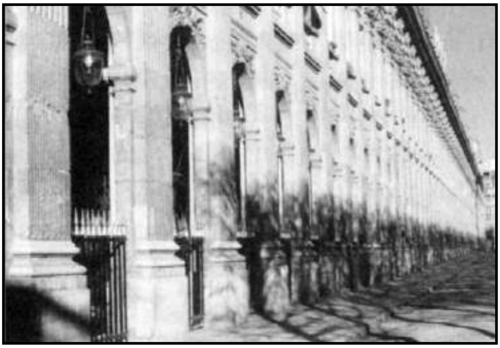
> Xét tổng thể em không thích người Pháp cũng như người Đức; người Pháp cực kỳ giữ ý đối với người nước ngoài, nên rất khó quan hệ thân thiết với họ, và em cũng không dám

> hy vọng điều đó. Mọi người chỉ làm việc cho mình không hề quan tâm tới những người khác. Ai cũng chỉ muốn dạy dỗ, không ai muốn học cả. Chủ nghĩa vị kỷ tuyệt đối đã ngự trị tối thượng ở đây.

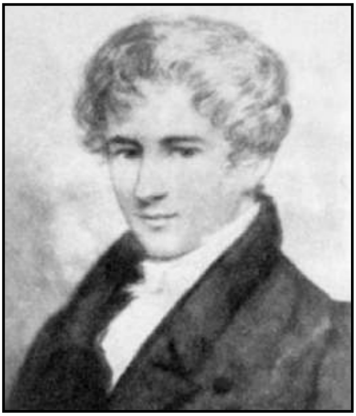
Như mọi khi, nhà hát vẫn là nguồn vui và sự giải trí chủ yếu của Abel: "Em không biết niềm vui nào lớn hơn là ngồi xem vở kịch của Molière do cô Mars [tức Anne-Françoise-Hyppolyte Boutet, một nữ diễn viên nổi tiếng nhất thời đó, cũng còn được gọi là Mars] đóng. Em thực sự cảm thấy vui sướng", anh viết. Còn những "thú vui" khác của Paris thế kỷ 19 thì anh hoàn toàn lạnh nhạt:

> Thỉ thoảng em có đến thăm Cung điện Hoàng gia (hình 49) chỗ mà người Pháp gọi là động quỷ. Ở đó người ta thấy rất nhiều gái ăn sương và đa số họ chẳng được giáo dục gì. Điều duy nhất mà người ta nghe thấy là: "Đi với em, đi anh! Anh bạn nhỏ của em". Là người đàn ông đã đính hôn, em không bao giờ nghe họ và rời ngay Cung điện Hoàng gia mà không một chút lấn cấn gì.

Ở Paris, Abel gặp một người đồng hương là họa sĩ Johan Gørbitz. Gørbitz làm việc trong xưởng vẽ của họa sĩ vẽ tranh lịch sử nổi tiếng Jean-Antoine Gros, và anh đã sống ở Paris từ năm 1809. Trong mùa đông đó, Gørbitz đã dựng một bức chân dung đích thực duy nhất của Abel được vẽ khi anh còn sống (hình 50). Bức chân dung vẽ

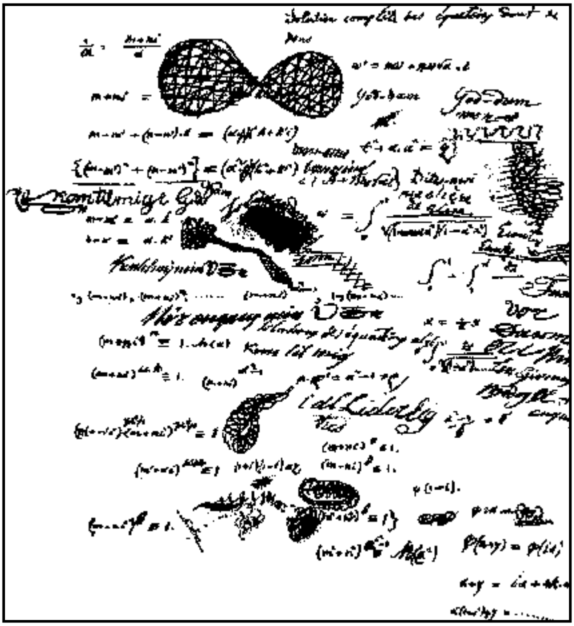


Hình 49


Hình 50

một thanh niên đẹp trai với những nét rất tinh tế. Mặc dù mẹ Abel là một phụ nữ rất đẹp, nhưng không có ai cùng thời Abel nhắc nhở anh là người có vẻ đẹp đặc biệt cả. Bức chân dung hơi "nịnh" này do đó có thể là sự thể hiện xu hướng làm đẹp hóa của các họa sĩ thời kỳ đó.

Có lẽ cách nắm bắt tốt nhất những hoạt động phức tạp trong bộ não ưa phiêu lưu đầy sáng tạo của Abel là xem cuốn vở ghi chép của anh ở Paris. Giữa những công thức tích phân khác nhau và những biểu thức có liên quan đến các số phức, chúng ta tìm thấy rất nhiều những hình vẽ và những đoạn câu vu vơ khác nhau không ngừng nhảy từ dòng này sang dòng tiếp theo. Ví dụ, trang in trên hình 51, chứa (không theo một trật tự nào) những mẩu câu sau: "nghiệm hoàn chỉnh của phương trình trong đó... chết tiệt... chết tiệt... ∞ (vô cùng) của tôi"; "Cha của chúng ta, người ở trên Trời, cho con bánh mì và bia. Hãy lắng nghe con một lần thôi" – có lẽ ám chỉ tình trạng tài chính xấu đi nhanh chóng; rồi "Nhân danh Chúa, hãy đến với con"; "Bạn của tôi, bạn thân yêu của tôi"; "Hãy nói với anh, Eliza thân yêu của anh... hãy lắng nghe... hãy lắng nghe" - có lẽ ám chỉ cô em gái Elizabeth, người mà anh vô cùng yêu mến vừa gửi quà cho từ Paris hoặc cũng có thể một cuộc tình dục được ám chỉ bởi câu cuối cùng dưới đây; "Suleiman, Đệ nhị" – ám chỉ hoàng đế Ottoman của thế kỷ 17 – Abel đọc rất nhiều về lịch sử châu Âu trước khi lên đường ra nước ngoài; "Hãy tới với tôi, bạn của tôi"; "Bây giờ, hãy một lần là của anh"; "nghiệm của phương trình đại số"; "Hãy đến với anh với tất cả sự dâm đãng của em".



Hình 51

Abel cực kỳ lạc quan đối với bài báo mà anh đã gửi tới Viện Hàn lâm và anh cũng tuyệt đối tin rằng một bản báo cáo khen ngợi chắc chắn sẽ tới. Rốt cuộc, anh phỏng đoán, những nhà toán học vĩ đại như thế này chắc chắn sẽ nhận ra giá trị công trình của anh. Tuy nhiên, điều mà anh không nhìn thấy là thực tế rằng hai nhà toán học được chỉ định đánh giá công trình của anh thì, vì những lý do khác nhau, lại hoàn toàn không thích hợp với nhiệm vụ ấy. Vào thời kỳ đó, Legendre đã 74 tuổi và ông không đủ kiên nhẫn để theo dõi một bản thảo dài như thế mà theo lời ông thì "viết... rất khó đọc lại bằng một thứ mực rất nhạt với những chữ cái xiêu vẹo". Trái lại, Cauchy lại đang ở đỉnh cao của thời kỳ ích kỷ, hay nói theo lời nhà lịch sử toán học Eric Temple Bell thì ông "đang bận đẻ những quả trứng riêng của mình và cục tác loạn xạ về chúng đến nỗi không có thời gian để xem xét quả trứng đại bàng mà chàng trai Abel khiêm tốn đặt vào ổ của ông". Kết quả cuối cùng của những hoàn cảnh đó là Legendre thì không quan tâm, còn Cauchy thì đã để lẫn bài báo đâu đó trong đống giấy tờ của mình và quên biến luôn. Thử hình dung xem sẽ ra sao nếu một tuyệt phẩm như bức tranh *Mặt trời mọc* của Claude Monet đóng vai trò cực kỳ quan trọng đối với sự phát triển của *trường phái ấn tượng* trong hội họa lại bị để thất lạc và mất đi. Chỉ hai năm sau, Legendre mới biết về nội dung bài báo thông qua trao đổi thư từ với Abel, nhưng vào lúc đó thì anh đã trở về Na Uy rồi.

Vào năm 1829 còn một nhân vật nữa cũng đã làm quen với bài báo của Abel là nhà toán học Đức Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Ông đã viết với một niềm phấn khích không che giấu cho Legendre vào tháng 4 năm 1829:

> Phát minh của Abel mới tuyệt vời làm sao, cái sự tổng quát hóa tích phân ấy của chính Euler! Liệu đã ai thấy một cái gì đó tương tự như vậy chưa? Nhưng tại làm sao mà một phát minh như thế, có lẽ là phát minh quan trọng nhất của thế kỷ chúng ta, đã được thông báo cho Viện Hàn lâm hai năm trước, lại không được ông và các đồng nghiệp của ông để mắt tới nhỉ?

Để đáp lại đòi hỏi bức xúc đó, Legendre chỉ còn biết nói lời xin lỗi yếu ớt rằng bài báo viết "khó đọc quá".

Abel ở Paris thêm hai tháng nữa với nguồn tài chính cạn dần, tâm trạng u ám hơn và sự suy giảm về sức khỏe. Ông chỉ có hai cuộc làm quen mới đáng ghi nhận. Một là nhà toán học Johann Dirichlet (1805-1859), người mặc dù trẻ hơn Abel, nhưng đã làm nên tên tuổi của mình vì (cùng với Legendre) đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat cho trường hợp $n = 5$. Tức là, ông đã chứng minh được rằng phương trình $x^5 + y^5 = z^5$ không có nghiệm là các số nguyên. Người mới quen thứ hai là Jacques Frédéric Saigey, một biên tập viên của tạp chí toán học và thiên văn *Ferrusac's Bulletin*, nhờ đó Abel đã công bố được một số bài báo chủ yếu là tóm tắt những bài báo mà anh đã đăng trong *Crell's Journal*.

Điều mà Abel nghĩ chỉ là cảm lạnh thông thường đã bắt đầu làm phiền anh, khiến anh phải vài ba lần đi khám bệnh. Hai năm sau, trên giường lúc hấp hối, anh đã phải nghe người thân phàn nàn: "Cậu cứ nói, những điều mà bác sĩ ở Paris nói đều sai bét". Từ đây chúng ta có thể kết luận rằng những chẩn đoán của các bác sĩ ở Paris thật đáng báo động, đó là bệnh lao phổi. Từ chối điều trị vào thời gian đó khi mà những hy vọng đã tắt dần và tiền bạc đã cạn túi, Abel quyết định rời Paris đi Berlin vào ngày 26 tháng 12 năm đó.

Ngay sau khi tới Berlin, Abel đã ngã bệnh. Đó có lẽ là những dấu hiệu đầu tiên cho thấy sự suy giảm rất nhanh sức khỏe của anh. Crell đã làm hết sức để hỗ trợ anh về mặt tài chính và Abel cũng đã nhận được khoản cho vay của Holmboe. Thật là kỳ diệu, bất chấp những phiền muộn về kinh tế cũng như sức khỏe ngày càng suy sụp, Abel vẫn hoàn thành một bài báo còn sâu rộng hơn nữa, đó là công trình "Nghiên cứu về các hàm elliptic" dài tới 125 trang sau này in trong *Toàn tập các công trình* của anh. Chuyên luận này giới thiệu một sự tổng quát hóa cực rộng các hàm lượng giác quen thuộc (tức là các hàm sin và cos), và nó đã có những phân nhánh quan trọng trong lý thuyết số. Crelle đã cố thuyết phục Abel ở lại Berlin cho đến khi tìm được một vị trí đảm bảo ở đó. Tuy nhiên, Abel đã quá mệt mỏi và da diết nhớ nhà. Ngày 20 tháng 5 năm 1827, do nợ nần quá nhiều và không còn hy vọng kiếm được chỗ làm việc, Abel đã lên đường trở về Christiania.

TRỞ VỀ NHÀ

Tình hình ở Christiania vào năm 1827 đúng như những lo ngại tồi tệ nhất của Abel. Cần nhớ rằng những điều kiện trợ cấp cho anh đã không trù liệu chuyện sẽ tài trợ cho anh khi trở về Na Uy. Sau khi Bộ tài chính bác đơn xin kéo dài sự tài trợ, trường đại học đã cấp cho anh một khoản trợ cấp để sống (sau khi Bộ tài chính dành quyền khấu trừ đi phần trợ cấp này từ số tiền mà Abel sẽ kiếm được trong tương lai). Ngay cả với khoản trợ cấp đó, Abel cũng không có lựa chọn nào khác là đi dạy kèm cho các học sinh trung học để đắp đổi qua ngày. Crelly, vị hôn thê của anh, cũng phải nhận một chân bảo mẫu mới trong gia đình nhà Smith – một chủ xưởng thép ở Froland, thuộc vùng phía Nam Na Uy.

Mở đầu năm 1828 đã mang lại cho Abel một sự cải thiện đáng kể về mặt tài chính. Giáo sư Hansteen đã nhận được một hợp đồng lớn để nghiên cứu từ trường Trái Đất, nên Abel đã trở thành người thay thế ông tạm thời ở trường đại học và ở học viện quân sự. Cũng trong thời gian ấy, Abel đột ngột lao vào một cuộc đua công bố các công trình khoa học, một trải nghiệm mà anh chưa bao giờ trải qua. Tháng 9 năm 1827 đã chứng kiến sự xuất hiện không phải một mà là hai bài báo về các hàm elliptic. Một bài là phần đầu của chuyên luận lớn "Nghiên cứu các hàm elliptic". Bài báo thứ hai thông báo những kết quả có liên quan đến công trình của nhà toán học trẻ người Đức Jacob Jacobi. Không đào bới được kết quả mới, Abel hối hả đưa in phần hai của chuyên luận nói trên, trong đó anh có bổ sung một ghi chú chứng tỏ rằng các kết quả của Jacobi có thể dễ dàng nhận được từ các kết quả của anh như thế nào. Điều quan trọng hơn đối viễn cảnh của quyển sách bạn đang cầm trên tay đây là Abel đã dừng làm việc trên vấn đề được coi là câu trả lời dứt khoát cho câu hỏi: những phương trình nào là có thể giải được bằng một công thức. Điều này đã mở ngỏ cửa cho một thiên tài toán học khác là Évariste Galois, người đã đưa ra câu trả lời cho câu hỏi này và trong quá trình đó đã tạo dựng nên lý thuyết nhóm.

Sự công nhận thiên tài của Abel lúc đó đã lan rộng khắp châu Âu. Legendre, người bắt đầu trao đổi thư từ với Abel và Jacobi về lý thuyết các hàm elliptic, đã tuyên bố rằng "thông qua các công trình đó, hai vị [tức Abel và Jacobi] đã được xếp vào hạng các nhà giải tích toán hàng đầu của thời đại chúng ta". Ngoài sự nổi tiếng về toán học, tình trạng bấp bênh về kinh tế của Abel cũng đã đến tai một số nhà toán học châu Âu, đặc biệt là qua những nỗ lực không mệt mỏi của Crelle. Trong một hành động hỗ trợ chưa từng có trước đó, bốn viện sĩ xuất sắc của Viện Hàn lâm Pháp đã viết thư cho Vua Charles XIV của Na Uy và Thụy Điển hối thúc ông ta tạo ra ngay một vị trí xứng đáng với tài năng của Abel. Nỗ lực này đã không mang lại kết quả gì.

Abel đã sống trọn mùa hè năm 1828 ở Froland cùng với Crelly tại nhà Smith. Đó là nơi, mà theo lời anh, anh cảm thấy như "sống giữa các thiên thần". Hanna Smith, một trong số các cô con gái của gia chủ, khi đó mới 20 tuổi, sau này có viết trong hồi ức rằng Abel là một người rất hòa nhã và vui vẻ. Cô đã mô tả một cách sinh động chuyện anh thường ngồi với các bài báo toán học kè kè bên cạnh, vây quanh là các tiểu thư của gia đình mà vẫn viết các bản thảo mới trên những tờ giấy mỏng tang để giảm cước phí bưu điện.

Những điều khoản tàn nhẫn được áp đặt bởi khoản trợ cấp cho Abel hai năm trước nay đã quay trở lại ám ảnh anh. Bộ trưởng Bộ Tài chính đã yêu cầu gắt gao nhà trường "phải quan tâm để khoản ứng trước nói ở trên, phải được khấu trừ theo cách trả góp dần vào lương của ông Abel". Trong khi trường đại học từ chối tuân theo những chỉ thị tàn nhẫn đó, thì tình hình tài chính của Abel cũng chìm dần còn nhanh hơn một cục chì. Anh đã kết thúc một trong những bức thư của anh gửi bà Hansteen vào mùa hè năm đó với câu: "Kẻ khốn khổ nhất của cô" và trong một bức thư khác với "Em đói khổ như lũ chuột trong nhà thờ,... Kẻ khốn khổ của cô".

Vào mùa thu năm 1828, Abel quay trở lại Christiania để chuẩn bị khai giảng năm học mới. Trong ít tuần tháng 9 anh đã bị ốm phải nằm liệt giường. Tuy nhiên, vào giữa tháng 12, trong một mùa đông cực kỳ giá lạnh, bỏ qua lời khuyên của em gái, anh lại tới Froland để hưởng mùa Giáng sinh cùng với người yêu. Anh lại bị ốm ngay sau lễ Giáng sinh và bắt đầu ho dữ dội. Mặc dù trong điều kiện hết sức bi đát, nhưng Abel vẫn viết xong một bản tóm tắt ngắn về chuyên luận ở Paris của anh (chuyên luận mà anh sợ là sẽ biến mất vĩnh viễn) và gửi cho tạp chí *Crelle's Journal*. Ngày 9 tháng 1 năm 1829, Abel đã ho ra máu và đã phải gọi bác sĩ trong vùng tới cấp cứu. Viên bác sĩ đã ngại ngần dùng các từ "bệnh lao" hay "bệnh phổi" vì những từ đó thực sự là một bản án tử hình, nên ông đã chẩn đoán Abel mắc bệnh viêm phổi. Ít tháng sau, điều đó đã trở thành cơn ác mộng kinh hoàng đối với người thân của anh. Crelly và hai cô con gái lớn nhà Smith thay nhau ngày đêm túc trực bên giường bệnh. Trong những đêm đau đớn và mất ngủ đó, Abel nguyền rủa cả nghề y đã không có những tiến bộ kịp thời để cứu giúp anh. Rồi có những ngày bệnh tình của Abel hơi khá hơn. Anh cứ nhắc đi nhắc lại mấy lần rằng nhà toán học Jacob Jacobi là người hiểu rõ nhất giá trị các công trình của anh. Thi thoảng Abel lại ngậm ngùi tự thương mình và cay đắng phàn nàn rằng cái nghèo đói cứ lẽo đẽo bám theo anh. Khi mùa đông dần qua, giọng nói của Abel trở nên khàn dần đi mỗi ngày, rồi đến mức tiếng nói của anh những người đứng xung quanh cũng không nghe rõ nữa. Tới tháng 4, bệnh tình của anh xấu đi rõ rệt. Và rồi sau một đêm vật vã, Abel đã qua đời lúc 16 giờ ngày 6 tháng 4, với Crelly và một người con gái nhà Smith ở bên cạnh giường bệnh. Khi ấy anh mới 26 tuổi. Crelly suy sụp đã viết cho bà Hansteen ngày 11 tháng 4: "Abel của con đã chết rồi! Thế là con đã mất mọi thứ trên đời! Chẳng còn gì nữa, chẳng gì còn lại cho con nữa".

Ngày 8 tháng 4, vẫn còn chưa biết tin về cái chết của Abel, Crelle đã viết cho anh từ Berlin với niềm vui tột độ: "Bây giờ, bạn thân mến và quý giá của tôi, tôi mang lại cho bạn một tin tốt lành đây: "Bộ Giáo dục đã quyết định mời bạn tới Berlin và bố trí công việc cho bạn ở đây.""

Abel được an táng ở Froland nhằm ngày 13 tháng 4 năm 1829, một ngày sau trận bão tuyết dữ dội. Bạn bè của anh đều đến dự lễ tang và trong lời Cáo phó, Crelle viết:

> Toàn bộ công trình của Abel đã được hình thành nên bởi một tài năng chói sáng và một sức mạnh tư duy phi thường... những khó khăn dường như tiêu biến trước sự tấn công của thiên tài này. Nhưng không chỉ tài năng vĩ đại của anh... làm cho sự mất mát này là vô cùng thương tiếc. Anh xuất chúng còn do sự thanh khiết và cao thượng trong tính cách anh và bởi sự khiêm tốn phi thường đã khiến mọi người thương yêu, quý trọng anh vô bờ cũng như ngưỡng mộ thiên tài của anh vậy.

Ngày 28 tháng 6 năm 1830, Viện Hàn lâm Khoa học Pháp đã thông báo Giải thưởng lớn về những thành tựu toán học đã được trao cho Abel và Jacobi.

Thế còn số phận của cái chuyên luận mà Abel làm tại Paris thì sao? Theo những thư từ trao đổi giữa Jacobi và Legendre và sự can thiệp của lãnh sự quán Na Uy ở Paris thì Cauchy rốt cục cũng đã tìm ra bản thảo đó vào năm 1830. Và phải mất 11 năm trời bản thảo đó mới được đem in. Và cuối cùng, như một cái kết hài hước cho câu chuyện truyền kỳ về sự cẩu thả này, bản thảo lại bị thất lạc một lần nữa trong quá trình in và chỉ xuất hiện trở lại ở Florence vào năm 1952.

Năm 2002, Chính phủ Na Uy đã lập một quỹ 22 triệu đôla cho Giải thưởng Abel về toán học. Giải thưởng này cũng được trao bởi vua Na Uy theo đúng phong cách Giải Nobel. Giải thưởng đầu tiên, trị giá 816 000 đôla, được trao ngày 3 tháng 6 năm 2003 cho Jean-Pierre Serre, một nhà toán học nổi tiếng người Pháp; giải thứ hai được trao ngày 25 tháng 5 năm 2004 cho hai nhà toán học nổi tiếng khác là Ngài Michael Francis Atiyah thuộc Đại học Edinburgh và Isadore M. Singer thuộc Học viện Công nghệ Massachussett (MIT). Cuối cùng thì Giải thưởng này cũng đã mang được tên tuổi nhà toán học, người đã chứng minh được rằng một phương trình nào đó không thể giải được bằng một công thức, đến với đại đa số công chúng. Trớ trêu thay, công trình xuất sắc của người nghèo khổ nhất trong số các nhà toán học lại được vinh danh bằng một giải thưởng trị giá cả đống tiền.

Có một cuộc gặp gỡ đã không bao giờ xảy ra trong mùa đông u ám 1826 ở Paris. Không hề biết về sự tồn tại của Abel, nhà toán học trẻ tuổi người Pháp ở cách anh chỉ vài dặm, cũng đang bắt đầu bị ám ảnh bởi chính những vấn đề đã từng hấp dẫn chàng trai trẻ người Na Uy. Liệu phương trình bậc năm có giải được bằng một công thức hay không? Hay nói một cách tổng quát hơn, những phương trình nào thì có thể giải được bằng một công thức? Khi Abel ở Paris thì Évariste Galois chỉ mới 15 tuổi, nhưng đã ngấu nghiến đọc những sách về toán học, dường như chúng là những cuốn truyện phiêu lưu vậy. Thật buồn thay, chúng ta sẽ không bao giờ biết được cuộc gặp gỡ giữa hai ngôi sao băng đó, nếu có, thì sẽ làm cho cuộc đời của họ thay đổi như thế nào? Chỉ có một điều là chắc chắn: Nếu người ta có thể hình dung ra được một câu chuyện nào thậm chí còn bi đát hơn cả câu chuyện của Abel thì đó là câu chuyện của Galois.

V

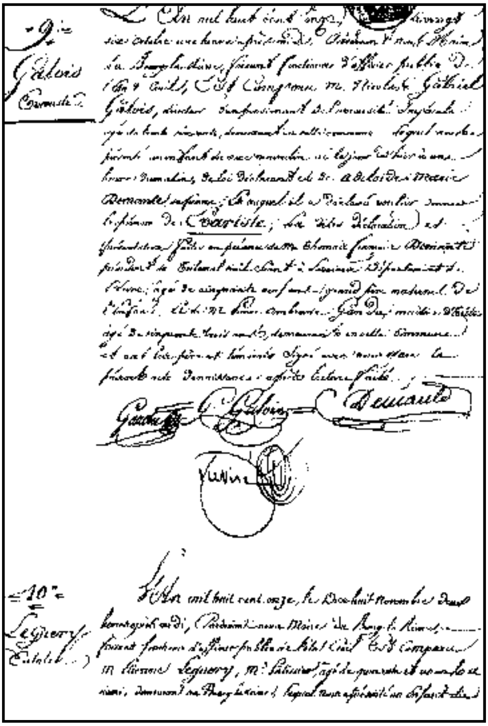
Nhà toán học lãng mạn

Buổi sáng ngày 30 tháng 5 năm 1832, một phát súng bắn từ khoảng cách 25 bước đã găm đúng vào bụng Évariste Galois. Mặc dù bị trọng thương, nhưng Galois không chết tại chỗ. Anh cứ thế nằm trên đất cho tới khi một người tốt bụng vô danh, có thể là một cựu sĩ quan quân đội hoặc cũng có thể là một nông dân, đi qua đỡ anh dậy và đưa vào bệnh viên Cochin ở Paris. Ngày hôm sau, với người em trai Alfred ở bên cạnh, Galois đã qua đời vì bị viêm phúc mạc. Mấy lời cuối cùng của anh mà người em còn nghe được: "Đừng khóc nữa, anh cần phải lấy hết dũng cảm để ra đi vào tuổi hai mươi".

Đó là sự kết thúc vô cùng ảm đạm của một con người có viễn kiến nhất trong số tất cả các nhà toán học – một sự kết hợp hiếm hoi của một thiên tài như Mozart và một thi nhân lãng mạn như Huân tước Byron, tất cả đã đan bện vào trong một câu chuyện, mà về sự bi thương của nó, không kém gì câu chuyện tình của Romeo và Juliet.

GALOIS - NHỮNG NĂM THÁNG TUỔI TRẺ

Évariste Galois sinh ra vào đêm ngày 25 tháng 10 năm 1811 và được đặt theo tên thánh được tưởng nhớ vào ngày 16 tháng 10 (hình 52 chụp giấy khai sinh và Phụ lục 8 cho cây phả hệ mở rộng của gia đình). Cha anh, Nicolas-Gabriel Galois (hình 53), là một người có giáo dục, vào thời gian đó đang quản lý một trường học dành cho nam sinh khá nổi tiếng ở Bourg-la-Reine (ngày này ở ngoại ô Paris) – một vị trí được kế thừa từ ông nội của anh. Vào những thời gian rỗi Nicolas-Gabriel sáng tác những câu thơ dí dỏm và những



Hình 52

vở kịch vui, cả hai thứ ấy khiến ông trở thành một vị khách quen ở các buổi liên hoan tại gia vào thời gian đó. Mẹ Évariste, bà Adéläide Marie Demante, con gái của một luật gia làm việc ở Khoa Luật Đại học Paris, bản thân bà cũng biết làm thơ theo lối cổ điển. Gia đình Demante sống ngay bên phải số nhà 54, phố Grand Rue – nhà của Galois (hình 54 chụp ngôi nhà của Galois khi nó còn tồn tại).

Vào giữa thời đại Napoleon, Nicolas-Gabriel là một thần dân luôn trung thành với hoàng đế. Anh trai ông, thậm chí còn hơn thế, đã trở thành một sĩ quan trong đội Vệ binh Hoàng gia. Tuy nhiên, thời kỳ sau cách mạng là cực kỳ hỗn loạn và sau thất bại thảm hại ở Nga, Napoleon đã buộc phải thoái vị vào năm 1814 để nhường ngôi cho vua Louis XVIII thuộc dòng họ Bourbon. Sự trị vì đầy tính hoang tưởng vĩ cuồng của vị vua này kèm theo sự phục hồi dần dần quyền lực của nhà thờ, đã đủ để dấy lên một phong trào đòi tự do và Nicolas-Gabriel là người ủng hộ bằng miệng hăng hái nhất. Lợi dụng làn sóng bất mãn của dân chúng, Napoleon đã chớp lấy cơ hội quay về nắm quyền vào tháng 3 năm 1815 và chỉ thất thủ đúng 100 ngày sau, và lần này thì mất vĩnh viễn. Tuy nhiên, trong thời gian trở về ngắn ngủi của Napoleon, Nicolas-Gabriel đã được bổ nhiệm là thị trưởng Bourg-la-Reine, một chức vụ mà ông tiếp tục giữ ngay cả khi Napoleon thất trận ở Waterloo (hình 53 là tờ giấy tương đương với Hộ chiếu của Nicolas-Gabriel). Những thay đổi như cơm bữa của chính quyền và bản chất giống như con kỳ nhông của bầu không khí chính trị đã làm phân cực xã hội

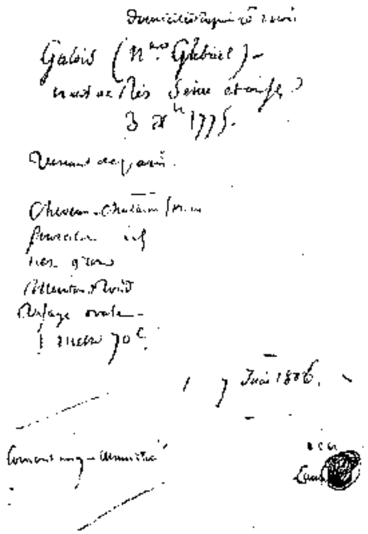
Hình 53

Pháp thành hai phe khá rõ rệt. Phe tả là những người tự do và cộng hòa, họ lấy cảm hứng từ những lý tưởng đang lan rộng của Cách mạng Pháp. Phe hữu là những người "chính thống" và "bảo hoàng cực đoan", mà mô hình nhà nước của họ là nhà nước quân chủ do nhà thờ thống trị.

Giống như Abel, lúc bé Évariste được dạy dỗ ở nhà. Bà Adéläide Marie đã cung cấp cho con một nền tảng khá vững chắc về các tác phẩm kinh điển và tôn giáo, đồng thời cũng lồng vào đó những tư tưởng tự do. Ngay sau lần sinh nhật thứ mười của cậu, mẹ Évariste có ý định ban đầu gửi cậu tới một trường ở Reims, nhưng đã quyết định giữ cậu ở nhà thêm hai năm nữa.

Hình 54

Tháng 10 năm 1823, Évariste cuối cùng đã phải rời nhà đi học nội trú ở trường Trung học Louis-le-Grand. Ngôi trường rất có uy tín này đã tồn tại từ thế kỷ 16 và trong số những người tốt nghiệp ở đây ra và nổi tiếng sau này có thể kể tới nhà cách mạng Robespierre và sau đó là nhà văn Victor Hugo. Trước khi Galois nhập học, trường này được ưu đãi là vẫn mở cửa trong cả thời kỳ rối ren của cuộc Cách mạng Pháp. Mặc dù rất nổi tiếng về học thuật, nhưng ngôi trường lúc đó đặt trong một tòa nhà chẳng khác gì nhà tù và có nhu cầu cấp bách phải sửa chữa. Tập thể học sinh ở đây là sự thể hiện tuyệt vời toàn bộ những quan điểm chính trị trong xã hội Pháp thời đó – một dấu hiệu chắc chắn



Hình 55

của sự bất ổn. Nổi loạn, cãi cọ giữa các học sinh, và sống phóng đãng là chuẩn mực của trường Louis-le-Grand lúc bấy giờ. Sự bất tuân còn được nuôi dưỡng bởi một thứ kỷ luật còn nghiêm khắc hơn cả quân đội được áp đặt lên lũ học trò. Chương trình khắc khổ bắt đầu từ lúc 5h30 và kết thúc đúng 20h30 đã được kết cấu chặt chẽ đến từng phút, chỉ được phép có một thời gian giải lao rất ngắn ngủi. Sự im lặng bao trùm ngay cả trong những bữa ăn đạm bạc. Chẳng hạn như bữa sáng chỉ có bánh mì khô và nước trắng.

Trong lớp học, học sinh phải ngồi từng cặp trên những bậc đá trần, mỗi cặp chỉ được chiếu sáng bằng một ngọn nến. Việc nhìn thấy chuột chạy ngang qua sàn nhà lớp học là chuyện bình thường chẳng khiến ai bận tâm. Chỉ cần sai lệch một chút cái chương trình cưỡng bách đó – chẳng hạn, như đơn giản chỉ cần bỏ không ăn hết bữa ăn thôi – là sẽ bị biệt giam ở một trong 12 phòng giam đặc biệt. Nói một cách đại thể thì việc chuyển từ bầu không khí an lành và hạnh phúc ở nhà tới một môi trường đầy bạo lực và giam hãm ở trường quả là một cú sốc đối với Galois.

Évariste nhập trường Louis-le-Grand ngay sau khi một nhân vật bảo thủ tên là Nicolas Berthot được bổ nhiệm là hiệu trưởng. Lũ học trò ngờ rằng đây mới chỉ là bước đầu tiên trong ý định của phái hữu muốn lôi kéo nhà trường trở về cội nguồn dòng Tên của nó.

Học sinh đã thể hiện sự bất bình của họ bằng cách không chịu hát trong một buổi lễ ở nhà thờ và không thèm, như thường lệ, nâng cốc chúc vua Louis XVIII và các quan chức khác trong một bữa tiệc của nhà trường vào ngày 28 tháng 1 năm 1824. Nhà trường đã phản ứng nhanh và mạnh mẽ: 117 học sinh bị đuổi ngay lập tức. Galois khi đó mới chỉ học học kỳ đầu tiên, và không có tham gia gì, nhưng về mặt tình cảm thì chắc chắn đã có ảnh hưởng.

Mặc dù trong những điều kiện tồi tệ và kỷ luật chặt chẽ một cách vô nhân như vậy, nhưng hai năm đầu tiên của Évariste ở Louis-le-Grand có thể nói là khá thành công. Việc chuẩn bị một cách tuyệt vời của mẹ anh về các tác phẩm văn học cổ điển Hy Lạp và Latinh không bao lâu đã khiến anh trở nên nổi bật về kể chuyện bằng tiếng Latinh và dịch từ tiếng Hy Lạp. Trong một cuộc thi kiểm tra toàn diện, Galois đã đoạt giải về toán. Nhưng rồi môi trường sống tồi tệ đã bắt đầu có tác động. Mùa đông ẩm ướt 1825-1826 đã mang lại một cơn đau tai khủng khiếp và kéo dài nhiều tháng lại còn làm cho tâm trạng của Galois càng xấu đi thêm. Sự xa cách người cha mà trước kia thi thoảng anh thường vui thích trao đổi với ông vài khổ thơ vui, giờ đây đã đặc biệt tác động xấu đến chàng trai trẻ. Do vậy việc học tập của anh đã bắt đầu sút kém.

Ở bên ngoài bốn bức tường nhà trường, các sự kiện diễn biến rất nhanh. Vua Louis băng hà tháng 9 năm 1824 và em trai ông ta lên thế ngôi, đó là vua Charles X. Sự chuyển tiếp này đã được đánh dấu bởi một sự tăng trưởng ghê gớm về ảnh hưởng của giới tăng lữ và các phần tử cực hữu. Bị kết tội “chống tôn giáo” – một tội được định nghĩa rất mù mờ - bây giờ có thể lĩnh án tử hình.

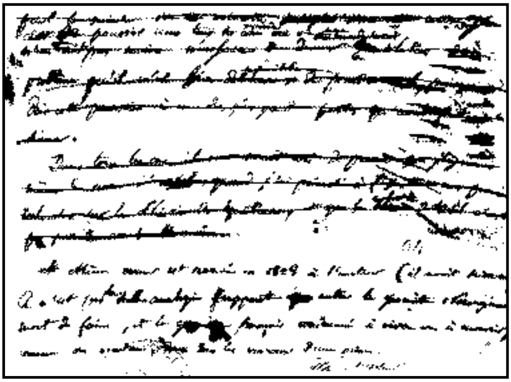
SỰ RA ĐỜI CỦA MỘT NHÀ TOÁN HỌC

Mùa thu năm 1826 đã chứng kiến sự cản đường đầu tiên đối với Galois, một hành động rất đáng xấu hổ. Đó là môn hùng biện. Mặc dù Galois khá cần mẫn, nhưng những nỗ lực không mấy nhiệt tình của anh trong môn học này, nói chung, vẫn được thầy giáo của anh đánh giá tốt. Tuy nhiên, lão hiệu trưởng Pierre-Laurent Laborie, một kẻ cực kỳ bảo thủ, lại có những ý tưởng hơi khác. Theo quan điểm cứng nhắc của ông ta thì Galois còn quá trẻ để theo học những môn cao như thế, vì ở đấy đòi hỏi "sự phán xét, đánh giá mà chỉ ở tuổi trưởng thành mới có". Do đó, sang tháng Giêng, Galois bị buộc phải học lại ở lớp đệ tam trước sự buồn rầu của cha mẹ anh. Những cụm từ như "độc đáo và bí hiểm" rồi "giỏi nhưng kỳ dị" đã bắt đầu xuất hiện trong những phiếu nhận xét học sinh mô tả về tính cách của anh. Tuy nhiên, kinh nghiệm không vui với môn hùng biện hóa ra lại là may: Galois đã phát hiện ra toán học. Hình 56 là chân dung của Galois vào khoảng thời gian đó do một bạn cùng lớp vẽ.

Hình 56

Thầy giáo mới về môn toán của lớp Dự bị, ông Hyppolite Vernier, đã quyết định giới thiệu với lớp một quyển sách mới cho môn hình học. Đó là cuốn *Những cơ sở của hình học* của Legendre được xuất bản lần đầu tiên năm 1794 và đã nhanh chóng trở thành cuốn sách được chọn của khắp châu Âu. Cuốn sách kinh điển này vào lúc đó đã phá vỡ truyền thống Euclid hơi nặng nề trong môn hình học ở trường trung học. Người ta đồn rằng Galois đang đói toán đã nuốt trọn quyển sách của Legendre chỉ trong có hai ngày, trong khi người ta dự kiến sẽ dạy nó trong hai năm học. Mặc dù không thể kiểm tra xem câu chuyện đó có đúng hay không (nhưng chắc là hơi nói quá), nhưng có một điều là chắc chắn: vào mùa thu năm 1827, Galois mất hoàn toàn hứng thú với các môn học khác và chỉ có đam mê toán học. Thầy giáo dạy môn hùng biện của anh ban đầu có hiểu nhầm sự thờ ơ của anh và đã nói về việc học tập thiếu cảm hứng của anh như sau: "Trong những bài làm của em này không có gì khác ngoài những ý nghĩ bay bổng kỳ lạ và sự cẩu thả", nhưng sau học kỳ thứ hai ông đã kết luận "em này chịu sự quyến rũ đầy hưng phấn của toán học. Tôi nghĩ sẽ là tốt nhất cho em nếu như cha mẹ của em cho phép em không học gì khác ngoài toán học". Học kỳ thứ ba chỉ khẳng định thêm lời phê: "Bị chi phối bởi niềm đam mê toán học và bỏ qua hoàn toàn mọi thứ khác".

Đúng là Galois đã bị bỏ bùa mê. Anh quẳng hết sang một bên những cuốn sách giáo khoa thông thường và đi thẳng tới những bài báo nghiên cứu gốc. Lướt hết bài báo toán học chuyên nghiệp này tới bài khác hệt như thanh niên bây giờ ngấu nghiến Harry Potter hết tập này đến tập khác. Galois chìm đắm hoàn toàn trong chuyên luận *Giải các phương trình đại số và Lý thuyết các hàm giải tích* của Lagrange. Trải nghiệm khai mở trí óc đó đã dẫn tới một nỗ lực đầy tham vọng. Hoàn toàn không biết gì về các công trình



Hình 57

của Ruffini và Abel, Galois đã dành ra hai tháng để thử giải phương trình bậc năm. Và cũng hệt như chàng trai Na Uy đi trước, ban đầu anh cũng nghĩ rằng mình đã tìm ra công thức, nhưng sau đó cũng thất vọng vì phát hiện ra sai sót trong lời giải của mình. Hình 57 in một chú thích biên tập sau này nói về sự thật là sai sót của Abel (vì nghĩ rằng mình đã giải được phương trình bậc năm) đã được lặp lại ở Galois và đó không phải là sự giống nhau duy nhất đến ngỡ ngàng giữa một nhà hình học Na Uy đã phải chịu đói khát cho đến chết và một nhà hình học Pháp đã bị kết án sống hay chết... sau song sắt nhà tù". Cũng như trong trường hợp của Abel, sự vấp ngã nhỏ bé đó chỉ càng đẩy Galois trên hành trình tới những thứ to lớn hơn liên quan đến tính khả giải của các phương trình đại số.

Nhiều trở ngại nghiêm trọng nữa sẽ còn xuất hiện, một số do chính Galois tạo ra. Như thầy Vernier đã chẩn đoán rất đúng rằng mặc dù thiên tài và trí tưởng tượng đầy sáng tạo của anh, nhưng Galois chưa bao giờ có thể học tập một cách có phương pháp và làm việc có hệ thống cả. Cực kỳ nổi bật trong một số môn, nhưng anh lại thiếu một số nền tảng cơ bản nhất của các môn khác. Không ý thức được những khiếm khuyết của mình và bịt tai trước những lời khuyên của Vernier, tháng 6 năm 1828, Galois đã đánh bạo thi vào trường Bách khoa Paris huyền thoại sớm một năm. Trường Bách khoa được thành lập năm 1794 như một trường chủ công đào tạo kỹ sư và các nhà khoa học của nước Pháp. Lagrange, Legendre, Laplace và nhiều nhà khoa học danh tiếng khác, ở thời này hay thời khác, đều đã từng giảng dạy ở trường này. Bách khoa cũng nổi tiếng là một trường có bầu không khí tự do. Nếu như Galois trúng tuyển thì có lẽ trường Bách khoa sẽ là mảnh đất nuôi dưỡng lý tưởng đối với tinh thần đầy cao vọng của anh. Tuy nhiên, do sự chuẩn bị chưa đủ nên Galois đã bị trượt. Kỳ vọng bị tan vỡ đó có lẽ là mầm mống của cảm giác bị ngược đãi và sau này đã phát triển tới những chiều kích hoang tưởng rõ ràng.

Buộc phải tiếp tục học tại trường Louis-le-Grand, Galois đã ghi tên vào lớp chuyên toán của thầy Louis-Paul-Émile Richard (1795-1849). Richard tỏ ra đối với Galois cũng như Holmboe đối với Abel vậy, họ đều là thầy giáo và là người nâng đỡ luôn tạo cảm hứng và kích thích học sinh. Bản thân Richard không phải là một nhà toán học xuất sắc, nhưng ông am hiểu những phát triển toán học mới nhất. Ông ngay lập tức nhận ra những khả năng phi thường của Galois và động viên anh dấn thân vào nghiên cứu với phát biểu đầy nhiệt thành này: "học sinh này đã vượt lên cao hơn hẳn tất cả các học sinh khác trong trường". Ông cũng nhận xét rằng "học sinh này chỉ nghiên cứu toán học cao cấp". Cũng như mẹ và chị của Picasso, khi ý thức được một cách đầy đủ tài năng đặc biệt của ông, đã giữ toàn bộ những bức tranh thuở nhỏ của ông, Richard đã giữ được 12 quyển vở làm bài tập của Galois. Những tài liệu này cuối cùng đã được đưa vào thư viện của Viện Hàn lâm Khoa học. Một nhà toán học khác mà Galois đã gặp trong cùng thời gian đó là Jacques-François Sturm (1803-1855). Sturm sau này đã trở thành một trong số những người đã ngay lập tức nhận ra rằng những ý tưởng của Galois là những viên kim cương dưới dạng thô.

Năm 1829 Galois công bố bài báo toán học đầu tiên. Bài báo tương đối nhỏ này có liên quan tới những đối tượng toán học có tên là các *phân số liên tục*. Công trình này có ứng dụng cho các phương trình bậc hai và được công bố trên *Annals de mathematiques pures et appliquées* (Tạp chí Toán học Thuần túy và ứng dụng). Thật tình cờ, Abel đã mất năm ngày sau khi bài báo đầu tiên của Galois được công bố. Đối với Galois, sự đột phá đầu tiên đó vào nghiên cứu toán học chẳng bao lâu sau đã biến thành một sự bùng nổ những ý tưởng mới. Chàng trai 17 tuổi đang sắp sửa làm một cuộc cách mạng trong đại số học. Trong khi Abel chứng minh một cách dứt khoát rằng phương trình bậc năm tổng quát không thể giải được bằng một công thức chỉ liên quan đến bốn phép tính số học đơn giản và phép khai căn, thì sự ra đi quá sớm của anh đã để mở một câu hỏi còn lớn hơn nhiều: Làm thế nào xác định được một phương trình đã cho (bậc năm hoặc cao hơn) là giải được bằng một công thức hay không? Cần nhớ rằng nhiều phương trình đặc biệt là giải được. Về nguyên tắc, chứng minh của Abel còn cho phép khả năng là mỗi phương trình đặc biệt có công thức nghiệm riêng của nó.

Để trả lời câu hỏi về tính giải được, Galois không chỉ đã đưa vào khái niệm hạt giống là nhóm mà còn xây dựng cả một ngành hoàn toàn mới của đại số mà ngày nay có tên là lý thuyết Galois. Để làm điểm xuất phát, Galois đã lấy lý thuyết các phương trình mà Lagrange đã bỏ dở. Galois đã đào bới vào những hệ thức giữa các nghiệm, nếu có, (như hệ thức $x_1x_4 = 1$ giữa hai trong số bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 của phương trình bậc bốn $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$) và những hoán vị các nghiệm này làm cho các hệ thức nói trên không thay đổi. Tuy nhiên, đây chính là chỗ mà thiên tài của anh thực sự cất cánh. Galois đã gắn cho mỗi phương trình một "mã di truyền" riêng – đó là *nhóm Galois* của phương trình đó – và anh đã chứng minh được rằng các tính chất của nhóm Galois quyết định phương trình có giải được bằng một công thức hay không. Vậy là đối xứng đã trở thành một khái niệm then chốt, và nhóm Galois là một thước đo trực tiếp đối xứng của một phương trình. Tôi sẽ mô tả những nét căn bản trong chứng minh xuất sắc của Galois trong Chương 6.

Richard đã có ấn tượng mạnh về các ý tưởng của Galois đến mức ông cho rằng thiên tài trẻ tuổi này sẽ phải được nhận thẳng vào trường Bách khoa mà không cần tham gia thi tuyển. Để cho Galois cơ hội đạt được mục tiêu đầy tham vọng đó, ông đã động viên anh trình bày lý thuyết của mình dưới dạng hai tiểu luận và chính Richard sẽ chuẩn bị mang nó tới gặp Cauchy vĩ đại để nhờ ông ta trình lên Viện Hàn lâm Khoa học. Hai tiểu luận này thực tế đã nộp vào ngày 25 tháng 5 và 1 tháng 6 năm 1829, đã được Cauchy giới thiệu vắn tắt và đã được tin tưởng giao cho Cauchy, Joseph Fourier (thư ký của Viện Hàn lâm) và hai nhà vật lý toán Claude Navier và Denis Poisson làm phản biện.

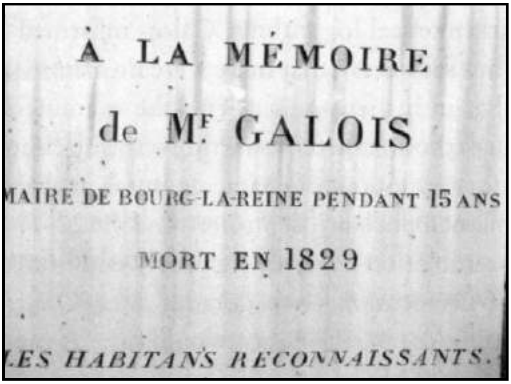
Hơn sáu tháng sau khi nộp, ngày 18 tháng 1 năm 1830 Cauchy đã viết bức thư xin lỗi sau gửi tới Viện Hàn lâm:

> Lẽ ra hôm nay tôi phải trình bày trước Viện, thứ nhất, là bản nhận xét về công trình của Galois và thứ hai, là một tiểu luận về xác định các nghiệm nguyên thủy trong đó tôi sẽ chỉ ra làm thế nào có thể quy việc xác định này về giải các phương trình số mà tất cả các nghiệm của nó đều là các số nguyên dương. Tôi đang không được khỏe. Tôi rất tiếc không tới dự được phiên họp hôm nay và rất mong các ngài bố trí thời gian cho tôi được trình bày hai vấn đề trên tại phiên họp sau.

Nhưng trong phiên họp tiếp theo diễn ra vào ngày 25 tháng Giêng, bản tính ích kỷ của Cauchy lại nổi lên một lần nữa, và ông chỉ trình bày bản tiểu luận của ông mà không nhắc gì đến công trình của Galois hết. Nhưng điều đó chưa phải đã là kết thúc sự không may mắn liên quan tới tập bản thảo này. Tháng 6 năm 1829, Viện Hàn lâm Khoa học đã lập một Giải thưởng lớn mới cho toán học. Mệt mỏi vì chờ đợi kết quả phản biện của Cauchy và được biết từ tạp chí *Ferrusac's Bulletin* công trình về lý thuyết các phương trình của Abel, Galois đã quyết định nộp lại công trình cũ với một số sửa đổi như là công trình đăng ký dự giải. (Tôi không tìm được bằng chứng trực tiếp ủng hộ lập luận cho rằng Cauchy đã động viện Galois tham dự giải, thậm chí mặc dù một số bằng chứng gián tiếp được mô tả sau này chỉ ra rằng Cauchy đã rất ấn tượng về công trình đó). Công trình mà Galois nộp dự xét giải ("*Về những điều kiện để một phương trình giải được bằng căn thức*" – tức là nhờ bốn phép tính số học và phép khai căn), từ đó cho đến nay đã được đánh giá là một trong những kiệt tác gây cảm hứng nhất trong lịch sử toán học. Công trình được nộp vào tháng 2 năm 1830, gần ngay trước ngày hết hạn là 1 tháng 3. Hội đồng xét giải gồm các nhà toán học Legendre, Poisson, Lacroix và Poinsot. Vì những lý do hoàn toàn chưa rõ, thư ký Viện Hàn lâm là Fourier đã mang bản thảo công trình của Galois về nhà. Ông mất ngày 16 tháng 3 và bản thảo này vĩnh viễn không bao giờ được tìm thấy lại nữa trong đống giấy tờ của ông. Do đó, Galois hoàn toàn không hay biết, công trình dự giải của anh đã không bao giờ thậm chí được xem xét tới. Giải thưởng này cuối cùng đã được trao cho Abel (truy tặng) và Jacobi. Bạn có thể hình dung được cơn giận dữ của Galois khi cuối cùng anh biết rằng bản thảo của mình đã bị mất. Chàng trai trẻ tuổi vốn hoang tưởng này giờ đây đinh ninh rằng mọi lực lượng hèn kém đã hợp nhất lại để phủ nhận tiếng tăm hoàn toàn xứng đáng của anh.

TAI HỌA GIÁNG XUỐNG HAI LẦN

Nếu tháng 6 năm 1829 là tháng tương đối hạnh phúc của Galois, với công trình quan trọng đã được nộp cho Viện Hàn lâm, thì tháng 7 lại là tháng tồi tệ nhất của anh. Việc vua Charles X đăng quang năm 1824 đã dẫn đến hậu quả là quyền lực của giới tăng lữ và cực hữu tăng lên đáng kể. Ở Bourg-la-Reine, một linh mục mới đã phối hợp các lực lượng với những quan chức cánh hữu khác âm mưu bãi Nicolas-Gabriel Galois – một người thuộc phái tự do – khỏi chức thị trưởng. Tay linh mục trẻ đã làm giả mạo chữ ký của thị trưởng trên một số đoạn thơ hai câu ngớ ngẩn và mấy bài thơ vui hèn hạ. Vốn là một người rất tinh tế, lẽ dĩ nhiên, Nicolas-Gabriel không thể chịu được vụ xì căng đan xấu xa đã nổ ra đó, và ông đã tự sát bằng hơi ngạt. Bi kịch này đã xảy ra vào ngày 2 tháng 7, trong căn hộ của Nicolas-Gabriel ở Paris, phố Saint Jean-de-Bauvais chỉ cách trường của Évariste một quãng ngắn. Chàng trai đau khổ này còn phải chịu một đớn đau nữa về tình cảm – đó là cuộc nổi loạn nổ ra ngay trong lễ tang nhằm phản đối chống lại ý định tham chính của gã linh mục hiểm độc. Hình 58 là ảnh chụp tấm bia tưởng niệm thị trưởng Nicolas-Gabriel Galois hiện vẫn còn trên bức tường của tòa thị chính Bourg-la-Reine.

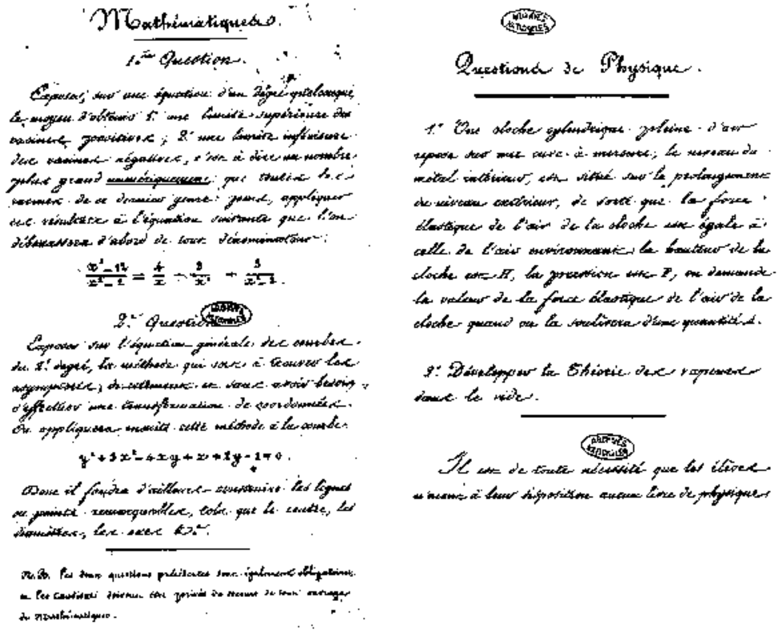


Hình 58

Khó có thể tưởng tượng thời điểm nào tồi tệ hơn lúc này để Galois dự thi lần thứ hai vào trường Bách khoa. Nhưng số phận đã định như thế, kỳ thi diễn ra vào thứ hai, ngày 3 tháng 8, đúng một tháng sau đám tang, trong khi Galois vẫn còn đang đau buồn. Trong lịch sử toán học, kỳ thi tai tiếng này có thể coi như đồng nghĩa với sự truy vấn Galileo của Tòa án dị giáo. Theo lời nhà sử học E.T. Bell thì so với Galois, hai vị giám khảo là Charles Louis Dinet và Lefebure de Fourcy "gọt bút chì cho anh không đáng". Thậm chí mặc dù bản thân Dinet vốn là cựu sinh viên của trường Bách khoa và là giáo viên đã được chính Cauchy ôn luyện cho để thi vào trường này, nhưng hai vị giám khảo đã được ngày hôm nay nhớ tới chỉ vì một điều duy nhất, đó là đã đánh trượt một trong số các thiên tài toán học vĩ đại nhất của mọi thời đại. Tên Galois đã không có trong danh sách 21 sinh viên mà Dinet đã cho đỗ.

Chúng ta không biết một cách chắc chắn điều gì đã xảy ra trong cuộc thi này. Có suy luận cho rằng vốn tính ưa tính nhẩm trong đầu và chỉ ghi kết quả cuối cùng lên bảng, nên Galois đã gây một ấn tượng không tốt trong kỳ thi vấn đáp. Trong cuộc thi này, người ta cho rằng anh đã bộc lộ hết những điều nghiền ngẫm lâu nay của anh. Dinet vốn đặc biệt nổi tiếng là thường cho những câu hỏi tương đối dễ nhưng lại hoàn toàn không khoan nhượng đối với các đáp số. Sự kiên nhẫn của Galois, vốn chưa bao giờ là mẫu mực cả, đã được kéo căng đến giới hạn bởi những sự kiện xung quanh cái chết của cha anh. Theo một phiên bản, khi được hỏi hãy trình bày khái quát về lôgarit số học, thì Galois đã nói thẳng vào mặt Dinet một cách kiêu ngạo rằng không có cái gì gọi là lôgarit *số học* cả. Người ta cũng đồn rằng, quá thất vọng vì hai vị giám khảo không hiểu nổi phương pháp phi chính thống của mình, Galois đã ném giẻ lau bảng vào mặt một vị. Câu chuyện này thực ra cũng không nằm ngoài tính cách của Galois, nhưng có nhiều khả năng không đúng, ít nhất là theo nhà toán học Joseph Bertrand (1822-1900). Hiển nhiên, chuyện thi trượt đã khiến Galois vô cùng cay đắng và chỉ làm tăng cảm giác bị ngược đãi của anh. Hai chục năm sau, biên tập viên Olry Terquem của tạp chí toán học *New Annals of Mathematics* đã nói "Một thí sinh có trí tuệ thượng thặng lại bị một vị giám khảo có trí tuệ thấp kém đánh trượt". Một bài tiểu sử đăng trên tạp chí *Magasin pittoresque* năm 1848 đã kết luận: "Vì không có cái gọi là "kinh nghiệm trình bày bảng", vì không được luyện tập giải những câu hỏi quá tủn mủn mà lại phải nói to lên trước một cử tọa lớn.... Galois đã được thông báo không đỗ". Vì tối đa chỉ được dự thi hai lần, Galois buộc phải thi vào Trường Dự bị (sau này được gọi là Cao đẳng Sư phạm) kém danh giá hơn. Tuy nhiên, vẫn có một trở ngại "nhỏ". Để được nhận vào, Galois phải có bằng tú tài về nghệ thuật và khoa học (tương đương bằng tốt nghiệp THPT), đồng thời phải qua được kỳ thi vấn đáp. Vì hoàn toàn không chú ý tới bất cứ môn gì trừ toán, nên việc qua được các kỳ thi đó cũng không phải dễ dàng gì. Thậm chí vị giám khảo môn vật lý đã rất sững sờ phê: "Thí sinh này hoàn toàn không biết gì... Tôi có nghe nói anh ta rất giỏi về toán. Điều đó quả làm cho tôi rất ngạc nhiên". Tuy nhiên, do chủ yếu dựa trên kết quả của môn toán, nên Galois đã trúng tuyển vào đầu năm 1830, ngành khoa học. Hình 59 là hình chụp trang đầu đề thi cuối năm môn toán (năm 1828) và môn vật lý (năm 1829) của Galois.

Tuy nhiên, không phải mọi thứ trong cuộc đời Galois đều tăm tối cả. Năm 1830, anh có ba bài báo – hai bài về các phương trình và một bài về lý thuyết số - đăng trên *Ferrusac's Bulletin*, một tạp chí có uy tín. Bài báo đầu tiên là tiền thân của lý thuyết các phương trình – một lý thuyết có tính cách mạng. Sự xuất hiện tên tuổi của anh ngay cạnh các nhà toán học hàng đầu thời đó, chắc phải mang



Mathématiques.

1.re Question.

Exposer, sur une équation d'un degré quelconque, le moyen d'obtenir 1.° une limite supérieure des racines positives; 2.° une limite inférieure des racines négatives, c'est à dire un nombre plus grand numériquement que toutes les racines de ce dernier genre; puis, appliquer ces résultats à l'équation suivante que l'on débarrassera d'abord de tout dénominateur:

[illegible]

2.e Question.

Exposer sur l'équation générale des courbes du 2.d degré, la méthode qui sert à trouver les asymptotes, directement et sans avoir besoin d'effectuer une transformation de coordonnées. On appliquera ensuite cette méthode à la courbe

$$y^2+3x^2-4xy+x+2y-1=0.$$

Donc il faudra d'ailleurs construire les lignes et points remarquables, tels que le centre, les diamètres, les axes etc.

N.B. Les deux questions précédentes sont également obligatoires. [illegible] de Mathématiques.

Questions de Physique.

1.° Une cloche cylindrique pleine d'air reposant sur une cuve à mercure; le niveau du métal intérieur est situé sur le prolongement du niveau extérieur, de sorte que la force élastique de l'air de la cloche est égale à celle de l'air environnant. La hauteur de la cloche est H, la pression est P, on demande la valeur de la force élastique de l'air de la cloche quand on la soulèvera d'une quantité d.

2.° Développer la théorie des vapeurs dans le vide.

Il est de toute nécessité que les élèves n'aient à leur disposition aucun livre de physique.

Hình 59

lại cho Galois một cảm giác thỏa mãn nhất định. Đặc biệt, trong số tháng 6, bài báo của Cauchy lại nằm kẹp giữa hai bài báo của Galois. Cũng trong năm đó, Galois gặp Auguste Chevalier, người mà sau này trở thành người bạn thân nhất của anh. Auguste và anh trai đã giới thiệu cho Galois những tư tưởng mới xã hội chủ nghĩa, được lấy cảm hứng từ triết lý bình đẳng tôn giáo được gọi là chủ nghĩa Saint Simon (theo tên một nhà quý tộc, bá tước Saint Simon). Những khái niệm kinh tế xã hội của hệ tư tưởng này trước hết dựa trên việc xóa bỏ hoàn toàn những bất bình đẳng trong xã hội. Do tính tình cuồng nhiệt của Galois, sự dính líu ngày càng gia tăng vào các hoạt động chính trị náo nhiệt không báo trước điều gì tốt lành ngoài những chuyện phiền phức.

TỰ DO, BÌNH ĐẲNG, BÁC ÁI

Ngay từ khi lên ngôi vào năm 1824, Charles X đã gây ra sự phản đối mạnh mẽ. Những người phản đối dòng họ Bourbon và chính phủ cực hữu của họ lại tách làm hai phái: phái cộng hòa và phái Orléans. Phái cộng hòa chủ yếu gồm sinh viên và công nhân, đã thể hiện những quan điểm đầy cảm hứng cách mạng trên tờ *La Tribune*. Còn phái kia muốn thay Charles X bằng Louis-Philippe, công tước xứ Orléans và tiếng nói chính của họ là tờ *Le National*. Trong cuộc bầu cử tháng 7 năm 1830, phe đối lập đã giành được chiến thắng vang dội: họ giành được 247 ghế so với 143 ghế của phe ủng hộ chính phủ. Đối mặt với nguy cơ phải thoái vị, Charles X âm mưu làm một cuộc đảo chính bằng cách phát ra một loạt các sắc lệnh đáng xấu hổ vào ngày 26 tháng 7. Trong sắc lệnh đầu tiên y tuyên bố: "Đình chỉ tự do báo chí... Không một tờ báo hay tờ rơi nào... được xuất hiện ở Paris hoặc ở các tỉnh". Những sắc lệnh khác tuyên bố hủy kết quả bầu cử và định ngày bầu cử mới. Những sắc lệnh này còn kèm theo một khuyến cáo của sở cảnh sát dán ở những nơi công cộng không cho phép đọc các tờ báo bị cấm. Và điều này đã vượt quá sự chịu đựng của những người dân Paris có thiên hướng phản kháng. Vào ngày 27 tháng 7, một bài báo của một phần tử thuộc phái Orléans tên là Louis-Aldolphe Thiers đã kêu gọi một cuộc bạo động ngay lập tức. Và cuộc nổi loạn đã diễn ra ngay đầu giờ chiều hôm đó. Mọi người mang đồ đạc trong nhà ra chặn ở mỗi góc phố. Trong ba ngày hơn năm ngàn chiến lũy đã được dựng lên và những cuộc chiến đấu dữ dội đã diễn ra trong tiếng chuông vang rền của các nhà thờ ở Paris. Các sinh viên trường Bách khoa đã làm nên lịch sử trong "*Ba ngày vẻ vang*" đó, họ đã chiến đấu hết sức dũng cảm trong và xung quanh Khu Latinh. Tinh thần và nghị lực bùng nổ của *Ba ngày vẻ vang* đó đã được thể hiện tuyệt vời trong bức tranh *Thần tự do dẫn dắt nhân dân* (hình 60) của Eugène Delacroix (1798-1863). Trong đám đông phía sau thần Tự do, người ta có thể nhận ra chiếc mũ điển hình của các sinh viên Bách khoa.

Hình 60

Khi những sự kiện đẫm máu đó đang diễn ra, với sự thất vọng không thể chịu nổi, Galois và các sinh viên trường Cao đẳng Sư phạm buộc phải đứng nghe những âm thanh dữ dội của cách mạng phía sau những cánh cửa đóng kín. Hiệu trưởng nhà trường, ông Guigniault, quyết định dùng mọi biện pháp, kể cả dọa sẽ gọi quân đội tới, để ngăn cản sinh viên tham gia vào cuộc bạo động. Vào buổi tối ngày 28, Galois không thiết làm gì hết. Tuyệt vọng, anh đã hai ba lần định vượt tường ra ngoài, nhưng không thành. Bị tổn thương và cam chịu thất bại anh đành phải chấp nhận bỏ lỡ cuộc cách mạng.

Khi khói thuốc súng đã tan biến, đã có tới gần bốn ngàn người đã bị chết. Như một sự nhượng bộ giữa những người cực hữu và những người cộng hòa, ngày 30 tháng 7, công tước xứ Orléans vào Paris và lên ngôi ngày 9 tháng 8 và lấy vương hiệu coi như đã được điều đình là Louis-Philippe I, vua của nước Pháp. Vua Charles X phải đi lưu đày, và Cauchy – luôn là người trung thành với dòng họ Bourbon - cũng rời nước Pháp như một thầy giáo dạy kèm cho cháu nội Charles. Vốn là một kẻ cơ hội, hiệu trưởng trường Cao đẳng Sư phạm Guigniault nhanh chóng buộc sinh viên của mình phải phục vụ chính phủ lâm thời mới. Galois vô cùng khinh bỉ lão hiệu trưởng đạo đức giả, và anh quyết định sẽ lợi dụng ngay cơ hội đầu tiên để phơi bày thái độ hai mặt xảo quyệt của lão.

Mùa hè năm đó ở Bourg-la-Reine, gia đình Galois hoàn toàn ngỡ ngàng nhận thấy chàng trai Évariste vốn xưa kia thư sinh và kín đáo nay bỗng trở thành một nhà cách mạng cuồng nhiệt đang chuẩn bị để dâng hiến mình cho các lý tưởng cộng hòa. Trong mùa thu sau đó, khi đã trở lại trường, anh đã tham gia vào nhóm chiến đấu của phái cộng hòa có tên là *Hội những người bạn dân*. Cũng trong thời gian đó, anh đã kết bạn với những người cộng hòa khác mà sau này trở thành những nhà lãnh đạo chính trị lớn: đó là nhà sinh học François-Vincent Raspail (1794-1878), sinh viên luật Louis Auguste Blanqui (1805-1881) – người sau này đã phải chịu 36 năm trong tù và một người cộng hòa tích cực là Napoleon Lebon (1807 – sau 1856). Hội đã nổi tiếng là không hề lưỡng lự dùng các biện pháp gây hấn và thậm chí cả bạo lực để đạt được mục đích của mình. Sau khi Jean-Louis Hubert, người lãnh đạo của hội, bị bắt, hội trở thành một tổ chức hoạt động bí mật với Raspail là chủ tịch.

Ở trường Cao đẳng Sư phạm, mối quan hệ căng thẳng giữa hiệu trưởng và Galois đã nhanh chóng tiến tới một cuộc dằn mặt công khai. Galois yêu cầu những thứ (như trường phải có bộ đồng phục như trường Bách khoa, phải có huấn luyện quân sự cho sinh viên) mà chắc anh cũng biết rằng Guigniault thậm chí còn chưa được chuẩn bị để cân nhắc. Cũng trong thời gian đó, chính sách được tuyên bố công khai của Guigniault "sinh viên tốt không được quan tâm đến chính trị" là điều Galois không thể nuốt trôi. Cuối cùng, ngày 2 tháng 12, khi Guigniault cho công bố một bức thư tấn công một thầy giáo thuộc phái tự do của trường trung học Louis-le-Grand trên một trong hai tờ báo của sinh viên, thì thật nhanh chóng đã có thư đáp lại – một lời đáp lại hết sức sâu cay. Tờ báo *La gazette des écoles* (Bản tin Đại học) đã cho đăng bức thư sau của "một sinh viên trường Cao đẳng Sư phạm":

> Bức thư mà ông Guigniault đã nhét vào tờ *Lycée* ngày hôm qua nhân một bài trên tờ báo của ngài, theo chúng tôi, quả là thật khiếm nhã. Tôi nghĩ ngài nên quan tâm tới những ý định lột mặt con người này.
>
> Dưới đây là những sự thật mà 46 sinh viên chúng tôi có thể xác nhận.
>
> Sáng ngày 28 tháng 7, vì có nhiều sinh viên trường Cao đẳng Sư phạm muốn tham gia cuộc nổi dậy, ông Guigniault đã nói với họ, tới hai lần, rằng ông ta sẽ gọi cảnh sát để lập lại trật tự. Thật lố bịch là gọi cảnh sát vào ngày 28 tháng 7!
>
> Cũng ngày hôm đó, ông Guigniault đã nói với chúng tôi, với vẻ mô phạm thường lệ của ông ta, "Nhiều con người dũng cảm đã bị giết ở cả hai phía. Nếu là người lính, tôi không biết sẽ quyết định sao đây. Tôi sẽ hy sinh vì cái gì, vì tự do hay vì luật pháp?"
>
> Thế mà chính con người này đã đính một phù hiệu lớn ba màu (xanh, trắng, đỏ) trên mũ ngay ngày hôm sau. Cứ như là những người theo chủ nghĩa tự do chính thống chúng tôi vậy!

Tôi cũng muốn thông báo cho ngài biết rằng các sinh viên của trường Cao đẳng Sư phạm, được kích thích bởi tinh thần yêu nước cao cả, mới đây đã đích thân tới gặp ông Guigniault để báo cho ông ấy rằng họ có ý định gửi một yêu sách cho Bộ Giáo dục yêu cầu phải cung cấp vũ khí và mong muốn được huấn luyện quân sự, để có thể bảo vệ được lãnh địa của họ khi có yêu cầu.

Và đây là trả lời của ông Guigniault. Nó cũng mang giọng điệu tự do như trong câu trả lời của ông ấy ngày 28 tháng 7 vậy.

"Yêu cầu gửi cho tôi khiến chúng ta nhìn thật lố bịch. Đây là sự bắt chước các trường cao cấp hơn: nhưng ở đây lại xuất hiện từ một cấp thấp. Tôi cũng muốn nói rõ rằng khi chính những yêu sách đó của các trường cao cấp kia gửi cho ngài Bộ trưởng thì chỉ có hai thành viên của Hội đồng Hoàng gia bỏ phiếu thuận, mà hai thành viên ấy lại không phải là những người thuộc phái tự do. Nhưng ngài Bộ trưởng vẫn chấp thuận vì lo sự rối loạn trong giới sinh viên và tinh thần đồng cảm của họ đe dọa sẽ phá hủy hoàn toàn Đại học Tổng hợp và trường Bách khoa". Tôi tin rằng theo một quan điểm thì ông Guigniault là đúng khi bảo vệ mình theo cách đó để tránh bị buộc tội là có định kiến chống lại trường Cao đẳng Sư phạm mới. Đối với ông ta, không có gì đẹp hơn trường Cao đẳng Sư phạm cũ, nó đã có đủ tất cả.

Mới đây chúng tôi yêu sách phải có đồng phục, nhưng họ đã bác bỏ; vì ở trường cũ họ không mặc. Trong trường cũ khóa học kéo dài 3 năm. Mặc dù khi thành lập trường mới, ai cũng thấy rằng năm thứ ba này chẳng có tích sự gì, nhưng ông Guigniault cứ theo như cũ.

Sắp tới đây, theo những quy tắc của trường cũ, chúng tôi chỉ được phép ra ngoài mỗi tháng một lần và phải quay về

> trường trước 5h chiều. Thật tuyệt vời là được học trong hệ thống giáo dục đã đào tạo ra những con người như Cousin [ý nói tới Victor Cousin, nhà triết học và là thành viên bảo thủ của Hội đồng Giáo dục] và Guigniault!
>
> Mọi thứ mà ông ta làm đều chứng tỏ một tầm nhìn hạn hẹp và tính bảo thủ thâm căn cố đế của ông ta.
>
> Thưa ngài, tôi hy vọng những chi tiết này sẽ khiến ngài quan tâm và sử dụng chúng theo ý ngài, cốt sao làm lợi cho tờ báo đáng kính trọng của ngài.

Các biên tập viên của tờ báo nói thêm rằng họ đã suy nghĩ kỹ lưỡng trước khi bỏ đi chữ ký trong bức thư.

Galois không khẳng định cũng như không bác bỏ mình là tác giả bức thư đó, thậm chí mặc dù phần đông đều ngờ là anh. Tuy nhiên, đối với Guigniault, thì đó đã là đủ bằng chứng để đuổi học Galois, mà ông ta coi là kẻ thường xuyên gây rối. Trong bức thư tường trình của ông ta gửi Bộ trưởng Bộ giáo dục, Guigniault đã khẳng định rằng Galois đã "thú nhận hoàn toàn" và nói chung, anh ta quá đáng đến mức không thể "dung thứ cho hành vi bất bình thường, cho sự lười nhác và tính cách rất khó chịu của anh ta".

Nhưng các sinh viên trường Cao đẳng Sư phạm lại ít người công khai ủng hộ Galois. Thậm chí các sinh viên học nghệ thuật còn cho đăng một bức thư với nội dung đứng về phía hiệu trưởng vì lo sợ cho sự nghiệp tương lai của họ và phần lớn chắc là do Guigniault xúi giục. Tuy nhiên, từ một bài trên báo *La gazette* chúng ta biết rằng chí ít cũng có một sinh viên dũng cảm:

> Chúng tôi vừa biết rằng ông Hiệu trưởng của trường Cao đẳng Sư phạm đã hỏi riêng mỗi sinh viên câu hỏi sau: "Anh có phải là tác giả bài báo đăng trên tờ *La gazette des écoles*

> không? Bốn người đầu tiên đều trả lời là không, trong khi người thứ năm đáp: "Thưa thầy, tôi không nghĩ rằng tôi có thể trả lời câu hỏi đó, bởi vì nó sẽ làm cho tôi phản bội lại một trong số các sinh viên bạn bè của tôi". Ông Guigniault đã cực kỳ bực tức trước câu trả lời cao thượng và đầy kiêu hãnh đó.

Những trao đổi gay gắt xung quanh chuyện đuổi học Galois kéo dài suốt ba tuần. Những lá thư nhân danh Galois xen lẫn những bức thư ủng hộ Guigniault là nét đặc trưng của các trang báo trong thời gian đó. Kết thúc lời kêu gọi cuối cùng vào này 30 tháng 12 của Galois đối với các bạn sinh viên, anh viết: "Tôi không đòi hỏi điều gì cho mình cả, các bạn hãy nói to lên vì danh dự của chính các bạn và theo lương tri của các bạn".

Ngày 2 tháng 1 năm 1831, tờ *La gazette des écoles* đã đăng một bài báo của Galois nhan đề "Về việc giảng dạy khoa học, các giáo sư, các bài làm và các vị giám khảo". Đó là một bản hiến chương quan trọng kêu gọi cải cách toàn diện trong việc giảng dạy khoa học. Phần lớn những lời phàn nàn của Galois vẫn còn tính thời sự cho đến tận hôm nay:

> Những chàng trai trẻ tội nghiệp sẽ còn buộc phải ngồi nghe hoặc lặp lại suốt những ngày dài cho tới khi nào đây? Khi nào họ mới được dành cho thời gian để suy ngẫm về sự tích lũy kiến thức đó để có thể phối hợp vô số những mệnh đề, trong những tính toán chẳng có quan hệ gì đó? Các sinh viên quan tâm đến chuyện qua được các kỳ thi còn hơn là việc học tập của họ.

Có lẽ để ám chỉ những kinh nghiệm cay đắng của mình đối với các vị giám khảo, Galois phàn nàn:

> Tại sao các vị giám khảo không đặt cho thí sinh những câu hỏi rõ ràng mà lại ra những câu lắt léo làm gì? Cứ như là họ sợ thí sinh hiểu được những điều mà họ hỏi vậy; đâu là nguồn gốc của thói quen đáng trách là làm phức tạp các câu hỏi với những khó khăn giả tạo đó?

Thật không may, mặc dù sự phản đối hợp lý hệ thống trường học thời đó, nhưng khi hoàn cảnh buộc Galois phải mở một "trường" tư thì hóa ra anh cũng không đạt được thành công nào đáng kể.

MỘT CUỘC SỐNG ĐẦY BIẾN ĐỘNG

Bị đuổi khỏi trường và tự do theo đuổi những ước mơ tự do của mình, Galois đăng ký vào phân đội pháo binh của đội cận vệ quốc gia. Mặc dù tổ chức này tự hào là đã có một bộ quân phục riêng, khác biệt, nhưng nó vẫn giống với lính dân vệ hơn. Galois vẫn tiếp tục mang bộ quân phục đó ngay cả sau khi phân đội pháo binh bị giải thể và đội cận vệ quốc gia được tổ chức lại chỉ tuyển đám dân chúng đóng thuế, mà Galois thì không thuộc vào số đó. Tuy nhiên, không là sinh viên cũng có cái giá của nó – giờ đây Galois không còn phương tiện để sinh sống nữa. Để đắp đổi qua ngày, Galois quyết định mở các lớp dạy toán. Một người bạn bán sách đã cho anh mượn một phòng trong cửa hiệu sách ở số 5, phố Sorbonne, làm lớp học. Galois cho đăng một quảng cáo trên tờ *La gazette des écoles* thông báo rằng anh sẽ mở một lớp dạy thêm về đại số dành cho các sinh viên "cảm thấy việc học đại số ở trường còn chưa đầy đủ và muốn học sâu thêm môn học này". Tất nhiên, đây không phải là cách kiếm tiền hiệu quả. Lúc đầu, khoảng vài chục người bạn thuộc phái cộng hòa của Galois đến dự, cũng là vì lịch sự thôi, nhưng rồi họ cũng nhanh chóng bỏ do anh dạy quá cao. Những hoạt động chính trị của Galois cũng không giúp dập được gì vì chúng ngày càng chiếm mất nhiều thời gian của anh. Do vậy, tham vọng dạy học của anh cuối cùng rút về chỉ là dạy kèm ở trình độ thấp mà thôi.

Về phương diện nghiên cứu, một sự kiện đầy hứa hẹn đã xảy ra vào đầu năm 1831, nhưng rồi sau đó lại biến thành một nỗi thất vọng nữa. Galois được Viện Hàn lâm đề nghị gửi lại cho họ tiểu luận trước kia của anh. Phiên bản mới "Những điều kiện để giải được các phương trình bằng căn thức" đã được trình vào ngày 17 tháng Giêng, và lần này hai nhà toán học là Denis Poison (1781-1840) và Sylvestre Lacroix (1765-1843) được giao cho thẩm định. Tuy nhiên, hơn hai tháng trôi qua mà không thấy hồi âm gì từ Viện Hàn lâm. Chán nản, Galois đã trút nỗi bực tức của mình bằng cách gửi cho chủ tịch Viện một bức thư chất vấn để ngày 31 tháng 3 năm 1831, trong đó anh có viết thêm mấy dòng mỉa mai sau: "Thưa ngài, tôi sẽ rất biết ơn và nhẹ lòng nếu như ngài hỏi các ông Lacroix và Denis xem có phải họ cũng đã đánh mất bản thảo của tôi [như Fourier trước kia] hay là họ có ý định báo cáo trước quý Viện hay không". Ngay cả một bức thư khiêu khích như thế cũng không hề có một hồi âm nào.

Trong khi đó, những sự kiện chính trị lại bắt đầu có tác động to lớn đến cuộc sống của Galois. Nhà toán học nổi tiếng Sophie Germain (1776-1831), người phụ nữ đầu tiên đã dám phá vỡ rào cản về giới tính đang thịnh hành thời đó để tham gia một câu lạc bộ của nam giới, đã nêu nét đặc trưng chung trong tính cách của Galois là "thói quen thóa mạ người khác". Bà còn buồn bã bình luận thêm: "Họ nói rằng cậu ta điên đến nơi rồi, tôi e rằng đó là sự thật." Vào tháng tư, 19 người của phân đội pháo binh thuộc đội vệ binh quốc gia, những người đã từ chối giải giáp khi đội này được giải thể, đã bị đem ra xử. Trong số họ có một người là Pescheux d'Herbinville, mà chúng ta sẽ còn nói tới trong mối liên quan đến cái chết của Galois. Với niềm hân hoan của những người cộng hòa, tất cả đều được trắng án trong một vụ xử công khai được biết tới dưới cái tên "vụ xử 19 tên". Hội những người bạn dân đã tổ chức một bữa tiệc lớn ở nhà hàng Aux Vendanges de Bourgogne để ăn mừng sự kiện đó. Hai trăm nhà hoạt động của phái cộng hòa đều đã tới dự vào hôm 9 tháng 5 đó, trong đó có cả nhà văn Alexandre Dumas (1802-1870), nhà chính trị và sinh học Raspail, Galois và nhiều người khác. Theo lời của Dumas thì "Khó mà tìm được ở khắp Paris hai trăm vị khách nào thù địch với chính phủ hơn những người này." Khi sâmpanh bắt đầu chảy vào cuối bữa ăn, rất nhiều lời chúc tụng được cất lên: chúc cuộc Cách mạng 1789-1793, chúc Robespierre, và nhiều người khác. Một trong những lời chúc tụng văn vẻ hơn là của Dumas, ông tuyên bố: "Tôi uống vì nghệ thuật! Chúc cho cả ngọn bút lẫn cây cọ sẽ đóng góp không kém gì súng gươm cho sự nghiệp đổi mới xã hội mà chúng ta đã dành trọn đời ta cho nó và vì nó chúng ta sẵn sàng chết". Tới đó, Galois, người ngồi ở đầu mút một dãy bàn, đã đứng bật dậy và đề nghị nâng cốc. Giữ trong cùng một tay một ly vang và một con dao nhíp đã mở, anh hét lên: "Chúc Louis-Philippe!" Sự kiện này đã được mô tả khá chi tiết trong hồi ức của Dumas:

> Bất ngờ, ngay giữa cuộc nói chuyện riêng tư của tôi với người ngồi bên trái, cái tên Louis-Philippe và sau đó là năm sáu tiếng huýt sáo bỗng lọt vào tai tôi. Tôi bèn quay lại. Một trong những cảnh tượng náo động nhất xảy ra ngay cách chỗ tôi ngồi 15 đến 20 ghế.

> Một chàng trai giữ trong cùng một tay ly rượu vang giơ cao và con dao nhíp đã mở, đang cố gắng giữ mọi người trật tự để nghe anh nói. Anh ta là Évariste Galois, một chàng trai đáng yêu khoác những vỏ đạn làm bằng giấy lụa mà anh buộc lại bằng những dải băng tím, người đã bị giết sau đó trong cuộc đấu súng với Pescheux d'Herbinville.
>
> Vào thời gian đó, Galois chỉ trạc 23 hay 24 tuổi. Anh là một trong số những người cộng hòa nhiệt thành nhất. Những tiếng ầm ĩ tới mức không sao nghe rõ điều mà anh ta muốn nói là gì.
>
> Tất cả những thứ mà tôi lõm bõm cảm nhận được là sự đe dọa gì đấy và cái tên Louis-Philippe đã được thốt lên. Con dao nhíp đã mở ra kia làm cho ý định đó trở nên quá rõ ràng.
>
> Điều diễn ra đã vượt ra ngoài giới hạn các quan điểm cộng hòa của tôi. Nhượng bộ trước áp lực của người ngồi bên trái, đâu như là một diễn viên hài của cung đình, không quan tâm tới nguy hiểm, hai chúng tôi đã nhảy đại từ bệ cửa số xuống vườn.
>
> Tôi về nhà với tâm trạng hơi lo lắng. Rõ ràng là chuyện này rồi sẽ có những hậu quả. Quả thực, hai ngày sau Galois đã bị bắt.

Có một số chi tiết thiếu chính xác trong mô tả của Dumas (chẳng hạn như liên quan tới tuổi của Galois), và sau đây tôi sẽ còn trở lại vấn đề căn cước của gã đã giết chết Galois, nhưng nhìn chung những sự thật căn bản thì đều là đúng cả. *La gazette des écoles,* tờ báo đã ủng hộ Galois trong những trao đổi hoàn toàn mới đây thôi với Guigniault, đã công bố một phiên bản riêng về sự kiện xảy ra ngày 12 tháng 5: "Rất nhiều lời chúc tụng đã được nói ra; rồi một người gây mối hận thù, có lẽ là một sinh viên, đã đứng bật dậy rút từ túi ra một con dao và vung nó lên cao, cất tiếng: " Tôi sẽ thề trung thành với Louis-Philippe theo cách này!". Với hành động vung con dao lên, Galois bị coi như là đã đe dọa long thể của đức vua. Anh đã bị bắt ngày hôm sau ở nhà mẹ và bị giam ở nhà tù Sainte-Pélagie, rồi được mang ra xử vào ngày 15 tháng 6 năm 1831.

Phiên tòa mở đầu với một loạt những câu hỏi có tính chất thủ tục của viên chánh án, người về cơ bản chỉ muốn Galois mô tả lại những diễn biến tại bữa tiệc. Rồi điều bất ngờ đã xuất hiện. Bị cáo được hỏi "Anh có rút dao ra... và thốt lên 'Cho Louis-Philippe' không?" Với sự ngạc nhiên của tất cả mọi người, Galois trả lời: "Đúng là tôi có con dao dùng để cắt thịt trong bữa ăn và có vung nó lên khi nói 'Cho Louis-Philippe, *nếu ông ấy phản bội lại chúng ta*.' Những lời cuối cùng thì chỉ những người ở ngay cạnh tôi mới nghe được, vì lúc đó những tiếng huýt sáo ầm ĩ đã bắt đầu nổi lên... từ những người hiểu những lời của tôi như là lời chúc sức khỏe của đức vua". Ngạc nhiên, quan tòa hỏi Galois có thực sự sợ rằng sẽ là nguy hiểm nếu như nhà vua vứt bỏ trách nhiệm của mình và phản bội đất nước không. Évariste đáp: "Mọi hành động của đức vua, tuy còn chưa bộc lộ điều gì xấu xa cả, nhưng cho phép chúng tôi có quyền nghi ngờ". Những trao đổi qua lại giữa Galois và quan tòa còn tiếp tục một lúc nữa, rồi người ta triệu người làm chứng, có cả người tố cáo và người bảo vệ Galois. Câu hỏi cuộc tụ họp hôm đó mang tính chất riêng tư hay là công khai trở thành vấn đề trung tâm. Nếu là công khai thì lời chúc tụng bóng gió của Galois có thể được coi là hành động khiêu khích có ý định kích động bạo lực chống lại nhà vua. Những ý kiến kết thúc của Galois đã bị ông chánh án cắt ngang, vì ông này đã sáng suốt nhận thấy rằng chàng trai trẻ đang bốc máu kia có thể tự làm hại mình với những lời lẽ bốc lửa và bất cẩn. Sau những xem xét và cân nhắc kéo dài khoảng nửa giờ đồng hồ, Galois được tuyên bố trắng án. Theo như người ta kể lại thì ngay sau khi bản án được tuyên, Galois bình tĩnh đến lấy lại con dao trên bàn đặt tang chứng, rồi lặng lẽ bước ra khỏi phòng xử án. Theo biên bản phiên tòa cho thấy thì trong thời gian xét xử, Galois đã tuyên bố rằng con dao bị mất khi anh rời nhà hàng, do đó lời đồn ở trên là không thể chắc chắn được. Dù thế nào đi nữa, thì chàng trai 19 tuổi tính khí thất thường giờ đây đã thấy mình lại được tự do trên đường phố.

Ngày 15 tháng 6, cùng ngày với phiên tòa xét xử Galois, tờ *Le globe* quyết định công khai câu chuyện về sự trải nghiệm đầy thất vọng của Galois với Viện Hàn lâm. Một bài báo rất nhiều khả năng là của một trong hai anh em nhà Chevalier, đều là bạn của Galois, bắt đầu bằng việc mô tả thiên tài của Galois và thực tế là anh đã độc lập phát minh ra những tính chất của các hàm elliptic (các hàm đã làm cho Abel trở nên nổi tiếng). Sau đó, bài báo kể về những khổ não không thể tin nổi của Galois với cơ quan khoa học này. Đặc biệt, bài báo đã ghi lại những bất hạnh của công trình của Galois về tính giải được của các phương trình:

> Năm ngoái, trước ngày 1 tháng 3, Galois đã gửi tới Ban thư ký của Viện Hàn lâm một công trình về tính giải được của các phương trình. Công trình này nhằm tham dự cuộc thi để xét trao Giải thưởng lớn về toán học. Tác giả đã vượt qua được nhiều khó khăn mà chính bản thân ông Lagrange cũng không giải quyết nổi. Ông Cauchy cũng đã dành những lời ca ngợi cao nhất cho tác giả về đề tài này. Nhưng rồi chuyện này đã kết cục ra sao? Bản thảo của công trình đã bị mất, giải thưởng đã được trao [cho Abel và Jacobi], nhưng không có sự tham dự của nhà bác học trẻ tuổi. Đáp lại bức thư của Galois gửi Viện Hàn lâm phàn nàn về cách đối xử cẩu thả đối

> với công trình của anh, tất cả những gì mà ông Cuvier có thể viết ra là: "Vấn đề rất đơn giản. Công trình bị mất do cái chết của ông Fourier, người được giao nhiệm vụ thẩm định nó". Bây giờ công trình đó đã được viết lại và được gửi lại một lần nữa cho Viện. Tuy nhiên, ông Poisson, người có trách nhiệm thẩm định nó, đã không hoàn thành chức trách, và kết quả là hơn 5 tháng đã trôi qua mà tác giả của công trình vẫn dài cổ trông ngóng những lời đánh giá tử tế của Viện.

Điều lý thú là, cứ cho rằng chính Galois đã cung cấp nội dung bài báo cho anh em nhà Chevalier đi nữa, thì chúng ta cũng đã biết rằng Cauchy đã phát biểu những đánh giá của mình về công trình của Galois, chỉ có điều ông đã không truyền được chính sự nhiệt thành đó cho Viện Hàn lâm mà thôi. Có lẽ để đáp lại sự phê phán công khai đối với sự cẩu thả của Viện, Poisson và Lacroix cuối cùng cũng đã trình biên bản giám định của họ về công trình của Galois. Biên bản của họ đề ngày 4 tháng 7 năm 1831 và nó đã được trình bày trong phiên họp ngày 11 tháng 7. Kết quả như là một trái bom – họ đã không thừa nhận các định đề của Galois. Trong một biên bản được viết ra một cách lạnh nhạt chứng tỏ rõ ràng là cả hai ông Poisson và Lacroix hoặc là không hiểu gì hoặc ít nhất là có những định kiến chống lại những ý tưởng đổi mới của Galois về lý thuyết nhóm, các tác giả bản báo cáo đã viết một cách vô thưởng vô phạt:

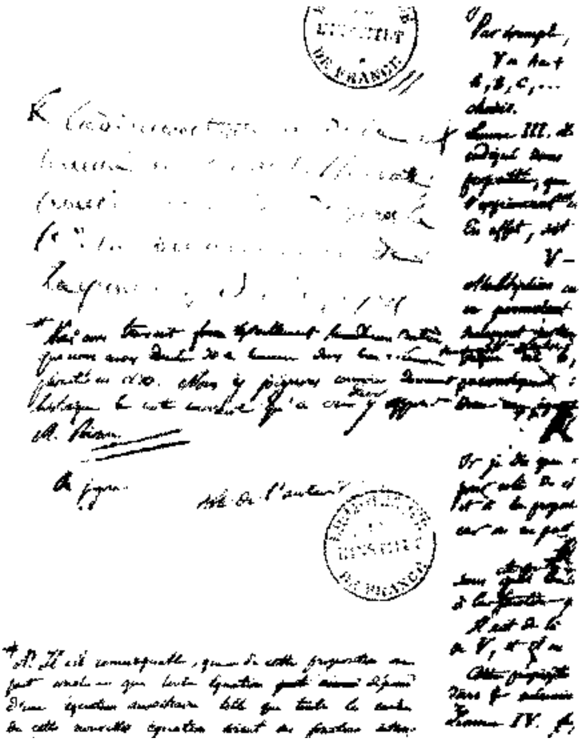
> Chúng tôi đã nỗ lực hết mức để tìm hiểu chứng minh của ông Galois [về những điều kiện để một phương trình là giải được bằng một công thức]. Những lập luận của ông hoặc là không đủ rõ ràng hoặc là phát triển chưa đủ đối với chúng tôi để có thể phán xét về tính chính xác của chúng, và do đó chúng tôi chưa thể đưa ra quan điểm của mình trong báo cáo này. Tác giả nói rằng định đề này làm nên cả một chủ

> để cho công trình của ông ấy thực ra mới chỉ là một phần của một lý thuyết tổng quát có thể dẫn tới nhiều ứng dụng khác. Thông thường thì các phần khác nhau của một lý thuyết thường làm sáng tỏ cho nhau, và sự nắm bắt chúng một cách tập thể bao giờ cũng dễ dàng hơn là khi xét chúng một cách cô lập. Do đó, phải đợi cho tác giả công bố toàn bộ công trình của ông ta thì mới có thể hình thành một quan điểm dứt khoát được, chứ còn ở trong trạng thái mới chỉ công bố một phần như thế này thì chúng tôi không thể giới thiệu để các ngài công nhận được.

Và Viện Hàn lâm đã thông qua những kết luận của bản báo cáo phủ định này. Ngay cả khi chúng ta chấp nhận thực tế là sự trình bày khúc chiết, mạch lạc không bao giờ là điểm mạnh của Galois cả và rằng những giải thích vẫn còn mong muốn được làm rõ hơn chút nữa, thì chúng ta cũng không thoát khỏi kết luận rằng một trong những đột phá giàu tưởng tượng nhất trong lịch sử đại số học đó vẫn còn phải chờ đợi để được nhóm cử tọa bảo thủ chấp nhận. Về cơ bản, những ý tưởng của Galois biến thành nạn nhân cho thực tế là chúng không phải là những cái mà Poisson và Lacroix mong đợi. Những người phản biện này nghĩ rằng họ sẽ tìm thấy trong bản thảo của Galois một tiêu chuẩn đơn giản dựa trên các hệ số của phương trình mà có thể nói cho họ biết ngay lập tức một phương trình cụ thể nào đó là có giải được bằng một công thức hay không. Thay vì thế, họ đã tìm thấy một khái niệm mới, đó là lý thuyết nhóm, và những điều kiện dựa trên các nghiệm giả thiết là đã tồn tại của phương trình. Đó là điều quá mới mẻ để có thể được chấp nhận vào năm 1831.

NGỒI TÙ

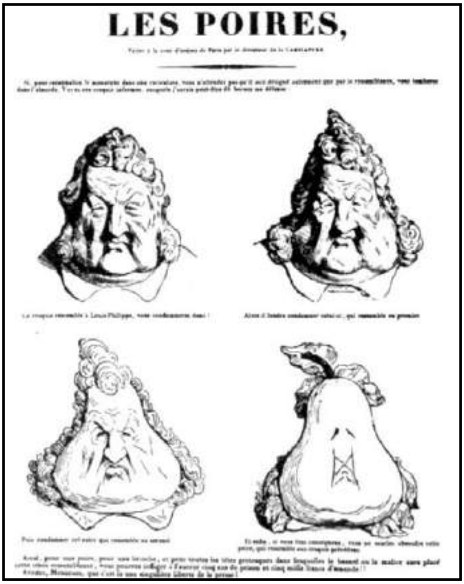
Sự phán xét của Viện Hàn lâm đã giáng một đòn nặng nề xuống Galois. Song, do tin tưởng vào sự đúng đắn của những định đề của mình, nên dưới một trong những nhận xét phê phán của Poisson trên bản thảo Galois đã viết thêm mấy lời sau: “Hãy để độc giả phán xét” (xem hình 61 chụp trang đó). Cay đắng về mặt khoa học và thiên về bạo lực trên phương diện chính trị, nên quan hệ giữa Galois và mẹ anh trở nên căng thẳng. Do đó anh đã rời nhà của gia đình đi thuê riêng cho mình một phòng ở số 16, phố Bernardins (hình 62).



Hình 61

Nhưng họa vô đơn chí. Kỷ niệm ngày phá ngục Bastille (ngày 14 tháng 7) đã tới gần, và những người cộng hòa lập kế hoạch sẽ tổ chức một cuộc biểu tình quy mô lớn. Đặc biệt, họ muốn tiến hành một nghi lễ mang tính khiêu khích là tưởng nhớ việc trồng một cây biểu trưng cho tự do ở quảng trường Bastille khoảng 40 năm trước. Cảnh sát đã dùng đủ các biện pháp để ngăn chặn và đã bắt nhiều người hoạt động trong đêm 13 rạng ngày 14 tháng 7. Galois đã thoát, không bị bắt có lẽ là do hoặc là anh không có tên trong "sổ đen" của cảnh sát hoặc là anh không ngủ ở nhà. Tuy nhiên, khoảng trưa ngày 14 tháng 7, một đoàn gồm khoảng sáu trăm người do Galois và bạn anh là Ernest Duchatelet, một sinh viên trường Pháp điển, dẫn đầu đã bắt đầu vượt qua cầu Pont Neuf. Évariste mặc bộ quân phục của đội cận vệ (lúc đó là bất hợp pháp) và được trang bị đến tận răng (vài khẩu súng ngắn, một khẩu súng trường đã nạp đạn và một con dao). Đã được chuẩn bị để đối phó với các vụ tụ tập nhằm lật đổ chính phủ, nên cảnh sát đã nhanh chóng can thiệp. Galois và Duchatelet đã bị bắt ngay trên cầu cùng với một số người lãnh đạo của phe cộng hòa ở những nơi khác. Tình hình còn trở nên tồi tệ hơn khi Duchatelet vẽ trên tường phòng giam anh một trái lê tượng trưng cho cái đầu của nhà vua (hình 63 là bức biếm họa được gán cho là của họa sĩ Honoré Daumier, trong đó Louis-Philippe biến hình thành một trái lê). Cái đầu lại được vẽ cạnh một chiếc máy chém và kèm thêm lời tuyên bố rất phổ biến giữa những người cộng hòa

Hình 62



Hình 63

thời gian đó: "Philippe sẽ tự mang đầu hắn đặt lên bàn thờ của Người, hỡi thần Tự do".

Phiên xử Galois và Duchatelet diễn ra vào ngày 23 tháng 10 năm 1831. Vì tội mặc quân phục bất hợp pháp khó có thể phủ nhận được, nên hiển nhiên là Galois đã phạm tội (còn mang vũ khí vào thời gian đó là chuyện bình thường). Kết quả hơi sốc là bản án hà khắc một cách vô lý đã tuyên là 6 tháng tù giam. Còn Duchatelet, có lẽ do ít tai tiếng hơn về chuyện gây rối, chỉ bị kết án 3 tháng tù giam. (Tôi không tìm thấy bất cứ bằng chứng nào ủng hộ cho giả thiết nói rằng để đổi lấy giảm án Duchatelet đã đồng ý cộng tác với cảnh sát). Cả hai được đưa đến nhà tù Sainte-Pélagie (hình 64) ở quận 5, thủ đô Paris, không xa Vườn Bách thảo là bao. Trong số những người cộng hòa bị bắt khác, nhà sinh học Raspail – người lãnh đạo xuất sắc của những người bạn dân – đã đặc biệt khiêu khích trong phiên xử ông tháng Giêng năm 1832. Ông đã đi xa tới mức tuyên bố rằng nhà vua, kẻ đã phản bội lại nhân dân mình, "sẽ bị chôn sống dưới đống đổ nát của Điện Tuilerie". Khỏi phải nói là tuyên bố này đã xóa hết mọi thiện cảm của quan tòa đối với ông và ông đã bị kết án 15 tháng tù ở nhà tù Saint-Pélagie.

Saint-Pélagie là loại nhà tù mà bạn thường thấy ở Paris trong thời gian đó. Một bức tường dày bao quanh cả khu với các tòa nhà gồm những phòng giam bao quanh ba cái sân nhỏ bên trong. Tù nhân được giam tùy theo các loại tội phạm. Tù chính trị được giam ở một trong những khu cạnh. Galois vốn thuộc đẳng cấp thấp nhất xét về phương diện tài chính, nên chắc là anh bị giam trong loại phòng 60 giường. Những người có điều kiện có thể thuê phòng giam riêng với thức ăn mang tới từ các nhà hàng gần đó. Phần lớn thông tin về những điều kiện khốn khổ của Galois trong tù được biết từ những văn bản của ba người vốn quan tâm đến chàng trai trẻ này: đó là Raspail - bạn chiến đấu thân thiết của anh – với tác phẩm *Những bức thư về các nhà tù ở Paris* được xuất bản 8 năm sau; là nhà thơ Gérard de Nerval (1808-1855), người đã bị bắt vào tháng 2 năm 1832 và thậm chí đã viết một bài thơ về nhà tù này; là người chị gái yêu của Galois, Nathalie-Théodore, người đã thường xuyên tới thăm em mình mỗi khi có thể và đã làm hết sức để nuôi dưỡng cả thể xác lẫn tinh thần của em trai mình. Có hai sự kiện gây ấn tượng được nhắc đến trong hồi ức của Raspail là đặc biệt đáng chú ý. Ngày 29 tháng 7, khi các tù nhân tưởng niệm "Ba ngày vẻ vang" đến ngày thứ ba thì một phát súng đã vang lên ở phố Puits de l'Ermite, ngay trước nhà tù, đã làm bị thương một trong số các tù nhân bị giam cùng phòng với Galois. Trong cuộc gặp sau đó của đoàn đại diện các tù nhân và viên giám

Hình 64

đốc nhà tù, Galois – một thành viên của đoàn - đã buộc tội rõ ràng một trong số những người gác đã bắn và sau đó còn sỉ nhục tay giám đốc. Vì thế anh đã bị nhốt ngay vào ngục tối trước sự phản ứng mãnh liệt của các tù nhân. Raspail đã trích dẫn lời của một tù nhân nói với tay giám đốc nhà tù: "Anh bạn trẻ Galois này đâu có cao giọng khi nói chuyện với ông, ông biết quá rõ rồi còn gì; cậu ấy vẫn lạnh như toán học của cậu ấy khi nói chuyện với ông mà". Một tù nhân khác cũng cất tiếng tán đồng: "Nhốt Galois vào ngục tối ư! Ôi mẹ kiếp, họ sẽ trả thù chàng học giả nhỏ bé này của chúng ta mất". Sau những tuyên bố ủng hộ đó, các tù nhân đã chiếm quyền kiểm soát nhà tù và trật tự chỉ được vãn hồi vào ngày hôm sau. Vì sợ những cuộc bạo loạn tiếp theo, Galois đã được đưa ra khỏi ngục tối.

Raspail cũng cho một mô tả mơ hồ hơn nhưng đáng lo lắng về ý định tự sát lần thứ hai của Galois. Rõ ràng là Galois không quen uống say, nhưng anh thường nài nỉ các chiến hữu chuốc cho anh đến say xỉn mới thôi. "Cậu uống nước lã cũng say, anh bạn trẻ ạ", họ chế nhạo anh, "O, Zanetto [biệt danh mà những người tù gọi Galois]! Cứ để mặc cái đảng cộng hòa đấy, hãy quay về với toán học của cậu đi". Trong một lần như vậy, khi còn chưa say, anh đã tâm sự với Raspail về nỗi đau mà anh đã phải trải qua từ khi cha anh mất: "Tôi đã mất cha và không ai có thể thay thế được ông". Rồi anh nói thêm một câu mà sau này hóa ra lại là lời tiên tri lạnh người: "Tôi sẽ chết trong cuộc đấu súng vì một con đàn bà đỏm dáng hạ đẳng". Khi Raspail và một số tù nhân khác dìu anh đặt lên giường, thì Galois say mềm còn hét lên: "Các anh coi khinh tôi, thế mà các anh lại là bạn tôi kia đấy! Các anh nói đúng, nhưng tôi, người đã phạm tội đến mức sẽ phải tự giết mình!". Chỉ có sự can thiệp rất nhanh của các bạn tù mới ngăn được Galois không thực hiện ý định chết người ấy.

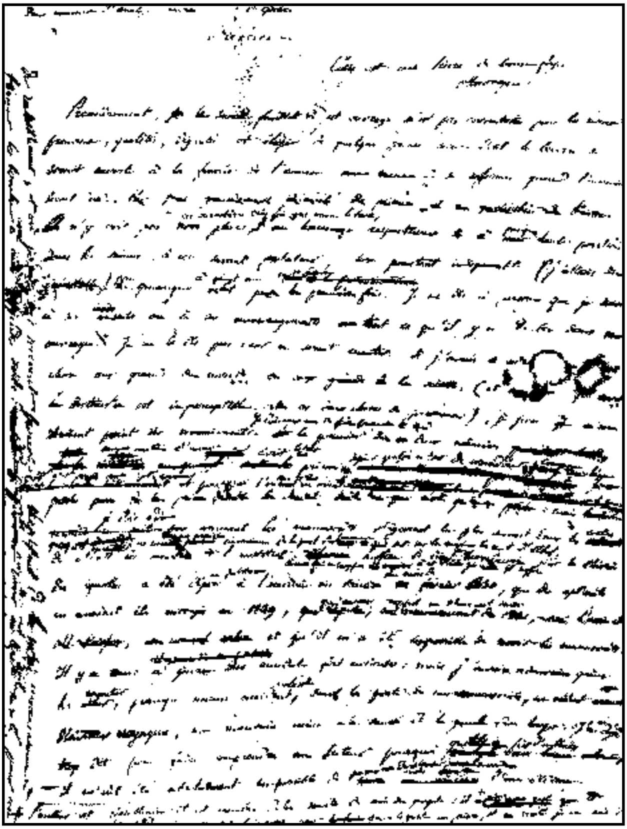
Sự mô tả của Nerval về ít phút cuối cùng trong tù của ông cũng rất cảm động: “Lúc đó là 5 giờ. Một bạn tù dẫn tôi tới cổng, hôn tôi và hứa sẽ tới thăm tôi ngay sau khi ra tù. Anh ấy còn phải ngồi thêm hai ba tháng nữa. Đó là Galois tội nghiệp, người mà tôi sẽ không còn gặp lại nữa, vì anh đã bị giết trong một cuộc đấu súng vào buổi sáng ngay sau hôm anh vừa được tự do”.

Nhưng, Nathalie-Théodore, chị gái Galois mới vẽ nên một bức tranh đau lòng nhất về trạng thái thể chất và tinh thần của người em. Sau một lần tới thăm buồn bã, cô đã đau đớn viết trong nhật ký: “Không được hít thở không khí sạch trong suốt năm tháng liền! Đó là một viễn cảnh vô cùng tồi tệ, và mình e rằng sức khỏe của cậu ấy sẽ hao tổn nhiều. Cậu ấy đã quá mệt mỏi. Cậu ấy không cho phép mình được lơ đãng bởi bất cứ một ý nghĩ nào khác, tính cách u buồn đã làm cho cậu ấy già trước tuổi. Với đôi mắt hõm sâu, cậu ấy nhìn giống như một ông già năm chục tuổi vậy”.

Khi không say, phần lớn thời gian trong ngày Galois cứ đi đi lại lại triền miên quanh sân, thường là chìm sâu trong suy tư. Những buổi tối thì dành cho những cuộc tụ họp ầm ĩ của những người cộng hòa và những nghi lễ yêu nước xung quanh lá cờ ba màu. Nhưng Galois vẫn tìm được thời gian để viết một lời nói đầu rất dài (hình 65 chụp trang đầu tiên) cho những chuyên luận xuất sắc của anh. Đó thực sự là lời buộc tội nặng nề toàn bộ Viện Hàn lâm và sự vận hành của nó. Lời nói đầu mở đầu bằng sự chế nhạo hệ thống tôn ti trật tự của các nhà khoa học và những hạn chế tai hại bị áp đặt bởi sự cần thiết phải có sự nâng đỡ.

> Trước hết, các bạn cần nhận thấy rằng trang thứ hai của công trình này không dày đặc những tên họ, tên thánh, những tước hiệu, huân chương các loại, và lời tán tụng một hoàng thân

quốc thích nào đó, mà túi tiền của ông ta sẽ mở ra khi có khói hương và dọa sẽ đóng lại khi bình hương tàn lạnh. Bạn cũng sẽ không thấy những chồng thư từ chất cao ba lần đầu bạn để tỏ lòng tôn kính một cá nhân cao cấp nào đó trong khoa học hoặc một người đỡ đầu khôn ngoan nào đó, một điều được coi là trách nhiệm (tôi muốn nói là không tránh khỏi) đối với bất kỳ ai muốn viết một công trình khoa học ở tuổi hai mươi.



Hình 65

Nếu ta thay từ "hoàng thân quốc thích" bằng từ "cơ quan tài trợ" thì những quan điểm của Galois vẫn sẽ còn là thời sự hôm nay như đã từng như thế 170 năm trước. Như một nhà khoa học xuất sắc đã có lần nói với tôi: "Giữa việc viết các đề xuất xin tài trợ những cái tôi *dự định* sẽ làm và việc viết những báo cáo mô tả những cái tôi đã làm chẳng còn có thời gian nào để cho tôi thực sự *làm được* bất kỳ điều gì cả".

Lời nói đầu của Galois kết thúc bằng một giọng đầy hy vọng mặc dù hơi khinh thường: "Khi sự cạnh tranh – cũng tức là sự ích kỷ – không còn chi phối trong khoa học nữa, khi mọi người gắn kết với nhau để nghiên cứu chứ không phải để gửi những phong bì gắn xi kín mít đến Viện Hàn lâm, thì họ sẽ công bố ngay cả những kết quả nhỏ miễn nó là mới và nói thêm: 'Tôi không còn biết thứ gì khác nữa.'"

MỘT NGƯỜI LÃNG MẠN TRONG TÌNH YÊU

Vào mùa xuân năm 1832, nạn dịch tả hoành hành khắp châu Âu. Nhưng Paris là nơi bị nặng nhất. Sự ô nhiễm của nước sông Seine đã gây tử vong hàng ngày gần một trăm mạng người. Một phần có lẽ do sức khỏe không tốt, nhưng nhiều khả năng hơn là do lệ chung đối với các tù chính trị, ngày 13 tháng 3, Galois được chuyển về nhà điều dưỡng ở số 84-86 phố Lourcine (sau này là số 94 phố Broca), và ở đây anh được tạm tha. Ở nhà đó (sau này được gọi là "nhà sức khỏe" Sieur Faultrier) đã xảy ra một chuyện khá ấn tượng: Galois đã phải lòng một cô gái. Cho đến lúc đó, có lẽ là do cá tính lấn át của mẹ Galois nên anh chưa hề có quan hệ với phụ nữ. Thực tế, trong một bữa rượu, Galois đã tâm sự với Raspail rằng: "Tôi không thích phụ nữ và dường như tôi chỉ có thể yêu được một Tarpeia hoặc một Graccha mà thôi". (Đây là hai người phụ nữ trong thần thoại La Mã; Tarpeia đã phản bội thành phố của mình phục vụ cho người Sarbine, còn Graccha chính là Cornelia Gracchus, mẹ cũng đồng thời là người dạy dỗ Tiberius và Gaius). Đối tượng đam mê cháy bỏng của Galois là cô gái trẻ tên là Stéphanie Potterin du Motel, người sống trong cùng tòa nhà với nhà an dưỡng. Cha cô, ông Jean-Paul Louis Auguste Potterin du Motel nguyên là một sĩ quan trong quân đội của Napoleon và em trai cô lúc đó mới 16 tuổi và sau này là một bác sĩ. Nhà Potterin du Motel luôn duy trì mối quan hệ gần gũi với chủ của nhà an dưỡng.

Trong lịch sử cũng ít có cuộc tình nào có những hậu quả bi kịch hơn. Có thể ban đầu Stéphanie cũng có để mắt tới chàng trai thông minh và nhiệt tình này, nhưng rồi không lâu sau cô đã lạnh nhạt từ chối lời tỏ tình của anh. Ở mặt sau một tờ giấy đã sử dụng, Galois có chép lại hai bức thư của Stéphanie. Những bức thư này rất tiếc lại mất một số từ và âm tiết. Rất có thể trong lúc điên tiết, Galois đã xé vụn hai lá thư gốc. Sau này anh đã tuyệt vọng dựng lại những lời của người anh yêu từ những mảnh vụn kia cũng đau đớn như những từ cần có ở đó.

Số phận của một trong những thiên tài vĩ đại đã từng sống sắp sửa khép lại chỉ vì những lời nói làm tan nát cõi lòng của một đứa "con gái đỏng đảnh tầm thường" lúc đó mới 17 tuổi. Đây là bức thư đầu tiên đề ngày 14 tháng 5:

> Có lẽ chúng ta kết thúc chuyện này thôi, anh ạ. Em không đủ tinh thần để tiếp tục trao đổi thư từ kiểu này nữa, nhưng em sẽ cố gắng lấy đủ [tinh thần] để trò chuyện với anh như em vẫn làm trước khi có điều gì xảy ra. Thế anh nhé, có...

> cần phải... anh... hơn là hay... đối với em và đừng nên suy nghĩ gì thêm nữa về những chuyện có thể không tồn tại và sẽ không bao giờ tồn tại.

Bức thư đã khiến chúng ta ngờ rằng một người thiếu kinh nghiệm và có lẽ cũng quá say mê nữa đã làm hoặc điều gì đó khiến cho Stéphanie bị xúc phạm hoặc làm cho cô ta sợ. Cái giọng lạnh nhạt trong bức thư cũng gợi ý rằng cô gái trẻ này đã không mấy mặn mà. Bức thư thứ hai, có nhiều khả năng viết sau đó ít ngày, thậm chí còn tệ bạc hơn. Stéphanie thậm chí còn không quan tâm tới cả chuyện giữa họ sẽ chỉ thuần túy là bạn bè thôi.

> Tôi đã theo lời khuyên của anh suy nghĩ về chuyện đó qua... những điều đã xảy ra..., đã tới giữa chúng ta, dù cho anh có muốn gọi nó là gì cũng được. Hơn nữa, thưa anh, có thể đảm bảo gần như chắc chắn rằng sẽ chẳng có gì xảy ra nữa đâu; ông đã đưa ra những đề nghị sai lầm và sự ân hận của anh chẳng có cơ sở gì. Tình bạn đích thực chỉ có thể có giữa những người cùng giới, đặc biệt... những người bạn... rên rỉ trong trống vắng mà... sự không có bất cứ tình cảm nào thuộc loại này... hãy tin tôi... nhưng nó chỉ làm cho đau đớn mà thôi... Anh đã thấy tôi buồn và hỏi [tôi] lý do, tôi đã đáp rằng tình cảm của tôi đã bị tổn thương. Tôi nghĩ anh nên chấp nhận điều đó như một người mà trước anh ta một lời đã được thốt lên từ những... đó...
>
> Sự bình tĩnh trong suy nghĩ của tôi khiến tôi được tự do phán xét những người mà tôi thường gặp mà không phải suy ngẫm nhiều; đó là lý do tại sao tôi hiếm khi phải ân hận vì đã mắc sai lầm về họ hoặc chịu ảnh hưởng của họ. Tôi không đồng ý với anh về những tình [cảm]... hơn là có... yêu cầu cũng không... [tôi] cám ơn anh về tất cả những [tình cảm] mà anh đã dành cho tôi.

Galois đã vô cùng choáng váng. Những tác động mạnh mẽ của cuộc tình này đến tâm trạng và tình cảm của anh đối với cuộc sống nói chung có thể đoán nhận thông qua bức thư để ngày 25 tháng 5 mà Galois gửi cho Auguste Chevalier, một người bạn thân của anh. Vào thời gian đó, Auguste, Michel – anh trai của Auguste – và khoảng ba chục người theo chủ nghĩa Saint-Simon khác đã thành lập một cộng đồng nhỏ ở Ménilmontant, phía đông Paris. Galois đã viết một cách buồn bã:

> Bạn thân mến của tôi,
>
> Có một niềm vui lúc đang buồn là khi người ta có hy vọng sẽ được an ủi. Người ta hạnh phúc trong đau khổ nếu như có những người bạn. Bức thư tràn đầy ân huệ thiêng liêng của anh đã mang lại cho tôi một chút tĩnh tâm. Nhưng làm sao tôi có thể gạt bỏ được dấu vết của những xúc cảm mãnh liệt mà tôi vừa mới trải qua? Làm sao tôi có thể tự an ủi mình khi mà trong một tháng trời tôi đã cạn kiệt nguồn hạnh phúc lớn nhất mà một con người có thể có được? Khi mà tôi đã cạn kiệt nó mà không có hạnh phúc, không có hy vọng, khi mà tôi chắc chắn là đã rút cạn nó suốt đời?

Galois vẫn tiếp tục mô tả một cách đầy tính tiên tri cuộc đấu tranh nội tâm quằn quại của anh: “Tôi rất muốn nghi ngờ sự tiên tri tàn nhẫn của anh là tôi sẽ không còn nghiên cứu được nữa. Nhưng tôi phải chấp nhận rằng phần nào có sự thật trong đó; là một học giả người ta phải chỉ là học giả thôi. Trái tim tôi đang nổi loạn chống lại cái đầu của tôi. Tôi không nói thêm ‘Thật đáng thương’, như anh”. Galois kết thúc bức thư với một tia hy vọng: “Tôi sẽ gặp lại anh vào ngày 1 tháng 6. Tôi hy vọng chúng ta sẽ thường xuyên gặp nhau trong nửa đầu tháng 6 và khoảng ngày 15 tôi sẽ đi Dauphine”. Nhưng chút ánh sáng le lói ở cuối đường hầm được nói ở trên đã bị tắt ngấm bởi câu cuối cùng của phần tái bút: "Làm sao cái thế giới mà tôi căm ghét này có thể bôi nhọ được tôi?"

Nhưng Galois đã không bao giờ gặp lại Auguste nữa.

Bây giờ chúng ta tới phần hấp dẫn trong câu chuyện về Galois, mà cụ thể là cái chết đầy bí ẩn của anh. Phải nói ngay từ đầu rằng, trên quan điểm thuần túy toán học hay đối với lịch sử của lý thuyết nhóm và ứng dụng của nó cho các đối xứng thì việc tại sao Galois chết hay ai đã giết anh chẳng có gì là quan trọng cả. Tuy nhiên, câu chuyện về cuộc đời của thiên tài vĩ đại đó sẽ thật là khiếm khuyết nếu không thảo luận về các vấn đề đó. Đặc biệt, có những điều tương tự thật kinh ngạc giữa cuộc đời của hai nhân vật chính trong câu chuyện dài về các phương trình không giải được này – đó là Abel và Galois. Cả hai thuở nhỏ đều được cha mẹ dạy dỗ và đều được kích thích bởi một thầy giáo tài năng. Cả hai đều mất cha lúc mình còn trẻ và đều có tham vọng giải cùng một bài toán cực kỳ hóc búa. Nhưng chưa hết. Họ – cả hai – đều là nạn nhân của một Viện toán học bảo thủ (mà đặc biệt là Cauchy), đều sống bất hạnh trong tình yêu (vì những lý do khác nhau) và đều chết một cách bi thảm khi đang ở tuổi hoa niên. Nhưng trong khi chúng ta biết chi tiết từng phút những hoàn cảnh xung quanh cái chết của Abel thì cái chết của Galois lại bị bọc kín trong bí ẩn, mâu thuẫn và tranh cãi. Sự thiếu – biết nói thế nào đây nhỉ? – sự thiếu đối xứng này đã khiến tôi thực sự băn khoăn. Do đó, tôi đã quyết định đầu tư thời gian và công sức nhiều nhất có thể để nghiên cứu từng khía cạnh của cuộc đời Galois và đặc biệt là cái chết của anh. Tôi đã làm hết sức để không để sót một chi tiết nào, đã đọc tất cả những tài liệu mà tôi có trong tay và tới thăm hầu hết những địa điểm có liên quan. Tôi chỉ có thể hy vọng rằng các kết quả sẽ biện minh cho những nỗ lực của tôi.

MỘT CÁI CHẾT BÍ ẨN

Có rất ít sự kiện đã biết liên quan đến hoạt động của Galois giữa ngày 25 tháng 5 và buổi sáng định mệnh ngày 30 tháng 5, khi anh đối mặt với địch thủ trong cuộc đấu súng. Ngày 29 tháng 5, trước hôm đấu súng, anh đã viết ba bức thư. Một là bức thư xin lỗi gửi cho “tất cả những người cộng hòa”:

Tôi cầu xin các bạn yêu nước của tôi đừng trách móc tôi vì đã không chết vì tổ quốc.

> Tôi chết là nạn nhân của một con đàn bà đỏng đảnh bẩn thỉu và hai gã bị ả lừa. Thế là đời tôi đã tàn trong một phần của câu chuyện tầm phào khốn nạn này. Ôi! Tại sao lại có thể chết vì một chuyện vớ vẩn và đê tiện như vậy! Trời chứng giám cho tôi là chỉ vì miễn cưỡng và bị ép buộc mà tôi đã phải nhượng bộ một vụ khiêu khích mà tôi đã cố gắng lơ đi bằng mọi cách. Tôi ân hận là đã nói một sự thật tai hại với những kẻ ít có khả năng lắng nghe một cách bình tĩnh. Nhưng tôi đã nói sự thật. Tôi sẽ mang xuống mồ một lương tâm đã gột hết mọi dối trá và ô uế bằng dòng máu yêu nước.
>
> Vĩnh biệt! Cái giữ cho tôi còn sống là lòng tốt của công chúng. Hãy tha thứ cho những kẻ đã giết tôi, vì họ cũng tin rằng việc họ làm là đúng đắn.

Mấy lời cuối cùng gợi nhớ đến lời của chúa Jesus lúc bị đóng đinh trên cây thánh giá (“hãy tha thứ cho họ, vì họ không biết là mình đang làm gì”) phản ánh những dấu vết của học vấn tôn giáo mà Galois đã nhận được từ mẹ mình. Mặt khác, khi xét tới giá trị danh nghĩa cùng với những bức thư của Stéphanie thì bức tranh hiện lên từ bức thư này trở nên khá rõ ràng. Bằng lời nói hoặc hành động, Galois đã xúc phạm cô gái trẻ và hai gã bị ả lừa đã khiêu khích đấu súng. Galois đã không oán hận gì hai gã đàn ông những người "đã tin việc mình làm là đúng đắn" mà anh chỉ ân hận là mình đã quá cả tin. Người ta cảm thấy ở đây có yếu tố nhân nhượng và đầu hàng thế lực trong những lời của Galois: "chỉ vì miễn cưỡng và bị bắt buộc mà tôi đã nhượng bộ một cuộc khiêu khích." Sau này tôi sẽ còn quay trở lại điểm quan trọng này.

Tiếp theo Galois viết một bức thư gửi cho hai người bạn cộng hòa là N. L (nhiều khả năng là Napoléon Lebon) và V. D. (nhiều khả năng là Vincent Delaunay):

> Các bạn tốt của tôi,
>
> Tôi đã bị thách [đấu súng] bởi hai người yêu nước... Tôi không thể nào từ chối được.
>
> Tôi mong các anh tha thứ vì đã không báo cho các anh biết. Nhưng các đối thủ của tôi đã bắt tôi lấy danh dự ra hứa là sẽ không thông báo cho bất cứ người yêu nước nào biết.
>
> Nhiệm vụ của các anh thật đơn giản: chứng minh rằng tôi đã phải chiến đấu trái với ý muốn của tôi, tức là sau khi đã dùng hết mọi biện pháp khả dĩ để thương lượng, và hãy thử nói xem liệu tôi có thể nói dối không trong một câu chuyện tầm thường như thế này.
>
> Hãy nhớ đến tôi, vì số phận đã không cho tôi sống đủ dài để làm cho tổ quốc nhớ đến tôi.
>
> Tôi chết đây, bạn của các anh.

Bức thư chán nản này, lại xét trên giá trị danh nghĩa, còn thêm một mẩu thông tin quan trọng nữa: các đối thủ là những "người yêu nước", nghĩa là những người cộng hòa đang hoạt động. Cảm giác Galois phải nhượng bộ một thế lực còn rõ nét hơn: "Tôi không thể từ chối được... các đối thủ của tôi bắt tôi phải lấy danh dự ra hứa rằng không được thông báo cho bất cứ một người yêu nước nào biết... Tôi đã chiến đấu trái với ý muốn của tôi". Galois cũng nhấn mạnh một cách nhiệt thành tính cả tin của mình: "Hãy thử nói xem liệu tôi có thể nói dối không".

Bức thư thứ ba, bức quan trọng nhất trên phương diện khoa học, chứa đựng di sản toán học của Galois. Bức thư rất dài này, được gửi cho Auguste Chevalier, người bạn thân nhất của Galois, trình bày một bản tổng kết cô đọng nội dung của công trình đã bị Poisson và Lacroix bác bỏ cũng như nhiều công trình khác:

> Bạn thân mến của tôi,
>
> Tôi đã có một số phát minh về giải tích. Phát minh thứ nhất liên quan đến lý thuyết các phương trình và các phát minh khác liên quan đến các hàm tích phân.
>
> Trong lý thuyết các phương trình, tôi đã nghiên cứu dưới những điều kiện nào thì các phương trình giải được bằng căn thức [tức bằng một công thức chứa bốn phép tính số học và phép khai căn]; điều này đã cho tôi cơ hội làm cho lý thuyết này trở nên sâu sắc hơn và mô tả được tất cả các phép biến đổi khả dĩ đối với một phương trình thậm chí cả khi nó không giải được bằng các căn thức.
>
> Tất cả những thứ đó được trình bày trong ba chuyên luận.

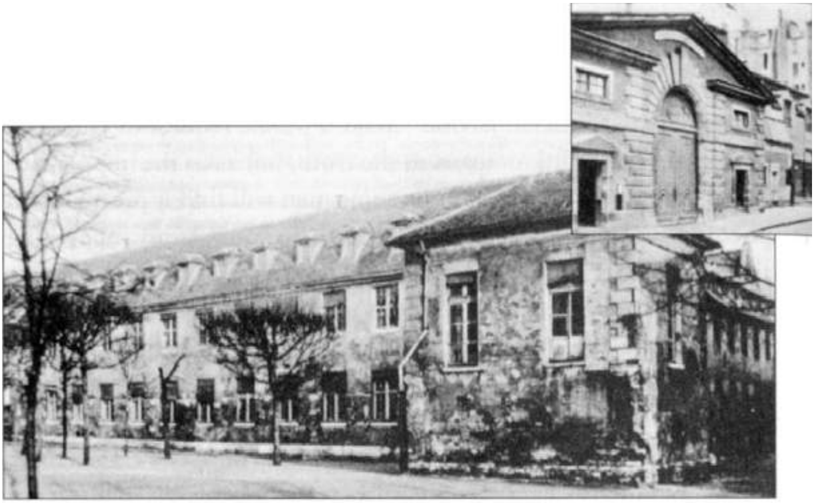
Sau đó Galois đã trình bày những nét đại thể của một lý thuyết mà ngày nay gọi là *lý thuyết Galois*, và bổ sung một số định lý mới vào nội dung của bản thảo gốc mà anh đã gửi tới Viện Hàn lâm. Trước khi kết thúc anh viết: "Bạn Auguste thân mến, bạn thừa biết rằng những vấn đề này không phải là những chủ đề duy nhất mà tôi đã khám phá". Sau đó, khi mô tả thêm một số chủ đề nữa, Galois đã kết luận một cách đầy nuối tiếc: "Tôi không có thời gian và những ý tưởng của tôi chưa được phát triển một cách đầy đủ trong lĩnh vực này – một lĩnh vực hết sức rộng lớn".

Và cuối cùng, cũng giống như Abel trước anh, Galois đã đặt niềm tin vào sự phán xử của nhà toán học Đức Jacobi: "Hãy đề nghị một yêu cầu công khai để Jacobi hoặc Gauss cho ý kiến của họ không phải về sự đúng đắn mà là về tầm quan trọng của những định lý đó. Sau này, tôi hy vọng có ai đó sẽ cảm thấy có lợi để giải mã bản viết lộn xộn này. Thắm thiết ôm hôn bạn ". Chỉ còn một việc phải làm, đó là giới thiệu chính các bản thảo ấy theo một trật tự nào đó. Galois đã lướt qua rất nhanh các bài báo toán học của anh, làm một số chỉnh sửa vào phút cuối và ghi mấy lời bình luận. Một trong những ghi chú đó (hình 66) sau này đã trở thành câu trích đáng nhớ nhất mà cũng đau buồn nhất của anh: "*Je nai pas le temps*" (*Tôi không có thời gian*).

Cuộc đấu súng diễn ra vào sáng sớm ngày 30 tháng 5 năm 1832, ở gần đầm Glacier, Gentilly (nay là Quận Mười ba, Paris). Những diễn biến chính xác của tấn kịch không ai biết cả. Theo báo cáo khám nghiệm tử thi thì Galois bị bắn vào bụng từ phía bên phải. Viên đạn xuyên qua một vài phần của ruột rồi găm vào mông trái. Điều gì diễn ra sau đó cũng không ai rõ. Những người làm chứng đã bỏ hiện trường đi ư? Hay là một người trong số họ đã đưa Galois vào viện? Những ghi chép ở bệnh viện Cochin cho thấy rằng Galois được chở tới vào lúc 9h30 sáng (hình 67 chụp lối vào và một trong hai cánh của bệnh viện ở thế kỷ 19) và được nằm ở giường số 6, phòng Saint-Denis. Theo lời chứng sau đó khá lâu của Gabriel Demante, người anh em họ của Galois, thì một người dân đi qua đã chở Galois tới bệnh viện Cochin, nhưng một ghi chép đăng trên tờ *Magasin pittoresque* của tác giả Pierre Paul Falaugergues, một người bạn học

Hình 66

cũ của Galois, thì con người tử tế này là một “cựu sĩ quan”. Alfred, em trai của Galois, là thành viên gia đình duy nhất được thông báo và đã lao ngay tới bệnh viện. Bác sĩ phẫu thuật trực, cũng như hai anh em Galois, đã nhận thấy ngay rằng cái chết đang đến gần. Galois vẫn hoàn toàn tỉnh táo. Anh đã từ chối lễ rửa tội của linh mục. Anh chỉ yêu cầu Alfred hãy bình tâm: “Đừng có khóc nữa, anh cần phải lấy hết dũng cảm để chết ở tuổi hai mươi”. Évariste Galois qua đời lúc 10h sáng ngày 31 tháng 5 và giấy chứng tử đã được ký ngày 1 tháng 6. Anh chết lặng lẽ, chẳng mấy ai để ý tới. Thậm chí tờ *Bulletin de Paris* còn ghi nhầm: “Cái chết của Legallois”.



Hình 67

Le précurseur, tờ báo Lyon có nhiều quan hệ gần gũi với Những người bạn dân, đã đăng trong số báo 4 và 5 tháng 6 một bản tường thuật sau (hình 68):

> Paris, 1 tháng 6 – Một cuộc đấu súng bi thảm ngày hôm qua đã cướp đi của khoa học chính xác một thanh niên có nhiều triển vọng nhất, nhưng tên tuổi đã sớm nổi là do những hoạt động chính trị của anh. Évariste Galois, người đã bị bỏ tù một năm vì đã nâng cốc chúc mừng ở nhà hàng Vendanges de Bourgogne, đã đấu súng với một người bạn cũ, cũng trẻ tuổi như anh, và cũng giống như anh là hội viên của Hội những người bạn dân đồng thời cũng là một nhân vật được biết tới trong một vụ án chính trị. Người ta đồn rằng tình yêu là nguyên nhân của cuộc đấu súng này. Súng lục là vũ khí được hai bên chọn, họ cũng nhận thấy như thế là quá tàn nhẫn vì bạn bè cũ mà bây giờ lại ngắm bắn nhau, nhưng rồi họ đã để mặc cho sự quyết định mù quáng của số mệnh.

Đứng ngay sát nhau, mỗi người cầm trong tay một khẩu súng lục và nổ súng. Nhưng trong hai khẩu súng chỉ có một khẩu nạp đạn. Galois đã trúng đạn của đối thủ; anh được chở đến bệnh viện Cochin và mất ở đó sau hai giờ. Anh mới 22 tuổi, còn L.D., đối thủ của anh hơi trẻ hơn một chút.

Chúng ta không lạ gì những ví dụ về một sự kiện được các phương tiện truyền thông tường thuật, bài báo trên có nhiều điều không chính xác. Cuộc đấu súng diễn ra ngày 30 chứ không phải ngày 31 tháng 5; hai người đứng bắn không phải "ngay sát nhau" mà cách nhau 25 bước; Galois không chết ngay sau hai giờ mà chết vào ngày hôm sau; anh không bị kết án tù một năm mà chỉ có 6 tháng; tuổi của anh lúc mất không phải là 22 mà là 20. Vì vậy chúng ta phải rất thận trọng đối với phần còn lại của bài báo này. Điều này cũng đúng thôi, vì bài tường thuật này xuất bản ở Lyon, khá xa thủ đô. Tuy nhiên, nếu ta xem mô tả chi tiết về đối thủ của Galois là đúng

— Un duel *déplorable* a enlevé hier aux sciences exactes un jeune homme qui donnait les plus hautes espérances, et dont la célébrité précoce, ne rappelle cependant que des souvenirs politiques. Le jeune Évariste Gallois, condamné il y a un an pour des propos tenus au banquet des Vendanges de Bourgogne, s'est battu avec un de ses anciens amis, tout jeune homme comme *lui*, comme lui membre de la société des Amis du Peuple, et qui avait, pour dernier rapport avec lui, d'avoir figuré également dans un procès politique. *On dit que l'amour a été la cause du combat.* Le pistolet étant *l'arme choisie* par les deux adversaires, ils ont trouvé trop dur pour leur ancienne amitié d'avoir à viser l'un sur l'autre, et ils s'en sont remis à *l'aveugle décision du sort.* A bout portant, chacun d'eux a été armé d'un pistolet, et a fait feu. Une seule de ces armes était chargée. Gallois a *été* percé d'outre en outre par la balle de son adversaire; on l'a transporté à l'hôpital Cochin, *où il est mort* au bout de deux heures. Il était âgé de 22 ans. L. D., son adversaire, est un peu plus jeune encore.

Hình 68

thì ai là người phù hợp với mô tả đó? Câu trả lời thật dễ dàng: đó là Duchatelet. Người này đúng là trẻ hơn Galois, cũng bị bắt với anh ở cầu Pont Neuf, và đã được xử ngay trước anh. Nhưng tên của Duchatelet lại là Ernest, còn bài báo lại cho tên viết tắt là "L.D.".

Còn một ít bằng chứng nữa mà chúng ta cần xem xét: Thứ nhất, Gabriel Demante, anh em họ của Galois, đã viết cho Paul Dupuy, người viết tiểu sử đầu tiên của Galois rằng trong cuộc gặp cuối cùng của Galois với Stéphanie, Évariste đã thấy có sự hiện diện của một "kẻ được gọi là chú" và một "kẻ được gọi là vị hôn phu" và một trong hai người này đã thách đấu súng. Bản thân Galois đã nói chuyện ôn hòa với hai người đàn ông (trong thư của anh gửi "tất cả những người cộng hòa" cũng như trong thư của anh gửi các người bạn của mình). Do đó, mọi cố gắng nhằm khám phá ra sự thật này là phải nhận dạng được cả hai, chứ không phải một người.

Thứ hai, cần nhớ rằng nhà văn Alexandre Dumas, khi mô tả những sự kiện xung quanh vụ nâng cốc tai hại trong hồi ức của mình, đã nêu cái tên Pescheux d'Herbinville là người giết Galois. Mặc dù người ta thường không xem "D" là chữ đầu của d'Herbinville, nhưng thực tế và phong cách đánh vần ở thế kỷ 19 vẫn cho phép tùy tiện như vậy. Ví dụ, họ của Stéphanie đôi khi cũng được nói là du Motel hoặc cũng có thể là DuMotel. Ngay cả họ về phía bên mẹ của Évariste cũng thay đổi từ de Mante thành Demante (Phụ lục 8). Pescheux d'Hebinville không bao giờ được xử cùng với Galois nhưng đều có mặt trong "vụ án 19 tên".

Cuối cùng, cảnh sát trưởng Henri-Joseph Gisquet (1792-1866) đã viết trong hồi ký của mình vào năm 1840 rằng Galois "đã bị một người bạn giết chết".

Vậy tất cả những thứ đó cộng lại sẽ được cái gì?

QUÁ NHIỀU THUYẾT MƯU SÁT

Một số ít các nhà viết tiểu sử kết luận rằng Galois bị giết bởi các kẻ thù chính trị. Một số người trong đó còn tưởng tượng ra những âm mưu thậm chí còn ly kỳ hơn và cho rằng cái "người đàn bà hạ tiện" kia là một gái điếm hay một cảnh sát mật đóng vai kẻ khiêu khích. Điều đó không có gì là ngạc nhiên cả. Ngay cả Alfred Galois, trong suốt cuộc đời mình, vẫn cứ tin rằng anh trai anh là nạn nhân của cảnh sát mật hoàng gia. Nhưng những thuyết mưu sát này liệu có bằng chứng thuyết phục nào không? Thực sự là không. Đa số những mô tả giàu chất tưởng tượng đó đều được tạo ra *trước khi* có sự nhận dạng chính xác 'người đàn bà hạ tiện" mang tên Stéphanie du Motel. Cuộc điều tra "tư pháp" để làm sáng tỏ nhân thân của Stéphanie đã được tiến hành bởi một "thám tử bất đắc dĩ" - một linh mục người Uruguay. Carlos Alberto Infantozzi thuộc Đại học Montevideo đơn giản là đã không đầu hàng. Trước hết, ông dùng kính lúp và hệ thống chiếu sáng đặc biệt đã phát hiện ra tên và chữ ký của Stéphanie bên dưới những gạch xóa trên một số bản thảo của Galois. Sau đó ông đã cần mẫn sàng lọc qua các lưu trữ để phát hiện ra tên cha cô gái là Louis Auguste Potterin du Motel và địa chỉ gia đình này là ở trong tòa nhà điều dưỡng Faultrier. Ít có nghi ngờ Stéphanie là gái điếm hay cảnh sát mật. Cô ta cuối cùng đã cưới Oscar Théodore Barrieu, một giáo sư ngôn ngữ, vào ngày 11 tháng Giêng năm 1840. Cha của Stéphanie không phải là bác sĩ như một số nhà viết tiểu sử dẫn chiếu từ Infantozzi, mà là một cựu sĩ quan trong quân đội Napoleon và là một thanh tra của hệ thống nhà tù. Ông qua đời vào thời gian con gái lấy chồng. Em trai của Stéphanie, Eugene P. Potterin du Motel đúng là một bác sĩ, nhưng vào thời xảy ra "vụ" Stéphanie với Galois cậu ta mới chỉ 16 tuổi. Nhà nghiên cứu Jean-Paul Auffray, có lẽ là người đã nghiên cứu sâu rộng nhất các tài liệu có liên quan với Galois, đã phát hiện một sự kiện khác khá lý thú. Denis Louis Grégoire Faultrier, người được lấy tên đặt cho nhà điều dưỡng, bản thân cũng là một cựu sĩ quan của đội cận vệ quốc gia. Sau cái chết của cha Stéphanie, người bạn thân của gia đình Potterin du Motel này đã cưới mẹ của Stéphanie. Và như chúng ta sắp thấy, điều này sẽ cung cấp một mảnh ghép quan trọng trong trò ghép hình này.

Bạn có thể thắc mắc tại sao Alfred Galois lại cứ khăng khăng rằng cảnh sát đã giết anh trai của anh? Cần nhớ rằng Alfred lúc đó mới 18 tuổi và vô cùng ngưỡng mộ người anh trai của mình. Đối với anh, toàn bộ quan niệm về người anh thiên tài, dũng cảm, nhưng ốm yếu và cận thị tham gia vào một vụ đấu súng quá không đàng hoàng này nên chắc là phải có sự ăn gian, chơi bẩn ở đây. Dupuy, người viết tiểu sử đầu tiên của Galois, có một bài báo nghiên cứu khá sâu rộng được công bố vào năm 1896, kết luận khi đó rằng trong mọi khẳng định của Alfred (kể cả tuyên bố không có cơ sở là Galois là người bắn trước và đã bắn vào không khí) "người ta chỉ cảm thấy sự bịa đặt lãng mạn". Nhà vật lý và tác giả Tony Rothman, hiện thuộc trường Bryn Mawr College, cũng đi tới kết luận tương tự. Sau khi khảo sát kỹ lưỡng nhiều cuốn tiểu sử vào năm 1982 (và những công trình sau đó) ông đã kết luận rằng "những câu chuyện của Bell, Hoyle và Infeld [đều là những người viết tiểu sử Galois] đều là những bịa đặt kỳ cục, nếu không muốn nói là viển vông". Và tôi hoàn toàn đồng ý.

Còn có một thuyết nữa, tuy nhiên, nó cần được xem xét một cách cẩn thận hơn. Trong một cuốn tiểu sử sâu rộng nhất và cũng mới đây nhất của Galois, nhà toán học và lịch sử toán học người Italia Laura Toti Rigatelli đã cho rằng cuộc đấu súng nổi tiếng này thực tế không phải là cuộc đấu súng thực. Mà thực ra, do thất vọng và vỡ mộng Galois đã quyết định tự sát vì sự nghiệp của những người cộng hòa. Những người cộng hòa cần một xác chết để khuấy lên cuộc bạo động và Galois đã dâng hiến thân xác mình - cuộc đấu súng chỉ là hiện trường giả mà thôi. Sự suy luận của Toti Rigatelli dựa trên những nghiên cứu rất sâu rộng và đặc biệt là bà đã xem xét kỹ lưỡng những văn bản của viên cảnh sát trưởng Gisquet và của Lucien de la Hodde, một trong những điệp viên nằm vùng của ông ta.

Mặc dù thuyết của Toti Rigatelli là khá hấp dẫn, nhưng cá nhân tôi không thấy nó có tính thuyết phục. Để cho câu chuyện của mình đứng vững được, Toti đã buộc phải tuyên bố rằng Galois đã tạo ra ba bức thư cuối cùng để "ngăn cản ai đó sẽ ngờ về hoàn cảnh chết thực của mình". Điều này không chỉ hoàn toàn không phù hợp với tính cách của Galois, người luôn bám vào những sự thật mà anh nhìn thấy, mà còn không phù hợp với bản thân cái thuyết mưu sát đó. Để phát động cuộc cách mạng một cách chắc chắn, một bức thư buộc tội cảnh sát đã gây ra cái chết của anh chắc là sẽ có hiệu quả hơn nhiều. Xem xét kỹ kịch bản của Toti Rigatelli sẽ phát lộ ra rằng bà coi "sự khăng khăng về cái chết chắc chắn" trong các bức thư Galois gửi "tất cả những người cộng hòa" và gửi Lebon và Delaunay là bằng chứng mạnh nhất chứng tỏ Galois tự hy sinh mình. Nhưng ta còn có thể chờ đợi những điều gì khác từ những bức thư tuyệt mệnh mà một chàng trai lãng mạn 20 tuổi bị dồn ép viết vào buổi tối trước ngày đấu súng? Hơn nữa, như tôi sẽ lập luận dưới đây, có những lý do để tin rằng ít nhất một trong những đối thủ của anh đã có nhiều kinh nghiệm sử dụng súng hơn nhà toán học trẻ tuổi của chúng ta. Sự chờ đợi cái chết chắc chắn của Galois, do đó, là điều hoàn toàn có thể hiểu được. Vậy thì ai đã giết Galois và tại sao anh lại bị giết?

CÁI CHẾT CỦA MỘT NGƯỜI LÃNG MẠN

Các bằng chứng tích lũy được khiến ta có thể tin rằng cuộc đấu súng là có thực. Những manh mối cũng chỉ ra rằng đây là một ca *cherchez la femme*[1] kinh điển. Do một lời nói bất cẩn hoặc do một hành vi quá bồng bột, Galois đã vô tình xúc phạm quý bà trẻ tuổi khiến cô ta báo ngay cho hai người đàn ông khác. Khi hai kẻ "bị lừa" này đối mặt với Galois, anh lại phạm một sai lầm nữa là coi toàn bộ vụ này chỉ là "chuyện tầm phào đáng thương" lại càng như đổ dầu vào lửa. Những hệ quả thật là tệ hại. Nhanh chóng bảo vệ danh dự của Stéphanie, hai người đàn ông đã thách Galois đấu súng. Nhưng hai người này là ai? Từ bức thư của Galois, chúng ta biết rằng họ đều là những người cộng hòa "yêu nước". Ngôn ngữ của Galois cũng gợi ý rất mạnh rằng một trong hai người là có thế lực, khiến Galois buộc phải nhượng bộ. Cả cha Stéphanie, ông Jean Louis Potterin du Motel, cựu sĩ quan của đại quân Napoleon và chủ nhà dưỡng bệnh, ông Denis Faultrier nguyên là đại úy trong đội cận vệ quốc gia thật là thích hợp cho vai trò này. Tuy nhiên, chú ý rằng người thứ hai ở trên cũng phù hợp với một bằng chứng khác. Người anh em họ của Galois đã mô tả một trong hai đối thủ của anh là một kẻ "gọi là chú". Faultrier, người bạn thân thiết của gia đình và sau này đã cưới mẹ của Stéphanie, quả là khớp với mô tả trên như một chiếc găng tay vậy. Còn về nhân dạng của đối thủ thứ hai, thì tình hình còn chưa được rõ ràng như thế. Trong một cuốn tiểu sử Galois được nghiên cứu rất kỹ và mới xuất bản gần đây, tác giả Auffray đã gợi ý rằng hai người đàn ông đó là cha của Stéphanie và Fautrier. Điều này đã không đếm xỉa đến lời chứng của người anh em họ về "kẻ gọi là vị

---

[1] *Ngụ ý là có dây dưa đến đàn bà (ND).*

hôn phu" và mô tả của tờ *Le Précurseur* mà tôi cảm thấy khó chấp nhận. Bởi vì bài báo đăng trên *Le Précurseur* chứa nhiều điều không chính xác mà ta biết chắc là thường có trong những bài tường thuật kiểu như vậy. Sự kết hợp mô tả của Gabriel Demante về "kẻ gọi là vị hôn phu" với bài tường thuật của báo chí dường như dẫn tới một người tình trẻ giả định. Nhưng người tình đó là ai?

Ernest Armand Duchatelet, một sinh viên trẻ trường Pháp điển và là bạn Galois, có lẽ là thích hợp nhất với vai này. Cần nhớ rằng viên cảnh sát trưởng Gisquet đã xác nhận Galois "bị một người bạn giết". Tôi phải thừa nhận rằng tôi đã không tìm được bằng chứng nào bằng văn bản chứng tỏ trong thời gian đó Duchatelet có lai vãng đến nhà dưỡng bệnh Faultrier – anh đã ra tù nhiều tháng trước khi Galois được chuyển đến đây. Tuy nhiên, vì các tù chính trị thường được tạm tha trong những "nhà sức khỏe" như vậy, nên cũng có thể Duchatelet đã được đưa tới đó trước Galois. Hơn nữa, Galois được phép tiếp khách tới thăm tại nhà Faultrier và thực tế Auguste Chevalier, bạn Galois, cũng đã tới thăm anh tại đây. Vì vậy cũng không có gì là không tin nổi, nếu ta giả thiết rằng Duchatelet cũng đã tới đây. Cuối cùng, sự ngại ngần khi phải ngắm bắn nhau của hai người bạn (như được mô tả trên báo) và việc để mặc sự sống chết của họ cho sự quyết định đầy may rủi của số phận bằng cách chỉ nạp đạn cho một khẩu súng, là hoàn toàn phù hợp với tính cách của họ.

Đối thủ có thể là Pescheux d'Herbinville không? Ít có khả năng. Anh không phù hợp với mô tả của báo chí và cũng có rất ít cơ hội để gặp Stéphanie (thuộc một tầng lớp xã hội rất khác). Vả lại theo mô tả của Dumas thì rất có thể anh là một người đồng tính. Vậy thì Dumas nêu tên anh ra làm gì? Tôi không biết, nhưng người ta đã từng biết Dumas hay sai với những chi tiết như vậy trong nhiều trường hợp. Việc ông nhầm lẫn người thanh niên cộng hòa này với người cộng hòa khác là chuyện không có gì phải ngạc nhiên.

Do đó, tôi xin mạo muội để xuất rằng hai đối thủ của Galois là Duchatelet và Faultrier. Vậy, điều bí ẩn tồn tại gần 200 năm về ai đã giết Galois và vì sao giết phải chăng đã được giải quyết? Có thể. Mặc dù tôi tin tưởng mạnh mẽ rằng cặp Faultrier-Duchatelet là phù hợp với tất cả những sự kiện đã biết, nhưng thông tin vững chắc còn thiếu nghiêm trọng đến mức nếu những bằng chứng mới không xuất hiện trong tương lai, thì những bất định sẽ còn lại mãi mãi.

Giả sử rằng kết luận của tôi về nhân thân của hai đối thủ là đúng thì bức tranh về ngày diễn ra đấu súng sẽ hiện ra như sau: Vào rạng sáng ngày 30 tháng 5 năm 1832, Galois và Duchatelet đứng đối mặt nhau ở khoảng cách 25 bước, với Fautrier đứng đợi tới lượt mình. Theo cách chọn may rủi, Duchatelet đã may mắn nhặt được khẩu súng đã nạp đạn và bắn vào Galois.

Báo cáo khám nghiệm tử thi còn tiết lộ hai mẩu thông tin thú vị. Thứ nhất, mặc dù Galois được bắn trúng từ phía bên, nhưng anh lại không đứng về một phía để hạn chế tối thiểu khả năng bị bắn trúng. Tại sao anh lại không quan tâm đến sự sống như vậy? Với trạng thái đầu óc như thế, chuyện đó là không thể. Rút cục, từ quan điểm buồn chán của Galois thì câu chuyện về cuộc đời anh có thể tóm tắt lại như sau: hai lần cố gắng thi vào trường Bách khoa thất bại, ba công trình bị Viện Hàn lâm bác bỏ; hai lần ngồi tù; và một trái tim tan nát vì tình yêu không được đáp ứng. Thực tế, không lâu trước khi chết, Galois đã vẽ mình như một anh hề gù hư cấu Riquet à la Houppe (hình 69), người rất thông minh và hào hiệp nhưng luôn bị những người xung quanh chế nhạo. Trong câu chuyện thế kỷ 17 này, Riquet đã điều trị cho một phụ nữ trẻ khỏi chứng ngu ngốc

Hình 69

và cuối cùng giành được tình yêu của nàng. Thật buồn là Galois lại kém may mắn hơn trong cuộc đời thực. Thứ hai, biên bản khám nghiệm tử thi có mô tả một vết tím bầm trên đầu Galois có thể là do khi ngã xuống anh đã bị chấn thương. Nếu bị ngã bất tỉnh và được cho là đã chết thì có thể giải thích được một thực tế đã làm đau đầu nhiều người viết tiểu sử Galois – phần lớn (nếu không muốn nói là tất cả) những người có mặt tại cuộc đấu súng đều rời khỏi hiện trường. Việc thừa nhận Faultrier như một đối thủ tiềm tàng có thể giải thích được một điều bí ẩn khác gây tò mò cho rất nhiều nhà nghiên cứu – đó là tại sao một trong những người làm chứng không đưa Galois tới bệnh viện. Trong một kịch bản đã đề xuất, Faultrier, "một cựu sĩ quan", có thể thực tế đã là người chở Galois tới bệnh viện Cochin. Một gợi ý rằng những hồi ức về người cha luôn thường trực trong Galois là điều lạ lùng sau: Khi ở bệnh viện được hỏi về địa chỉ, Galois đã đọc cho họ số 6, phố Saint-Jean-de-Beauvais, đó là địa chỉ ở Paris mà Nicolas-Gabriel, cha anh, đã tự sát.

NỔI TIẾNG SAU KHI CHẾT

Đám tang Galois diễn ra vào thứ bảy, ngày 2 tháng 6. Hàng ngàn bạn bè, những thành viên của Hội những người bạn dân, các đoàn đại biểu sinh viên các trường luật và y khoa đã tới dự. Hai lãnh đạo của những người bạn dân là Plagniol và Charles Pinel đã đọc những lời ca ngợi nhiệt thành. Nếu những người cộng hòa có kế hoạch dùng đám tang này để kích động một cuộc bạo loạn thì họ cũng sẽ bị giải tán nhanh chóng vì một bước ngoặt bất ngờ của các sự kiện. Cảnh sát trưởng Gisquet, người đã cho bắt vào tối hôm trước khoảng 30 người cộng hòa như là một biện pháp răn đe, đã cho theo dõi rất sát sao đám đưa tang. Ông đã viết trong hồi ký:

> Ngày 2 tháng 6, những người cộng hòa với số lượng tới hai ba ngàn đã tới dự đám tang Legallois [tên Galois viết nhầm], với ý định sẽ dựng lên các chiến lũy khi trở về; nhưng họ đã biết tin về cái chết của tướng Lamarque [một viên tướng nổi tiếng trong đội quân của Napoleon] và ngay lập tức họ nhận thấy có thể lợi dụng cơ hội này và đám đông tới dự lễ tang của viên tướng. Do đó, kế hoạch của họ đã thay đổi: quan tài của viên tướng thời Đế chế sẽ là tín hiệu để nổi loạn. Vậy là phong trào đã được hoãn lại đến ngày mùng 5.

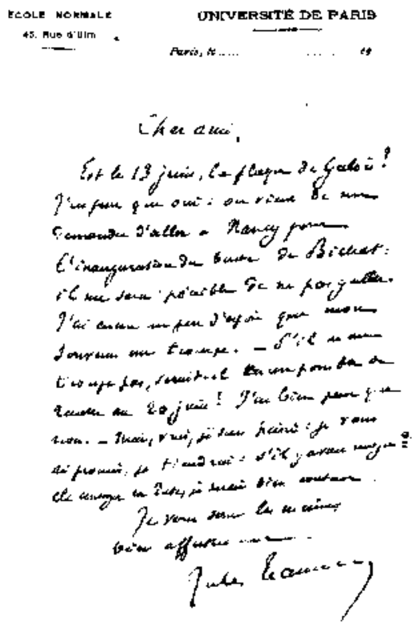
Vậy là số phận cũng cướp mất của Galois ngay cả cơ hội làm dấy lên một cuộc nổi loạn vào lúc chết. Auguste Chevalier đau khổ đã viết một cuốn tiểu sử ngắn và cho xuất bản vào tháng 9 năm 1832.

Thật may mắn là Chúa đã nhân từ hơn đối với di sản toán học của Galois. Hai người trẻ tuổi kiên cường là Alfred, em trai anh và Auguste Chevalier, bạn anh, đã đứng ra gánh lấy trách nhiệm đảm bảo cho chuyên luận và những bài báo toán học của anh không bị

Hình 70

rơi vào quên lãng (hình 70 là chân dung của Galois do Alfred vẽ theo trí nhớ năm 1848). Rất kỳ công, họ đã thu thập từng mẩu báo, lập catalog tất cả các bản thảo và trao toàn bộ kho báu quý giá này cho nhà toán học Joseph Liouville (1809-1882). Vô cùng khâm phục, Liouville đã liên lạc ngay với Viện Hàn lâm vào năm 1843 và bày tỏ: "Tôi hy vọng Viện sẽ quan tâm tới thông báo rằng trong số các giấy tờ của Galois tôi đã tìm thấy một chứng minh, chính xác và sâu sắc, của định lý tuyệt đẹp này: "Với một phương trình bất khả quy bậc nguyên tố đã cho, quyết định được nó có giải được bằng căn thức hay không". Liouville đã cho công bố công trình này trên tạp chí của ông vào năm 1846 và thông báo với thế giới rằng "Tôi công nhận phương pháp chứng minh của Galois là hoàn toàn chính xác, đặc biệt là định lý tuyệt đẹp này [về tính giải được của các phương trình]". Một sự công nhận nữa cũng đã tới ngay sau đó. Jacobi, người mà Galois gửi gắm niềm tin, đã chứng minh đúng là như vậy. Sau khi đọc các bài báo của Galois trên *Liouville' Journal*, Jacobi đã liên lạc ngay lập tức với Afred với ý định tìm thêm những công trình của Galois về các hàm siêu việt. Năm 1856, lý thuyết Galois đã được đưa vào các giáo trình đại số cao cấp ở Pháp và Đức.

Trường đã đuổi học Galois cuối cùng cũng đã phải thay đổi quan điểm của mình. Nhân dịp kỷ niệm một trăm năm thành lập, trường Cao đẳng Sư phạm đã đề nghị nhà toán học Na Uy nổi tiếng Sophus Lie (1842-1899) viết một bài báo tổng kết những tác động của lý thuyết Galois đến lịch sử toán học. Lie kết luận: “Có một đặc tính đặc biệt của toán học là hai phát minh sâu sắc nhất (định lý của Abel và lý thuyết của Galois) đều là hai công trình của hai nhà hình học, một người trong đó là Abel mới 22 tuổi và người kia là Galois chưa đầy 20 tuổi.” Khi nhà toán học Émile Picard (1856-1941) vào năm 1897 đánh giá về những thành tựu của toán học thế kỷ 19, ông đã nói về Galois như sau: “Không ai có thể vượt nổi ông về tính độc đáo và sâu sắc trong các quan niệm của ông”.


ECOLE NORMALE
45, Rue d'Ulm

UNIVERSITÉ DE PARIS

Paris, le 19

Cher ami,

Jules Tannery

Hình 71

Trường Cao đẳng Sư phạm đã đi trọn một vòng khi mà vào ngày 13 tháng 6 năm 1909, Jules Tannery – hiệu trưởng nhà trường – đã tới Bourg-la-Reine đọc một bài diễn văn đặc biệt nhân ngày đặt tấm biển tưởng nhớ tại nhà Galois (hình 71 chụp bức thư của Tannery gửi thị trưởng Bourg-la-Reine, hình 72 là ảnh tấm biển tại nhà cũ của Galois). Không kiềm chế được niềm xúc động, Tannery đã kết thúc bài diễn văn với một lời xin lỗi thật cảm động:

> Tôi có vinh hạnh được đọc diễn văn ở đây với tư cách là hiệu trưởng của trường Cao đẳng Sư phạm. Xin cám ơn ngài thị trưởng đã cho phép tôi thay mặt nhà trường xin lỗi thiên tài

Hình 72

Hình 73

Galois, nhà trường mà ông đã miễn cưỡng thi vào, đã bị hiểu lầm và đã bị đuổi học, nhưng với ngôi trường ấy, rốt cục, ông lại là một trong những vinh quang sáng chói nhất.

Những lời chân thành đó vẫn còn vang vọng trong tai tôi khi tôi đứng giữa nghĩa trang Bourg-la-Reine, nơi những hồi ức về Nicolas-Gabriel và Évariste Galois ngày hôm nay không còn tách rời nhau nữa (hình 73), như họ đã từng trong cuộc sống ngắn ngủi của Évariste.

Nhưng làm thế nào có thể phát minh ra một công cụ để tìm ra một phương trình nào đó có thể giải được hay không, bất kể là tài tình như thế nào, mà lại có thể tiến hóa thành một ngôn ngữ mô tả mọi loại đối xứng của thế giới? Xét cho cùng, khi chúng ta thảo luận về đối xứng thì các phương trình đại số không phải là thứ nảy ra trong đầu óc chúng ta trước tiên. Bản thân Galois cũng không biết chắc chắn lý thuyết của ông sẽ dẫn tới đâu: "Có thể hiểu được đầy đủ lý thuyết tổng quát mà tôi đã đưa ra chỉ khi có ai đó có một áp dụng cho nó đã đọc kỹ công trình của tôi". Đó chính là nơi phép thần thống nhất của lý thuyết nhóm xuất hiện - "tầm cỡ của tư tưởng xuất phát từ những bước đầu nhẹ nhàng như vậy" đúng như nhà toán học Anh H. F. Baker muốn nói. Để đánh giá một cách đầy đủ sức mạnh bao quát không thể tưởng tượng nổi của khái niệm khởi phát bởi Galois, bây giờ chúng ta sẽ chuyển tới thế giới của các nhóm và đối xứng.

VI

Các nhóm

Galois đã làm đảo lộn cả đại số học. Nếu bạn muốn biết một phương trình có giải được hay không, bạn đơn giản là hãy thử giải nó, đúng thế không? Sai, Galois sẽ nói với bạn như vậy. Tất cả những điều bạn cần làm là kiểm tra những hoán vị của các nghiệm được giả thiết là tồn tại. Làm thế nào mà những hoán vị của các nghiệm mà thậm chí chúng ta còn chưa biết lại có thể nói cho chúng ta về khả năng giải được của nó? Thực tế những hoán vị có thể cung cấp ít nhất là một số thông tin mới đã được thế giới phi toán học biết tới từ lâu. Ví dụ, phép đảo chữ (*anagram*) – tức những từ hoặc cụm từ được tạo bởi các chữ cái của một từ hoặc một cụm từ khác nhưng theo một trật tự khác - là như thế. Hãy lấy tên của Galois làm ví dụ. Tên này cho ta các *anagram* hai từ, đó là các tổ hợp như OIL GAS, GOAL IS, GO SAIL, vân vân. Vậy chúng ta có thể dựng được bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau (bất kể là có ý nghĩa hay không) của các chữ cái trong cái tên GALOIS? Câu trả lời không khó, nhưng chúng ta hãy đầu từ một ví dụ đơn giản hơn để tìm ra quy luật chung. Các chữ cái A và B cho ta hai cách sắp xếp:

AB và BA. Ba chữ cái A, B, C có thể lập nên 6 hoán vị: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Hình mẫu xuất hiện thật đơn giản. Với A, B, C, có ba vị trí để đặt chữ A (thứ nhất, thứ hai và thứ ba). Đối với mỗi vị trí trong ba lựa chọn của A, chỉ còn đúng hai vị trí dành cho chữ cái B (ví dụ, nếu A ở vị trí thứ hai thì B chỉ có thể ở vị trí thứ nhất hoặc thứ ba) và chỉ còn một vị trí còn lại dành cho C. Do đó, tổng số cách sắp xếp là $3 \times 2 \times 1 = 6$. Với cách suy luận như thế ta có thể áp dụng cho một số bất kỳ các đối tượng. Đối với sáu chữ cái trong cái tên GALOIS, ta có tổng cộng $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ cách sắp xếp khác nhau, và đối với một số n bất kỳ các đối tượng khác nhau ta có $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$ hoán vị. Để tiết kiệm chỗ, nhà toán học Pháp Christian Kramp (1760-1826) đã đưa ra ký hiệu n! (đọc là n giai thừa) để thay cho tích cuối cùng ở trên. Do đó, số các hoán vị của n đối tượng khác nhau đúng bằng n!.

Một trong những nghiên cứu sớm nhất về các hoán vị còn ghi chép được lại không phải trong một cuốn sách toán, mà là trong một cuốn sách thần bí của người Do thái, có niên đại đâu đó giữa thế kỷ 3 và 6. Sefer yetzira (*Sách Sáng thế*) là một cuốn sách mỏng bí ẩn cho rằng để giải được bí mật của sáng thế hãy xem xét những tổ hợp của các chữ cái trong bảng chữ cái của tiếng Hebrew. Tiền đề chung của cuốn sách (được truyền thuyết gán cho là của Abraham – tổ tiên của người Do thái) là những tập hợp khác nhau của các chữ cái tạo nên những viên gạch thần thánh mà từ đó dựng nên vạn vật. Theo tinh thần đó, cuốn sách nói, "Hai chữ cái tạo nên hai từ, ba chữ cái tạo nên 6 từ, bốn tạo nên 24 từ, năm tạo nên 120, sáu tạo nên 720, bảy tạo nên 5040".

Để xem làm thế nào có thể phát hiện ra những mối quan hệ giữa các hoán vị khác nhau và các tính chất của chúng có thể dẫn tới cái nhìn mới và sâu hơn, ta hãy xét hoán vị chuyển GALOIS thành AGLISO. Phép hoán vị này được biểu diễn bởi (theo ký hiệu đã được đưa vào ở Chương 2):

$$\begin{pmatrix} \text{GALOIS} \\ \text{AGLISO} \end{pmatrix}$$

trong đó chữ cái ở hàng trên được thay bằng chữ cái nằm ngay bên dưới nó. Cụ thể, G được thay bằng A, A băng G, L bằng chính nó, O bằng I, I bằng S và S bằng O.

Điều gì sẽ xảy ra nếu áp dụng phép hoán vị này hai lần? Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng bằng cách dùng đúng những thay thế trên một lần nữa thì AGLISO sẽ biến thành GALSOI. Bây giờ hãy hình dung rằng xuất phát từ cái tên GALOIS, máy tính sẽ thực hiện lặp phép hoán vị đó, chẳng hạn, 1327 lần. Liệu chúng ta có thể tiên đoán được kết cục cuối cùng không? Tất nhiên, ta có thể tìm được kết quả một cách rất vất vả, bằng cách áp dụng lần lượt phép hoán vị đó 1327 lần, nhưng đó là một công việc cực nhọc và rất dễ nhầm lẫn. Vậy liệu có cách nào dễ hơn để tìm ra đáp số không? Bạn nên dành ra ít phút để suy nghĩ về bài toán này, vì giải mã được nó sẽ hé lộ cho bạn thấy những tính chất thú vị của các hoán vị này theo đúng tinh thần trong chứng minh của Galois. Dù sao thì tôi cũng sẽ giới thiệu lời giải ngay dưới đây.

Về khía cạnh giải trí toán học thì phép hoán vị và các đặc tính của nó đóng vai trò nổi bật ít nhất là trong hai câu đố nổi tiếng: câu đố 14-15 và khối vuông Rubik.

Câu đố 14-15 đã được nhà soạn câu đố vĩ đại nhất của Mỹ, Samuel Loyd (1841-1911), đưa ra trong những năm 1870 và trong một thời gian nó đã làm cho cả thế giới phát điên lên. Vào thời gian đó, Loyd đã là nhà biên soạn hàng đầu những bài toán về bàn cờ ở Mỹ, đồng

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

(b)

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

(c)

Hình 74

thời ông cũng phụ trách chuyên mục cờ vua trên một số tờ báo. Tuy nhiên, ngay cả trước khi có câu đố 14-15 nổi tiếng, Loyd đã cho công bố một số lượng rất phong phú các loại câu đố toán học.

Câu đố 14-15 gồm một lưới hình vuông 4×4 viên gạch lát được đánh số từ 1 đến 15 (hình 74a). Mục tiêu chung ở câu đố này là trượt các viên gạch này lên, xuống hoặc sang hai bên để xếp lại chúng theo trật tự, bắt đầu từ một cấu hình ban đầu bất kỳ. Một phiên bản đặc biệt của câu đố này – phiên bản đã gây ra mọi sự náo loạn – là phiên bản trong đó tất cả các số đã xếp đúng thứ tự chỉ trừ có hai viên gạch 14 và 15 là đảo chỗ cho nhau (như trên hình 74b). Loyd đã treo giải thưởng một ngàn đôla cho người đầu tiên đưa ra được dãy các phép trượt dẫn tới sự đổi chỗ chỉ của hai viên gạch 14 và 15. Câu đố đã tạo ra cơn mê cuồng và những người mê mẩn nó chưa từng có ở mọi tầng lớp xã hội. Con trai của Loyd, người sau này đã công bố một tuyển tập đầy quyến rũ các câu đố làm điên đầu của cha mình (có nhan đề *Cyclopedia of Puzzles*), trong mô tả về sự mê cuồng chung đã viết rằng "được biết có những nông phu đã bỏ hoang cả những mảnh ruộng đã cày của mình để vật lộn với câu đố bướng bỉnh này". Thực tế, Loyd đã thừa biết rằng ông chẳng có gì là mạo hiểm khi treo giải thưởng đó, vì ông đã chứng minh được rằng câu đố đó không thể giải được. Để hiểu được điểm then chốt của Loyd, hãy xét, chẳng hạn, hoán vị sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Bạn có thể dễ dàng phát hiện ra rằng phép giao hoán này có thể thực hiện được từ lưới 1-15 của Loyd, nếu ban đầu được sắp xếp theo đúng thứ tự (như trên hình 74a). Ngay cả nếu bạn không có lưới của Loyd trong tay, bạn có thể vạch ra trong óc dãy các bước sau (trong đó mỗi số biểu diễn viên gạch mang số đó được dịch tới ô trống): 15, 14, 13, 9, 5, 6, 7, 8, 12, 15 – bạn thấy ngay rằng các nước đi đó sẽ tạo ra hoán vị trên mà ta mong muốn. Bây giờ chúng ta sẽ đếm xem trong hoán vị đó có bao nhiêu cặp số không theo trật tự tự nhiên. Ví dụ, trong trật tự tự nhiên 6 phải đứng sau 5, nhưng trong hoán vị này thứ tự của 5 và 6 đã bị đảo ngược. Bây giờ chúng ta hãy lần lượt lấy mỗi chữ số trong hàng thứ hai rồi đếm số cặp đảo ngược:

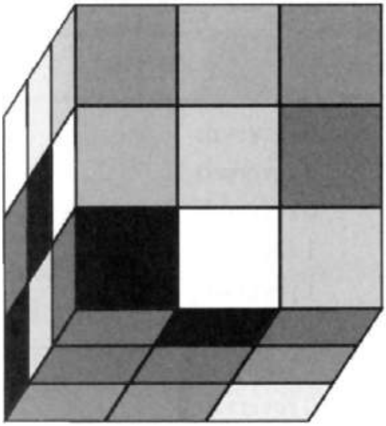
1	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
2	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
3	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
4	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
6	đứng trước 5	1 cặp nghịch đảo
7	đứng trước 5	1 cặp nghịch đảo
6	đứng trước 5	1 cặp nghịch đảo
12	đứng trước 5, 10, 11, 9	4 cặp nghịch đảo
5	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
10	đứng trước 9	1 cặp nghịch đảo
11	đứng trước 9	1 cặp nghịch đảo

15	đứng trước 9, 13,14	3 cặp nghịch đảo
9	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
13	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
14	không đóng góp trong cặp nghịch đảo nào	0 cặp nghịch đảo
	Tổng cộng số cặp nghịch đảo	12

Tổng số 12 là một số chẵn, nên hoán vị này được gọi là *hoán vị chẵn*. Tương tự, khi số cặp nghịch đảo là lẻ thì hoán vị gọi là *hoán vị lẻ*. Bằng một số ít thử nghiệm bạn sẽ tin rằng, theo thiết kế, các hoán vị có thể thực hiện được qua dụng cụ của Loyd luôn là chẵn, chừng nào bạn xuất phát từ một trật tự tự nhiên và kết thúc để lại góc bên phải dưới cùng là ô trống. Vì trong câu đố chỉ có một cặp nghịch đảo là 15 và 14 nên hoán vị này là lẻ (1 nghịch đảo), do đó bất kể bạn có nỗ lực thế nào đi nữa, bạn cũng không bao giờ có thể phục hồi được trật tự tự nhiên trong lưới. Loyd đã biết chắn chắn rằng ông sẽ không bao giờ phải trả tiền giải thưởng đã treo.

Nếu câu đố 14-15 đã kích thích được trí tưởng tượng của bạn và bạn đã bị cái trò chơi của Loyd mê hoặc thì hãy thử giải câu đố sau: Từ cấu hình ban đầu với số 14 và 15 đảo ngược (hình 74b), liệu bạn có thể đạt được trật tự nhiên nếu như ô trống ở góc trên bên trái (như trong hình 74c)? Câu trả lời sẽ được cho trong Phụ lục 9.

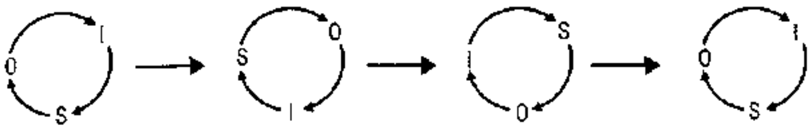
Khoảng một thế kỷ sau khi xuất hiện của câu đố Loyd, một kiến trúc sư Hungary tên là Ernö Rubik đã nổi lên với một dụng cụ thậm chí tinh xảo hơn và cực kỳ phổ biến. Khối vuông của Rubik (hình 75) gồm $3 \times 3 \times 3$ khối lập phương nhỏ hơn. Bề mặt của các khối lập phương nhỏ được sơn các màu khác nhau và các mặt của khối lập phương lớn có thể quay được sao cho chúng có thể xoay theo các hướng khác nhau. Mục tiêu của câu đố là tạo ra một cấu hình



Hình 75

trong đó mỗi mặt của khối lập phương lớn chỉ có một màu duy nhất. Rubik đã phát minh ra trò chơi này vào năm 1974 và vào năm 1980 nó đã trở thành một hiện tượng quốc tế. Trong vòng ba năm cơn ghiền Rubik đã tràn khắp thế giới. Từ những đứa trẻ con ở trường đến các vị tổng giám đốc trong các văn phòng choáng lộn, tất cả đều mê mải giải câu đố Rubik và làm điều đó sao cho nhanh hơn. Để vinh danh nhà phát minh, vào ngày 5 tháng 6 năm 1882, thành phố Budapest đã tổ chức cuộc thi vô địch cho người giải khối vuông Rubik nhanh nhất. 19 cuộc thi quốc gia cũng đã tổ chức trước đó để chọn ra người vô địch đến dự kỳ thi ở Budapest. Người chiến thắng là Minh Thái (Mỹ) đã hoàn thành nhanh đến kinh ngạc nhiệm vụ này chỉ trong có 22,95 giây, thậm chí mặc dù khối Rubik dùng trong cuộc thi là mới tinh khiến cho việc quay có chậm hơn so với khi đã sử dụng. Vào thời gian chúng tôi viết cuốn sách này, Jess Bonde của Đan Mạch đã đăng ký thời gian ngắn nhất mà anh đã đạt được trong một cuộc thi vô địch chính thức là 16,23 giây! Ngay cả nếu không tính những khối vuông Rubik làm giả thì tới lúc này một con số đáng kinh ngạc là 200 triệu khối vuông Rubik đã được bán trên khắp thế giới.

Vì khối vuông Rubik có thể có không ít hơn 43 252 003 274 489 856 000 cấu hình khác nhau nên việc không ai thực sự thử hết tất cả các cấu hình đó để giải đố này là điều có thể hình dung được. Mỗi một "nước đi" của khối vuông Rubik có thể được biểu diễn bằng một phép giao hoán của các đỉnh. Thực tế, lời giải của câu đố khối vuông có thể được mô tả bằng ngôn ngữ lý thuyết nhóm. Nhà toán học David Joyner của Học viện Hải quân Mỹ thậm chí đã phác thảo một giáo trình hoàn chỉnh về lý thuyết nhóm xung quanh khối vuông Rubik và các đồ chơi toán học khác.



Hình 76

Bây giờ chúng ta hãy quay trở lại với câu đố GALOIS-AGLISO đã được giới thiệu ở đầu chương này, cụ thể là làm thế nào ta tìm được hoán vị kết cục sau khi áp dụng 1327 phép biến đổi trên? Trước hết lưu ý rằng trong phép biến đổi trên, chữ cái L ở vị trí thứ ba không thay đổi. Thứ hai, chúng ta phát hiện ra rằng các chữ cái O, I, S được hoán vị theo cách sao cho kết quả là làm cho chúng chuyển động "quanh một vòng tròn" (như trên hình 76). Điều này cũng tương tự như trò luyện tập bóng rổ: các cầu thủ đứng thành một hàng và sau khi ném rổ xong mỗi cầu thủ lại trở về đứng ở cuối hàng đó. Những hoán vị loại này được gọi là *hoán vị vòng quanh*. Một tính chất quan trọng của hoán vị vòng quanh là chúng lại quay trở về trật tự ban đầu sau một số lần áp dụng cố định, gọi là *chu kỳ*. Hình 76 cho thấy hoán vị vòng quanh của O, I, S có *chu kỳ là 3*, nghĩa là trật tự OIS sẽ được phục hồi sau 3 bước. Điều cuối cùng cần chú ý của hoán vị GALOIS-AGLISO là các chữ cái G và A là chuyển vị, nó sẽ trở lại trật tự cũ cứ sau hai lần thực hiện hoán vị đó. Bây giờ gộp tất cả các mẩu thông tin ấy lại, chúng ta sẽ tìm được một cách rất dễ dàng để giải câu đố này. Vì O, I, S sẽ trở lại trật tự ban đầu sau ba bước, và G, A sau hai bước (còn L thì không đổi), nên chúng ta sẽ phục hồi lại từ gốc GALOIS cứ sau $3 \times 2 = 6$ bước (bạn có thể tự kiểm tra bằng cách lặp lại các phép thay thế 6 lần). Số 1327 bằng $6 \times 221 + 1$. Điều này có nghĩa là sau bước thứ 1326 ($= 6 \times 221$) các chữ cái trở về trật tự ban đầu là GALOIS, và thực hiện thêm một bước còn dư nữa thì GALOIS biến thành AGLISO là từ cuối cùng. Từ đây ta rút ra một bài học quan trọng: *Sự phân tích các tính chất của phép hoán vị cho phép ta tiên đoán được kết cục cuối cùng mà không cần phải thực sự tiến hành thí nghiệm*. Đó cũng chính là triết lý nằm phía sau lý thuyết Galois. Ông đã phát hiện ra một phương pháp thật tài tình để xác định một phương trình có thể giải được hay không bằng cách xét các tính chất đối xứng của những phép hoán vị các nghiệm của nó.

Cũng y hệt như hai lần xáo liên tiếp một bộ bài lá tạo ra không gì khác là một lần xáo khác, việc thực hiện một phép hoán vị này tiếp sau một phép hoán vị khác, kết quả cho ta phép hoán vị thứ ba. Như vậy các phép hoán vị tự động thỏa mãn điều kiện đóng của các nhóm. Cần nhớ lại rằng tính chất đóng có nghĩa là tổ hợp hai phần tử thuộc nhóm bằng phép toán của nhóm sẽ cho một phần tử khác cũng thuộc nhóm đó. Ví dụ, tập hợp tất cả các số dương (số nguyên, phân số, và các số vô tỷ) lập thành một nhóm với phép tính nhóm là phép nhân thông thường. Đặc biệt, điều kiện đóng được thỏa mãn vì tích của số dương bất kỳ luôn là một số dương. Việc nhận ra hoán vị là các đối tượng toán học quan trọng đáng phải nghiên cứu đã đặt Galois trên con đường đi tới xây dựng lý thuyết nhóm.

NHÓM VÀ HOÁN VỊ

Các hoán vị và các nhóm có mối liên hệ khăng khít với nhau. Thực tế, khái niệm nhóm ra đời từ những nghiên cứu về hoán vị. Đối với Galois, đây mới chỉ là bước đầu tiên trong một chuỗi những phát minh và ý tưởng tài tình lát đường cho chứng minh xuất sắc của ông.

Tôi xin phép được nhắc lại định nghĩa chính xác của một nhóm mà tôi đã giới thiệu ở Chương 2. Một *nhóm* gồm các phần tử phải tuân theo bốn quy tắc đối với phép toán của nhóm. Để làm ví dụ, ta hãy lấy tập hợp các biến dạng của một mẩu đất nặn với phép toán ở đây là "tiếp theo bởi". Các quy tắc là như sau. Thứ nhất, sự tổ hợp của hai phần tử bất kỳ bằng phép toán nhóm phải tạo ra một phần tử khác (tính chất này được gọi là *tính* đóng). Rõ ràng, một biến dạng của Play-Doh được tiếp theo bởi biến dạng thứ hai hiển nhiên sinh ra một biến dạng khác. Thứ hai, phép toán nhóm là *kết hợp* nghĩa là ba phần tử có thứ tự được tổ hợp bằng phép toán nhóm, thì kết quả không phụ thuộc vào chuyện hai phần tử nào được tổ hợp trước. Các phép biến đổi liên tiếp như các biến dạng của mẩu Play-Doh tự động thỏa mãn quy tắc này. Thứ ba, nhóm phải chứa một "status quo" (nguyên trạng) hay một *phần tử đồng nhất* tức là phần tử khi tổ hợp nó với bất cứ phần tử nào khác thì làm cho phần tử đó không thay đổi. Đối với mẩu Play-Doh thì đóng vai trò này là biến dạng "không làm gì cả". Cuối cùng, đối với mỗi phần tử của nhóm, cần tồn tại cái gọi là phần tử *nghịch đảo* sao cho khi một phần tử tổ hợp với nghịch đảo của nó sẽ nhận được phần tử đồng nhất. Đối với mỗi một biến dạng của mẩu Play-Doh luôn tồn tại một biến dạng ngược lại làm phục hồi hình dạng ban đầu.

Bây giờ ta sẽ xét tập hợp tất cả các hoán vị khả dĩ của ba số 1, 2, 3:

$$\underset{I}{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}}\underset{S_1}{\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}}\underset{S_2}{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}}\underset{t_1}{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}}\underset{t_2}{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}}\underset{t_3}{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}}$$

Ở đây để có thể dẫn chiếu đến các hoán vị này ta gán cho mỗi phần tử một nhãn (ở bên dưới). Phần tử đồng nhất, trong đó mỗi số được thay bằng chính số đó, được ký hiệu là I. Mỗi hoán vị t_1, t_2 và t_3 *chuyển vị* hay đổi chỗ hai số trong khi giữ nguyên số thứ ba. Hai hoán vị s_1 và s_2 đều là các hoán vị *vòng quanh* làm cho các số chuyển động trên vòng tròn.

Bây giờ ta sẽ quan sát xem điều gì sẽ xảy ra khi áp dụng liên tiếp hai hoán vị. Cần nhớ rằng cái quan trọng ở đây là số nào thay thế cho số nào chứ không phải chúng được viết theo thứ tự nào. Ví dụ, xét trường hợp t_1 được tiếp theo bởi s_1. Hoán vị t_1 thay số 1 thành chính nó, và sau đó s_1 thay 1 thành 2. Do đó, kết quả cuối cùng là phép biến đổi $1 \rightarrow 2$. Đồng thời, t_1 thay 2 bằng 3 và sau đó s_1 thay 3 bằng 1, do đó kết quả là $2 \rightarrow 1$. Cuối cùng, 3 được thay bằng 2 trong hoán vị t_1 và sau đó trở về 3 qua hoán vị s_1. Vậy tổ hợp của t_1 và s_1 là hoán vị

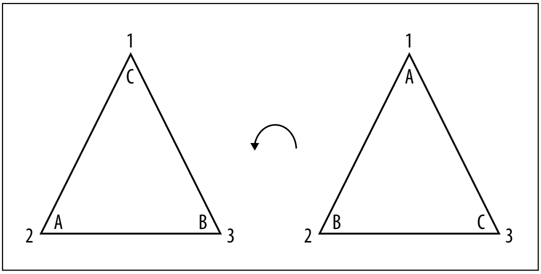
$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$

Đây chính là hoán vị t_3. Nói một cách khác, nếu ký hiệu phép "tiếp theo bởi" bằng dấu $\circ$, thì ta có $s_1 \circ t_1 = t_3$ (nhớ rằng hoán vị áp dụng đầu tiên luôn được viết ở bên phải).

Bảng nhân đầy đủ đối với sáu hoán vị trên có dạng:

o	I	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
I	I	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
s_1	s_1	s_2	I	t_3	t_1	t_2
s_2	s_2	I	s_1	t_2	t_3	t_1
t_1	t_1	t_2	t_3	I	s_1	s_2
t_2	t_2	t_3	t_1	s_2	I	s_1
t_3	t_3	t_1	t_2	s_1	s_2	I

Chẳng hạn ở đây, ô là giao của, dòng s_2 và cột t_3 cho kết cục của tổ hợp $s_2 \circ t_3$, nhìn trong bảng ta thấy nó bằng t_1. Thoạt nhìn ta thấy bảng này khá lộn xộn, nhưng quan sát kỹ hơn sẽ phát lộ một sự thật quan trọng: *tập hợp tất cả các hoán vị của ba đối tượng tạo nên một nhóm*. Thực tế, phát biểu trên là đúng đối với các hoán vị của một số đối tượng bất kỳ. Bảng trên cho thấy ngay điều kiện đóng được thỏa mãn (tổ hợp hai hoán vị bất kỳ của ba vật cho một hoán vị khác của ba vật đó) và mỗi hoán vị đều có một hoán vị nghịch đảo, tức hoán vị ngược với hoán vị ban đầu. Trong trường hợp đang xét, bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng $s_1$và s_2 là nghịch đảo của nhau, tức áp dụng hoán vị này sau hoán vị kia sẽ phục hồi lại trật tự ban đầu (tức $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = I$). Tương tự, mỗi hoán vị t_1, t_2 và t_3 đều là phần tử nghịch đảo của chính nó. Nghĩa là áp dụng mỗi hoán vị đó hai lần ta sẽ phục hồi lại được *status quo* (tức là $t_1 \circ t_1 = I;\ t_2 \circ t_2 = I;\ t_3 \circ t_3 = I;$). Nhóm của n! các hoán vị của n đối tượng khác nhau thường được ký hiệu là S_n.



Hình 77

Số phần tử của nhóm được gọi là *bậc* của nó. Ví dụ, bậc của nhóm các hoán vị của ba phần tử (S_3) là 6 vì có đúng 6 hoán vị như vậy.

Vậy tại sao chúng ta lại phải quan tâm các hoán vị có tạo nên một nhóm hay không? Không chỉ bởi vì, trước hết, về mặt lịch sử đó là những đối tượng cho ra đời khái niệm nhóm, mà còn bởi vì những nhóm đặc biệt này theo một nghĩa nào đó là sân khấu trung tâm trong lý thuyết nhóm.

Để minh họa vai trò đặc biệt của nhóm các hoán vị, ta hãy xét lại một lần nữa các đối xứng của tam giác đều. Cần nhớ lại rằng có 6 đối xứng làm cho tam giác đều không thay đổi, tương ứng với phép đồng nhất, phép quay 120 độ, phép quay 240 độ và phép phản xạ qua ba trục (xem hình 9, trang 29). Trong Chương 2, chúng ta đã phát hiện ra rằng tập hợp các đối xứng của một vật bất kỳ lập nên một nhóm. Vì nhóm các đối xứng của tam giác đều có số phần tử đúng bằng số phần tử của nhóm các hoán vị của ba vật – cả hai đều có bậc là 6 – nên sẽ là có nghĩa nếu ta có băn khoăn tự hỏi rằng hai nhóm này có liên hệ gì với nhau không. Nhưng phép quay 120 độ ngược chiều kim đồng hồ thực sự là làm gì (hình 77)? Đơn giản là nó lấy đỉnh A và làm cho đỉnh này chuyển động từ vị trí 1 sang vị trí 2. Đồng thời nó cũng làm cho đỉnh B chuyển động từ vị trí 2 sang vị trí 3 và đỉnh C từ vị trí 3 sang vị trí 1. Nói cách khác, chúng ta có thể nhìn phép quay này không gì khác chính là một hoán vị của các vị trí 1, 2, 3 đối các đỉnh của tam giác quay:

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$$

Tương tự như thế, năm đối xứng còn lại mỗi đối xứng cũng tương ứng với một hoán vị khác, người ta nói *hai nhóm này có cấu trúc đồng nhất*. Điều này thiết lập một mối liên kết chặt chẽ và bất ngờ giữa đối xứng và hoán vị thông qua lý thuyết nhóm. Nhận thức đó đã là cơ sở cho một định lý quan trọng được nhà toán học Anh Arthur Cayley (1821-1895) chứng minh năm 1878. Nói theo ngôn ngữ thông thường thì định lý này phát biểu một thực tế rất quan trọng: *Mỗi nhóm đều được đúc trong cùng một khuôn với một nhóm các hoán vị*. Điều này có nghĩa là, mặc dù định nghĩa của các nhóm cho phép một sự tự do rất lớn, nhưng đối với mọi mục đích thực tiễn, luôn có một nhóm các hoán vị là đồng nhất với một nhóm bất kỳ. Nói theo ngôn ngữ toán học thì hai nhóm có cùng cấu trúc hay có cùng "bảng nhân", như nhóm các hoán vị của ba vật và nhóm đối xứng của tam giác đều, được gọi là đẳng cấu. Để cho một ví dụ khác, hãy nhớ lại nhóm đối xứng của cơ thể người đã nói ở Chương 2, nhóm này gồm hai phần tử là phần tử đồng nhất và phép phản xạ qua mặt phẳng thẳng đứng (biểu diễn đối xứng hai bên). "Bảng nhân" của nhóm này đối phép toán "được tiếp theo bởi" có dạng sau:

o	*I*	*r*
I	*I*	*r*
r	*r*	*I*

trong đó I và r lần lượt là phần tử đồng nhất và phép phản xạ (lưu ý rằng áp dụng phép phản xạ hai lần sẽ phục hồi lại hình ban đầu, tức là bằng phân tử đồng nhất).

Bây giờ ta xét một nhóm đơn giản gồm hai số 1 và -1 với phép toán nhóm là phép nhân thông thường. Bảng nhân (lần này thì đúng thế!) của nhóm này là

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Nếu bạn xem xét kỹ lưỡng hai bản trên và lập sự tương ứng $I \leftrightarrow 1$và $r \leftrightarrow -1$thì bạn ngay lập tức phát hiện ra rằng hai nhóm này chính xác là có cùng một cấu trúc. Nghĩa là nhóm đối xứng của cơ thể người là đẳng cấu với nhóm nhân - hai số đó.

Ngoài khái niệm cơ bản là các nhóm hoán vị ra còn có một công cụ toán học thông minh nữa mà Galois cần để thực hiện chứng minh rằng phương trình bậc năm tổng quát (và bậc cao hơn nữa) là không thể giải được bằng một công thức. Đó là ý tưởng *nhóm con*. Một số tập con các phần tử của một nhóm tự chúng cũng thỏa mãn tất cả bốn điều kiện để trở thành một nhóm (đóng, kết hợp, phần tử đồng nhất, phần tử nghịch đảo). Trong trường hợp đó, người ta nói tập con này lập nên một *nhóm con*. Ví dụ, hai hoán vị I và t_3 ở trang 243 lập nên một nhóm con của nhóm các hoán vị của ba vật, bởi vì $I \circ t_3 = t_3$ và $t_3 \circ t_3 = I$ (xem bảng nhân ở trang 243) ngụ ý tính đóng và có nghĩa là cả hai I và t_3 là phần tử nghịch đảo của chính mình. Nếu chúng ta chia bậc (số các phần tử) của nhóm mẹ cho bậc của nhóm con (là 2 trong trường hợp đang xét) thì ta nhận được nhân tử hợp thành (*composition factor*). Trong ví dụ trên, nhân tử hợp thành là $6:2=3$. Thực tế con số nhận được là một số nguyên không phải là chuyện ngẫu nhiên. Một định lý của Lagrange đảm bảo rằng điều đó là luôn luôn đúng. Bậc của nhóm mẹ hữu hạn luôn chia hết cho bậc của nhóm con. Bạn sẽ không thể tìm được nhóm có bậc 12 mà các nhóm con của nó có bậc là 5, 7 hoặc 8; nó chỉ có thể có các nhóm con có bậc là 2, 3, 4, 6.

Giờ đây Galois đã có đủ các công cụ mà ông cảm thấy là cần thiết cho chứng minh của mình, nhưng còn cần phải có một bước nhảy khổng lồ về trí tưởng tượng để gộp chúng lại với nhau nhằm tạo ra một bức tranh hài hòa. Lịch sử toán học gần như sắp được hoàn thành.

CHỨNG MINH XUẤT SẮC CỦA GALOIS

Trong một bức tranh biếm họa nổi tiếng của Sidney Harris người ta thấy có hai nhà khoa học đứng cạnh một chiếc bảng đen viết đầy các phương trình. Một người chỉ tay vào câu: "SAU ĐÓ MỘT ĐIỀU THẦN KỲ SẼ XẢY RA", được viết giữa hai phương trình phức tạp, và chú thích tranh có ghi "Tôi nghĩ rằng anh sẽ thấy rõ ràng hơn ở đây, trong bước thứ hai". Ý tưởng sâu sắc của Galois cũng không gì khác là một sự thần kỳ**.** Trong lịch sử khoa học, ngay cả những phát minh lớn thường bắt nguồn từ cái gì đó "đã lơ lửng trong không khí" ở thời gian đó. Đó là những ý tưởng mà thời gian của nó đã điểm. Chẳng hạn, đa số các nhà vật lý đều nhất trí rằng nếu như Einstein không đưa ra thuyết tương đối hẹp, mà từ đó xuất hiện công thức $E = mc^2$, thì sớm hay muộn cũng sẽ có ai đó nảy ra chính ý tưởng đó. Có một ngoại lệ thật đặc biệt mà ở đó chẳng có gì "đã lơ lửng trong không khí" cả, ở đó một tầm nhìn vĩ đại ngang cỡ như thế có lẽ phải rất rất lâu sau này mới trở thành hiện thực được, đó là thuyết tương đối rộng của Einstein. Thuyết này quan niệm rằng lực hấp dẫn đơn giản là sự phản ánh hình học của không gian và thời gian. Những vật có khối lượng lớn làm cong không thời gian giống như một quả bóng bowling làm uốn cong một cầu nhảy vậy. Trong chuyển động của mình xung quanh Mặt Trời, các hành tinh đi theo các quỹ đạo cong không phải vì có một lực hút bí hiểm nào đó mà là do sự uốn cong này. Ý tưởng này có tính cách mạng trong nhận thức về cấu trúc của vũ trụ đến mức nhà vật lý Mỹ nổi tiếng Richard Feynman (1918-1988) đã từng nói: "Tôi vẫn còn không thể hiểu được ông ấy đã nghĩ ra điều đó như thế nào". Thậm chí ngày nay, 90 năm sau khi bài báo đầu tiên về thuyết tương đối rộng ra đời, trực giác của Einstein vẫn còn tiếp tục gây kinh ngạc (Tôi sẽ còn quay trở lại với thuyết tương đối rộng ở Chương 7).

Nhiều nhà toán học cũng cảm thấy sợ sệt tương tự khi nghĩ về Galois. Joseph Rotman thuộc Đại học Illinois có nói với tôi: "Phát minh ra các nhóm của Galois là một chớp sáng thiên tài. Xét cho cùng, nhà toán học vĩ đại Abel, người cũng đã nghiên cứu bài toán về tính giải được bằng căn thức ở cùng thời gian đó, cũng có nảy ra ý tưởng về lý thuyết nhóm đâu. Thực tế, chỉ có Cauchy trên đường trở về Pháp vào những năm 1840 dường như mới đánh giá được thành tựu của Galois, và những nghiên cứu tích cực về lý thuyết nhóm của Cauchy đã dẫn tới việc sử dụng lý thuyết nhóm trong các lĩnh vực khác của toán học". Nhà đại số Peter Neumann của Đại học Oxford nói thêm: "Galois đã có một nhận thức sâu sắc phi thường hướng tới việc hiểu biết các nhóm với địa vị riêng xứng đáng của chúng, nhưng cũng phi thường không kém là ông biết sử dụng các nhóm như thế nào trong lý thuyết các phương trình – và cuối cùng đã tạo ra cái mà ngày nay chúng ta gọi là lý thuyết Galois (mà xét cho cùng cũng chính là lý thuyết hiện đại của các phương trình)".

Vậy làm thế nào mà Galois đã chứng minh được các mệnh đề đầy tính đột phá của ông? Mặc dù điều cốt lõi trong chứng minh của Galois khá là kỹ thuật, nhưng nó mở ra một ô cửa sổ độc đáo ngõ hầu cho chúng ta nhìn thấy được tính sáng tạo vô song của ông, nên cũng rất đáng để chúng ta bõ công thâm nhập vào nó. Theo dõi các bước logic của chứng minh này cũng giống như ta đi qua những mê cung trong trí não của Mozart khi ông sáng tác một bản giao hưởng vậy.

Chứng minh của Galois gồm ba yếu tố quan trọng, tất cả đều mang tính độc đáo và giàu tưởng tượng. Ông đã bắt đầu bằng cách chứng tỏ rằng mỗi phương trình đều có một "hồ sơ đối xứng" riêng của nó, tức một nhóm hoán vị (nay gọi là nhóm Galois) biểu diễn các tính chất đối xứng của phương trình đó. Khỏi cần phải nói quá tầm quan trọng của bước này. Trước Galois các phương trình chỉ được phân loại theo bậc của chúng: bậc hai, bậc ba, bậc năm, vân vân. Galois đã phát minh ra rằng đối xứng là một đặc tính quan trọng hơn. Phân loại các phương trình theo bậc của chúng cũng chẳng khác gì việc nhóm các viên gạch bằng gỗ trong một hộp đồ chơi theo kích thước của chúng. Phân loại của Galois theo các tính chất đối xứng cũng tương đương như nhận thức rằng hình dạng của các khối – tròn, vuông, hay tam giác – là cơ bản hơn. Đặc biệt, nhóm Galois của một phương trình là nhóm hoán vị lớn nhất của các nghiệm được giả thiết là tồn tại – đó là những hoán vị làm cho một tổ hợp nào đó của các nghiệm này là không thay đổi. Ví dụ, giả sử ta lấy nhóm các hoán vị của hai vật. Nhóm này gồm hai phần tử: phần tử đồng nhất và phép đổi chỗ hai vật. Bây giờ ta hãy xét phương trình bậc hai. Ta ký hiệu hai nghiệm của nó là x_1 và x_2. Rõ ràng, tổ hợp là tổng của hai nghiệm không thay đổi đối với tác dụng của cả hai phần tử của nhóm các hoán vị hai vật. Phần tử đồng nhất giữ nguyên x_1 và x_2, còn phần tử trao đổi hai nghiệm đơn giản là biến $x_1 + x_2$ thành $x_2 + x_1$, nghĩa là có cùng giá trị. Theo định lý cơ bản của đại số của Gauss, thì các phương trình bậc n có n nghiệm. Số cực đại các hoán vị khả dĩ của n nghiệm là $n!$ và nhóm chứa tất cả các hoán vị đó, như chúng ta đã biết ở trên, được gọi là S_n. Galois đã chứng minh được rằng đối với n bất kỳ, người ta luôn tìm được các phương trình bậc n mà đối với nó nhóm Galois thực sự là S_n đầy đủ. Nói một cách khác, ông đã chứng tỏ rằng đối với một bậc bất kỳ, luôn có các phương trình có đối xứng cực đại. Ví dụ, luôn có phương trình bậc năm mà đối với nó nhóm Galois là S_5.

Yếu tố quan trọng thứ hai trong chứng minh của Galois lại là một phát kiến khác. Khi đã đưa vào khái niệm nhóm con, bây giờ ông đã cho khái niệm đó một đặc tính phụ bằng cách định nghĩa một *nhóm con chuẩn tắc*. Hãy xét ví dụ nhóm gồm sáu hoán vị của ba vật, tức nhóm S_3. Dễ dàng kiểm tra rằng tập con gồm ba phần tử I, s_1, s_2(xem trang 243) lập nên một nhóm con của S_3. Tính đóng được đảm bảo bởi thực tế (xem bảng nhân ở trang 243) rằng $s_1 \circ s_2 = s_2$, $s_2 \circ s_2 = s_1$; s_1, s_2 là nghịch đảo của nhau (vì $s_1 \circ s_2 = I$). Ta ký hiệu nhóm con ba phần tử này là T. Giờ giả sử rằng ta lấy một phần tử nào đó của T, chẳng hạn như s_1, rồi nhân nó bên trái với một phần tử của nhóm mẹ S_3, chẳng hạn như t_1, rồi nhân bên phải với phần tử nghịch đảo của chính phần tử đó (ở đây cũng là t_1 vì t_1 là phần tử nghịch đảo của chính nó). Tức là chúng ta dựng tổ hợp $t_1 \circ s_1 \circ t_1$. Dùng bảng nhân ở trang 243 ta thấy rằng $s_1 \circ t_1 = t_3$, còn $t_1 \circ t_3 = s_2$. Nói cách khác, $t_1 \circ s_1 \circ t_1 = s_2$, và s_2 lại chính là một phần tử của T. Nếu phần tử bất kỳ của nhóm con đều thỏa mãn tính chất đó (tức là nhân nó bên trái với một phần tử của nhóm mẹ, rồi nhân bên phải với nghịch đảo của phần tử này ta lại nhận được một phần tử của nhóm con), thì nhóm con này được gọi là *nhóm con chuẩn tắc*. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng T là một nhóm con chuẩn tắc của S_3. Thực tế, T là nhóm con chuẩn tắc *cực đại* (tức có bậc cao nhất) của S_3. Tổng quát, nếu một nhóm có các nhóm con chuẩn tắc (khác với chính nhóm đó) thì một trong những nhóm con đó là lớn nhất. Đến lượt mình, nhóm con chuẩn tắc cực đại này có thể lại có những nhóm con chuẩn tắc hậu duệ của riêng nó. Một trong những nhóm con lại có thể có bậc cao nhất. Theo cách này, sẽ có cả một phả hệ các nhóm con chuẩn tắc. Chúng ta có thể dùng cây phả hệ của các nhóm con chuẩn tắc này để tạo ra dãy các *nhân tử hợp thành* (bậc của nhóm mẹ chia cho bậc của nhóm con cực đại). Trong trường hợp S_3 và

T, nhân tử hợp thành là $6:3=2$. Nhóm con duy nhất của T là một nhóm đơn giản nhất, thực tế là tầm thường, đó là nhóm chỉ gồm một phần tử duy nhất là phần tử đồng nhất I. Do đó, nhân tử hợp thành giữa T và nhóm con chuẩn tắc của nó là $3:1=3$. Do đó, tôn ty thế hệ các nhóm S_3, T và nhóm chỉ gồm một phần tử I cho chúng ta dãy các nhân tử hợp thành là 2, 3.

Không ở đâu thiên tài Galois sáng chói hơn là ở bước thứ ba trong chứng minh của ông. Ở đây ông sử dụng tất cả những sáng tạo nói trên mà ông đã tưởng tượng ra. Câu hỏi mà thậm chí Abel vĩ đại còn để mở - Đối với một phương trình, cái gì khiến cho nó giải được bằng một công thức? – đã sắp có câu trả lời. Galois đã chứng minh được rằng để được hưởng sự xa hoa có nghiệm dưới dạng một công thức, thì các phương trình phải có nhóm Galois thuộc loại rất đặc biệt. Cụ thể, Galois gọi một nhóm là "giải được" nếu tất cả các nhân tử hợp thành của dãy các nhóm con chuẩn tắc là một số nguyên tố (tức là số chỉ chia hết cho 1 và chính nó). Và sau đó ông đã biện minh đầy đủ cho việc dùng cái tên giải được bằng cách chứng minh rằng *điều kiện để một phương trình là giải được bằng một công thức là nhóm Galois của nó phải giải được*. Về căn bản, Galois đã chứng minh được rằng khi nhóm Galois của một phương trình là giải được thì quá trình giải phương trình sẽ được phân ra thành các bước đơn giản hơn, mỗi bước chỉ liên quan đến việc giải các phương trình bậc thấp hơn.

Vậy định lý trên được dùng trên thực tế như thế nào? Ví dụ, trong trường hợp phương trình bậc ba tổng quát, phương trình là đối xứng nhất khi nhóm Galois của nó là S_3 (nhóm của tất cả các hoán vị của ba nghiệm). Tuy nhiên, S_3 lại là nhóm giải được, vì như chúng ta vừa thấy ở trên, cả hai nhân tử hợp thành (2 và 3) đều là các số nguyên tố. Do đó, phương trình bậc ba là giải được bằng một công thức, như dal Ferro, Tartaglia và Cardano đã chứng minh trên thực tế. Trái lại, đối với phương trình bậc năm, Galois đã xuất phát một cách tương tự, tức là trước hết chứng minh rằng có những phương trình bậc năm mà nhóm Galois của nó là nhóm đầy đủ các hoán vị của năm nghiệm, tức nhóm S_5. Nhưng ở đây đã xuất hiện điểm lý thú nhất. Galois đã chứng minh được rằng nhóm S_5 là không giải được (một trong những nhân tử hợp thành của nó lại là 60, không phải là số nguyên tố). Điều này hoàn tất chứng minh rằng phương trình bậc năm tổng quát (và tương tự, mọi phương trình tổng quát bậc cao hơn) là không giải được bằng một công thức. Một trong những bài toán hấp dẫn và hóc búa nhất trong lịch sử toán học cuối cùng đã được chinh phục một lần và mãi mãi. Tuy nhiên, để thực hiện nhiệm vụ vô cùng khó khăn này, Galois không chỉ đã nảy ra những ý tưởng xuất sắc mà còn đã phát minh ra cả một ngành toán học mới và nhận ra đối xứng là cội nguồn của những tính chất căn bản nhất của các phương trình.

Kết luận dứt khoát về tính không giải được của phương trình bậc năm bằng một công thức thoạt nghe có vẻ như là một kết quả đầy thất vọng, nhưng sự "thất vọng" đó lại dẫn tới các kho báu. Chợt liên tưởng tới câu chuyện trong kinh thánh về vua Saul. Khi những con lừa cái của ông Kish, cha của Saul, bị lạc, Kish nói với con trai: "Con hãy đem theo một người đầy tớ đi cùng, và lên đường đi tìm lại lũ lừa về". Cuộc tìm kiếm những con lừa bị lạc đã dẫn Saul tới gặp nhà tiên tri Samuel, và Saul đã được Samuel xức dầu phong vương và chàng trai trẻ này trở thành vị vua đầu tiên của Israel. Sự tìm kiếm nghiệm phương trình bậc năm của Galois đã tạo ra "nghệ thuật tối cao của trừu tượng hóa toán học – đó là lý thuyết nhóm".

TRÒ CHƠI HẸN HÒ

Mặc dù không được phát minh ra với mục đích lớn lao nào trong đầu, nhưng lý thuyết nhóm hóa ra lại là ngôn ngữ "chính thức" của mọi đối xứng. Vai trò quan trọng của các hoán vị trong lý thuyết nhóm, thoạt nhìn, có vẻ như là bất ngờ. Xét cho cùng, trong khi tất cả chúng ta đều có ý thức đầy đủ về các đối xứng thì trong đời sống thường nhật, các hoán vị lại không thu hút sự chú ý của chúng ta. Tuy nhiên, các hoán vị vẫn cứ xuất hiện, dù chỉ là lặng lẽ, và đôi khi lại xuất hiện ở những chỗ bất ngờ nhất.

Ta hãy xét một bài toán cực kỳ quan trọng, đó là tìm người bạn đời của mình. Khi đi từ hết cuộc gặp gỡ tình cờ này đến cuộc gặp gỡ tiếp sau, ai cũng mong tìm kiếm được một nửa thứ hai của mình. Nhưng làm sao có thể biết được khi nào chàng hay nàng chính là cái nửa thứ hai ấy? Liệu có thể (như trong phim ảnh) khi nhìn thấy một người cụ thể nào đó bạn ngay lập tức biết rằng đây chính là người bạn tìm và trên khắp thế gian này không còn ai khác nữa? Hay nếu dùng lời của các nhân vật trong phim *Serendipity* thì khi nào bạn sẽ dừng tìm kiếm người ưng ý và hạnh phúc với người khá ưng ý đó? Để biến đổi bài toán-làm thay đổi cuộc đời này thành một bài toán dễ giải hơn, ta sẽ phải đưa ra một vài giả thiết đơn giản hóa. Giả thiết rằng một người đàn bà hay đàn ông trung bình, ở một khoảng thời gian thích hợp trong đời, gặp được khoảng bốn người có khả năng trở thành chồng hoặc vợ của mình (tôi sẽ thảo luận sau về các tính huống liên quan tới một con số ứng viên khác). Tiếp theo, giả thiết rằng nếu người đi tìm bạn đời có khả năng tìm hiểu được tất cả bốn ứng viên thì anh ta hoặc chị ấy có thể sẽ xếp hạng họ từ ít ưng ý nhất (được ký hiệu là 1) đến ưng ý nhất (ký hiệu là 4) và không có hai người nào được xếp hạng ngang nhau. Cơ may không cho phép có sự xa xỉ là gặp cả bốn ứng viên cùng một lúc. Hơn nữa, tập quán xã hội gắn liền với phép lịch sự và tự trọng chung thường ngăn cấm không quay trở lại với ứng viên mà trước đó mình đã từ chối. Thường thì dòng chảy của cuộc đời lại đưa con người, cả đàn ông và đàn bà, trải qua một chuỗi những cuộc gặp gỡ xảy ra theo một trật tự ngẫu nhiên. Do đó, trong trường hợp có bốn ứng viên tiềm năng, mỗi một trong 4! =24 hoán vị của trật tự gặp gỡ sẽ có cùng xác suất:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Chẳng hạn, dãy 3142 có nghĩa là đầu tiên gặp ứng viên ưng ý thứ nhì, rồi thứ hai gặp ứng viên ít ưng ý nhất, thứ ba gặp ứng viên ưng ý nhất và cuối cùng là gặp ứng viên ít ưng ý thứ nhì. Sự chờ đợi người ưng ý nếu dừng lại ở ứng viên cuối cùng ở trên chắc không mang lại kết quả như mong đợi. Thực tế, nếu quá trình chờ đợi quá kéo dài thì khả năng tìm được người ưng ý sẽ giảm xuống. Vậy những người trẻ tuổi (hoặc không trẻ nữa) tội nghiệp sẽ phải làm gì đây? Hay nói một cách cụ thể hơn, những người tìm kiếm ý trung nhân của mình phải làm thế nào để có cơ hội tối đa tìm được người bạn đời ưng ý nhất?

Điều trước hết phải nhận thức rằng có tồn tại một chiến lược chung để xử lý những bài toán như vậy (rõ ràng là đã được đơn giản hóa). Nếu số các ứng viên tiềm năng là 4, thì ý tưởng ở đây là chọn một số, ký hiệu là *k*, nằm giữa 1 và 4. Khi đó, sau khi đã gặp và "nghiên cứu" kỹ $k-1$ ứng viên, hãy chọn người đầu tiên tốt hơn tất cả những người đã xem xét trước đó (hoặc nếu không có ai thì chọn người cuối cùng). Ví dụ, nếu $k=2$, ý tưởng ở đây là xem xét kỹ ứng viên thứ nhất ($k-1=1$) rồi sau đó chọn ứng viên đầu tiên ưng ý hơn ứng viên đã được xem xét (cần nhớ giả thiết rằng không thể quay lại các ứng viên trước đó). Tính hợp lý của chiến lược này thật rõ ràng – một mặt, nó lợi dụng được một cách đầy đủ thông tin đã thu thập được, và mặt khác lợi dụng được cả thực tế là tương lai còn chưa biết). Tuy nhiên, chiến lược chung không nói cho bạn biết cần phải chọn giá trị nào cho *k*. Để quyết định điều đó, chúng ta phải tìm ra giá trị nào của *k* sẽ cho xác suất lớn nhất để chọn được ứng viên ưng ý nhất (số 4). Đối với $k=1$ ($k-1=0$) thì ứng viên gặp đầu tiên sẽ kết thúc ngay việc lựa chọn. Để sự lựa chọn này là ưng ý nhất, thì người tìm kiếm phải dựa trên 6 hoán vị của thứ tự gặp gỡ trong đó 4 phải xuất hiện đầu tiên, đó là các hoán vị: 4321, 4312, 4231, 4213, 4132, 4123. Rõ ràng xác suất gặp được một trong 6 hoán vị đó của tổng số 24 hoán vị là một phần tư ($6/24 = 1/4$). Điều này cũng dễ hiểu thôi – người đi tìm bạn đời còn chưa gặp gỡ một ứng viên nào, và có một phần tư cơ may gặp được người ưng ý nhất ngay trong buổi hẹn hò đầu tiên. Điều nói trên cũng đúng đối với $k=4$. Trong trường hợp đó ($k-1=3$), người ta đánh cuộc rằng cơ may ở đây là một phần tư và người cuối cùng là người ưng ý hơn ba những ứng viên trước đó. Điều này tương ứng với 6 hoán vị 3214, 3124, 2314, 2134, 1324, 1234, theo thứ tự các cuộc gặp, và cơ may gặp được một trong 6 hoán vị đó lại là một phần tư ($6/24=1/4$). Đối với $k=3$ ($k-1=2$), người tìm bạn đời lần lượt gặp hai ứng viên và chọn ứng viên xuất hiện sau đó và ưng ý hơn cả hai người kia. Các hoán vị cho kết quả lựa chọn tốt nhất (số 4) trong trường hợp này là 3241, 3214, 3142, 3124, 2341, 2314, 2143, 1342, 1324, 1243. Ví dụ, nếu thứ tự gặp là 3241, thì người tìm bạn đời đầu tiên sẽ gặp hai ứng viên 3 và 2, sau đó vì 4 ưng ý hơn cả hai ứng viên trước nên số 4 là người được chọn. Khi thứ tự gặp là 3214, ứng viên thứ ba (số 1) là không ưng ý hơn hai ứng viên trước, do đó vẫn tìm kiếm tiếp và sẽ dẫn tới số 4. Danh sách trên (đối với $k=3$) cho thấy rằng trong trường hợp này có 10 hoán vị tạo ra sự lựa chọn ưng ý nhất. Do đó, cơ may thành công là $10/24$, tức khoảng 42%. Cuối cùng, đối với $k=2$ ($k-1=1$), sự lựa chọn dành cho ứng viên đầu tiên ưng ý hơn ứng viên đã được gặp đầu tiên. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng các hoán vị "sinh lợi" đúng số 4 trong trường hợp này là: 3421, 3412, 3241, 3214, 3142, 3124, 2431, 2413, 2143, 1432, 1423. Ví dụ, khi thứ tự gặp mặt là 3412, thì ứng viên thứ hai ưng ý hơn ứng viên thứ nhất, vậy ứng viên này sẽ được chọn. Trái lại, khi thứ tự là 3214, người tìm bạn đời sẽ từ chối ứng viên thứ hai và thứ ba vì đều không ưng ý hơn ứng viên thứ nhất và cần phải đợi ứng viên cuối cùng sẽ thấy là ưng ý hơn. Vì trường hợp $k=2$ cho kết quả mong muốn là 11 trong tổng số 24 hoán vị, nên xác suất thành công khoảng 46%, đó là chiến lược tốt nhất cần áp dụng. Tính toán tương tự cũng cho thấy rằng $k=3$ sẽ cho cơ may lớn nhất nếu số các ứng viên là 5, 6, 7 hoặc 8. Nếu số các ứng viên là 9 hoặc 10 thì $k=4$ sẽ cho cơ may là cực đại.

Tất nhiên, cuộc sống là phức tạp hơn nhiều so với mô hình quá ư đơn giản hóa đó, đặc biệt khi đây lại là công việc của trái tim. Sự lựa chọn bạn đời là một vấn đề hết sức nghiêm trọng nên ta không thể quy về việc xem xét đơn giản các hoán vị được. Tuy nhiên, riêng chuyện các hoán vị xuất hiện ở những chỗ ít ngờ tới nhất thì vẫn còn là một sự thật. Chiến lược chung được phác thảo ra ở trên, dù sao, vẫn có thể áp dụng cho nhiều hoàn cảnh khác (ít nghiêm trọng hơn), từ việc chọn xe ô tô đã sử dụng cho đến chọn bác sĩ nha khoa cho gia đình. Nếu khả năng lựa chọn tiềm tàng là rất lớn (ví dụ, trên 30) người ta có thể chứng minh bằng toán học rằng "quy tắc 37%" tạo ra cơ may lớn nhất để thành công. Điều này có nghĩa là, xem xét 37% số xe, khách sạn, bác sĩ gia đình tiềm tàng và sau đó chọn cái/người đầu tiên tiên tốt hơn tất cả những cái/người đã xem xét trước đó. (Trong trường hợp độc giả có thiên hướng toán học hơn chắc sẽ thắc mắc lấy đâu ra con số 37% lạ hoắc đó, nó xấp xỉ bằng 1/e với e là cơ số của lôgarit tự nhiên).

LẮC NHƯNG KHÔNG KHUẤY

Tìm kiếm tình yêu của đời bạn qua toán học không phải là quá trình duy nhất, trong đó các hoán vị bước ra trước ánh đèn sân khấu. Rút thăm cũng thường cung cấp những tình huống tương tự, và không ở đâu kịch tính hơn như trong cuộc rút thăm tuyển lính trong thời gian xảy ra chiến tranh ở Việt Nam vào năm 1970.

Vào tháng 11 năm 1969, Tổng thống Richard Nixon đã ký một sắc lệnh chỉ thị cho cơ quan tuyển chọn thiết lập chuỗi lựa chọn ngẫu nhiên để gọi nhập ngũ. Sắc lệnh này quy định rằng rút thăm ở đây dựa vào ngày sinh nhưng nó không chỉ dẫn cụ thể phương pháp rút thăm ngày sinh chính xác là như thế nào.

Đây không phải là lần đầu tiên trong lịch sử sự tuyển quân lại phải dựa vào một kiểu rút thăm nào đó. Đặc biệt thú vị là câu chuyện về thủ lĩnh Gideon trong kinh thánh. Đức Chúa đầu tiên phán cùng

Gideon: "Binh lính đi theo ngươi còn quá đông, Ta không trao dân Midian vào tay chúng được kẻo Israel lại tự phụ phạm đến Ta khi họ nói rằng 'Chính tay tôi đã cứu tôi'. Vậy ngươi hãy công bố cho binh lính nghe: 'Ai sợ hãi và run khiếp thì hãy về đi!". Vậy là Gideon phải sàng lọc họ, cho hai mươi hai ngàn người rút về, chỉ giữ lại mười ngàn.

Trong giai đoạn "rút thăm" thứ hai, Đức Chúa áp đặt cho Gedion một tiêu chuẩn chọn lọc thứ hai. Ngài phán cho ông Gideon dẫn quân tới gần nước để uống. Và Gideon được yêu cầu chỉ chọn ba trăm người đã "dùng tay đưa lên miệng" mà tớp nước, còn thải hết số còn lại, đó là những kẻ "quỳ xuống và uống nước" một cách trực tiếp như chó tớp. Tất nhiên, trò "rút thăm" này khác xa với sự lựa chọn ngẫu nhiên, tất cả các hoán vị của tập hợp các ứng viên không được đối xử bình đẳng như nhau. Nhiều kiến giải đã được đề xuất cho sự lựa chọn đặc biệt theo tiêu chuẩn thứ hai. Đơn giản nhất là cho rằng toàn bộ sơ đồ này chỉ cốt lọc lựa lấy một số ít người để khuếch trương thanh thế của chiến thắng thần kỳ. Những kiến giải dụng công hơn liên hệ việc quỳ xuống thi hành vốn đã được sử dụng để thờ phụng những vị thần khác, hoặc việc dùng tay (chứ không uống trực tiếp từ dòng nước) chứng tỏ mình là người điềm đạm, không tham ăn tục uống.

Điều khá lạ lùng là ngay cả khi được tiến hành cả ngàn năm sau, nhưng rút thăm tuyển quân năm 1970 cũng vấp phải vấn đề ngẫu nhiên hóa.

Bản thân thủ tục này cũng đơn giản thôi. Các quan chức cuộn các mẩu giấy trên có ghi 366 ngày tháng (kể cả ngày 29 tháng 2) rồi cho vào các vỏ nang nhựa. Vào ngày 1 tháng 12 năm 1969, lần lượt từng người một nhón lấy một cái vỏ nang này từ một cái bát lớn.

Mỗi người sinh ra vào giữa năm 1944 đến 1948 được gán cho một số quân dịch tương ứng với số thứ tự ngày sinh của mình đã được nhón ra. Ví dụ, nếu ngày tháng đầu tiên nhón ra được là 14 tháng 9 thì tất cả những ai có ngày sinh như thế đều được gán cho số 1. Những người sinh ngày 8 tháng 6 (vỏ nang cuối cùng được nhón) sẽ được gán cho số 366. Rõ ràng mỗi lần rút thăm là một hoán vị của 366 ngày tháng. Số quân dịch càng nhỏ thì khả năng một người thực sự được gọi càng cao. Bảng dưới đây cho thấy các số thăm trung bình theo các tháng nhận được vào cuộc rút thăm năm 1970:

Tháng	Số trung bình	Tháng	Số trung bình
1	201	7	182
2	203	8	174
3	226	9	157
4	204	10	183
5	208	11	149
6	196	12	122

Không cần phải là một nhà thông kê lão luyện cũng phát hiện ra xu hướng rõ ràng của các con số này. Trong khi các số trung bình đối với các tháng từ 1 đến 6 là gần như không đổi, thì lại có một sự giảm rõ rệt và đều đặn đối với các tháng từ 7 đến 12. Đặc biệt, các tháng 11 và 12 có các số trung bình thấp hơn đáng kể so với các tháng từ 1 đến 5. Những hệ quả này là hết sức phiền phức: những người sinh vào cuối năm sẽ có khả năng được gọi để tung vào cuộc chiến tranh cam go này cao đáng kể so với những người sinh vào đầu năm.

Trong những điều kiện ngẫu nhiên hóa thực sự, mỗi một trật tự khả dĩ của ngày tháng có xác suất như nhau và bằng 1 phần 366! (số các hoán vị khả dĩ), và bạn sẽ chờ đợi rằng số trung bình đối với các tháng cần phải xấp xỉ như nhau, cỡ 183 hoặc 184. Nhưng thay vì thế, số liệu thực lại cho thấy rằng trong 6 tháng đầu năm, mỗi tháng đều có số trung bình cao hơn số đó, còn trong sáu tháng cuối năm mỗi tháng lại có số trung bình thấp hơn số đó. Các nhà thống kê có thể chứng minh rằng xác suất để có một hình mẫu được bộc lộ trong bảng xảy ra trong quá trình chọn lọc thực sự ngẫu nhiên là nhỏ hơn 1 phần 50000. Vậy tại sao lại xảy ra như thế?

Mô tả dưới đây về thủ tục tổ chức bốc thăm sẽ cung cấp cho chúng ta một số manh mối quan trọng:

> Người ta lấy ra 31 vỏ nang nhựa và nhét vào đó mẩu giấy có ghi các ngày của tháng 1. Những vỏ nang tháng 1 này được bỏ vào một hộp gỗ vuông lớn và dùng một một miếng bìa cứng gạt chúng sang một bên, để cho một phần hộp là trống. Rồi 29 vỏ nang tháng hai được đổ vào phần còn trống của hộp, đếm lại một lần nữa, sau đó lại dùng tấm bìa gạt lẫn vào các vỏ nang tháng 1. Như vậy, theo đại úy Pascoe (người phụ trách về thông tin công cộng của Hệ thống dịch vụ chọn lọc), các vỏ nang tháng 1 và tháng hai đã được trộn kỹ. Quá trình trên được thực hiện tương tự với các tháng tiếp theo, đếm các vỏ nang đổ vào chỗ trống trong hộp rồi lại dùng tấm bìa gạt chúng vào số những vỏ nang của các tháng trước. Như vậy các vỏ nang tháng 1 được trộn với vỏ nang các tháng trước 11 lần, 10 lần đối với các vỏ nang tháng 2, và v.v... với tháng 11 thì việc trộn với các tháng khác chỉ hai lần và với tháng 12 thì chỉ có 1 lần. Trước mắt công chúng, các vỏ nang được đổ từ cái hộp đen vào một chiếc bát sâu cỡ 60cm. Một khi đã ở trong bát rồi các vỏ nang không được khuấy nữa... Những người nhón các vỏ nang (rút thăm) thường hay nhón những cái ở trên, mặc dù thi thoảng cũng có người thọc tay xuống giữa hoặc đáy bát.

Sự mô tả chi tiết này cho ta thấy khá chắc chắn rằng sự trộn là chưa đủ đều, khiến cho các vỏ nang cùng tháng nằm cạnh nhau, đó là thủ phạm gây ra nguy cơ không đảm bảo tính ngẫu nhiên sau đó. Theo một số phê phán của công chúng, thủ tục này đã được chỉnh sửa trong lần bốc thăm tuyển quân năm 1971. Tuy nhiên, đạt được sự ngẫu nhiên hóa một cách chắc chắn và hoàn hảo trên thực tế hoàn toàn không dễ dàng như người ta tưởng. Hãy lấy việc tung đồng xu làm ví dụ, đây là cách được xem là công bằng nhất mỗi khi người ta phải đương đầu với việc phải quyết định hai sự lựa chọn khó khăn. Xác xuất để nhận được mặt sấp và mặt ngửa là bằng nhau, đúng không? Không hoàn toàn như vậy. Nghiên cứu mới đây của các nhà thống kê Persi Diaconis và Susan Holmes của Đại học Stanford và Richard Montgomery của Đại học California Santa Cruz chứng tỏ rằng do sự tung không hoàn hảo (thậm chí có lúc làm cho đồng xu hoàn toàn không lật) một đồng xu có nhiều khả năng rơi xuống ở cùng một mặt như khi nó bắt đầu được tung lên. Sự chênh lệch giữa hai mặt không lớn – đồng xu rơi xuống đất theo cùng cách như nó bắt đầu chiếm khoảng 51% số lần tung – điều này cho thấy rằng ngay cả những sự vật đơn giản như vậy cũng không thể đảm bảo được. Không ai được trang bị tốt hơn Diaconis để kiểm tra xem một cái gì đó có là ngẫu nhiên hay không. Ông là nhà thống kê đã chứng minh được rằng, đối với người chơi bài lá trung bình, để tạo được một trật tự ngẫu nhiên trong bộ bài thì phải cần xáo bài không ít hơn 7 lần. Ông cũng nổi tiếng là người đã phơi bày và vạch trần những hiện tượng "tâm linh, huyền bí" khác nhau. Những thí nghiệm sâu rộng của Diaconis với đồng xu cho thấy rằng bạn không bao giờ nên quyết định một điều gì quan trọng mà dựa vào việc quay đồng xu trên cạnh của nó cả. Do có trọng lượng dư ở mặt ngửa, nên các đồng xu như vậy khi đổ xuống đất thường xuất hiện mặt sấp nhiều hơn mặt ngửa.

Mặc dù quan trọng như vậy, nhưng bản thân các hoán vị còn xa mới là toàn bộ câu chuyện khi nó dẫn tới lý thuyết nhóm – các nhóm dẫn tới sự trừu tượng hóa rộng lớn hơn rất nhiều. Đặc biệt, nếu hai bài toán dường như là khác nhau được đặc trưng bởi các nhóm đẳng cấu với nhau (tức có cấu trúc giống nhau) thì điều này là một gợi ý rất nặng ký rằng hai bài toán đó có thể liên hệ chặt chẽ với nhau hơn là ta có thể tưởng.

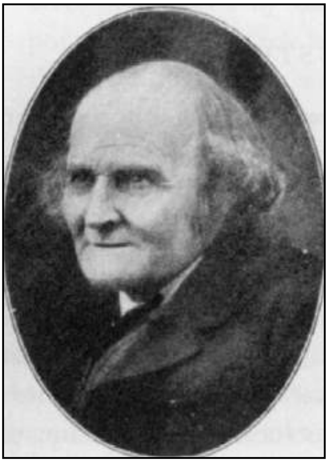
NGHỆ THUẬT TỘT BẬC CỦA TRỪU TƯỢNG HÓA

Trong cuốn sách nhan đề *Lịch sử Tự nhiên của Thương mại* xuất bản năm 1870, tác giả John Yeats viết: "*Không cần nhiều suy luận trừu tượng lắm cũng có thể dẫn dắt chúng ta phát minh ra những tính chất và cách sử dụng sắt*". Hẳn là ông đã nói đúng. Nhưng trừu tượng hóa lại chính là cái đã cho các cấu trúc toán học khả năng cơ động. Chúng có thể được mang từ lĩnh vực này sang lĩnh vực khác và từ môi trường khái niệm này sang môi trường khác.

Định lý Cayley nói rằng tất cả các nhóm, bất kể các phần tử cũng như các phép toán giữa các phần tử đó là như thế nào, về cơ bản đều là bản sao nguyên xi của (hay nói theo thuật ngữ toán học là đẳng cấu với) một nhóm các hoán vị. Định lý này đã thiết đặt cơ sở để tìm hiểu các nhóm như những thực thể trừu tượng. Các công trình riêng của Cayley, và những phát triển sau đó của các nhà toán học Camille Jordan, Felix Klein, Walter von Dyck và những người khác nữa đã chứng tỏ rằng ta có thể xuất phát từ một nhóm bất kỳ, rồi sau đó tước bỏ hết các đặc điểm riêng có của nó cho đến khi chẳng còn gì khác ngoài cái lõi căn bản trơ trụi của nó. Cái bộ xương không quần áo ấy là đủ để nắm bắt được cấu trúc và tất cả những tính chất cơ bản của các nhóm. Một sự tương tự không tránh khỏi nảy trong óc, đó là trường phái nghệ thuật tối giản của thế kỷ 20. Cả ở đây nữa, mục tiêu của các họa sĩ như Carl Andre, Donald Judd, Robert Morris, và những người khác là tập trung chú ý vào cái cơ bản nhất và rút gọn các hình thái thị giác tới đơn giản nhất có thể. Về thực chất theo mục đích, thì sự đánh giá nghệ thuật tối giản, và cả toán học nữa, luôn về cơ bản là trí tuệ, do đó là học hỏi chứ không phải là trực giác.

Xuất phát từ nhóm các hoán vị (những nhóm duy nhất được biết vào thời gian đó), Cayley đã tiến một bước khổng lồ và phát biểu những trực giác đầu tiên của ông về khái niệm nhóm trừu tượng ngay từ năm 1854. Tuy nhiên, cũng như trong trường hợp Galois, những ý tưởng gốc của ông đã vượt quá xa thời đại mình, nên chẳng ai chú ý tới. Nhà lịch sử và phê phán giáo dục toán học Morris Kline đã từng nói: "Sự trừu tượng hóa quá sớm đã rơi vào những cái tai điếc, dù những cái tai ấy thuộc về các nhà toán học hay các sinh viên". Do đó, về mặt trí tuệ, Cayley (hình 78) có thể được coi như một trong những người kế tục Galois một cách trực tiếp nhất. Nhưng cuộc đời của Cayley, trái lại, lại tương phản hoàn toàn với chàng thanh niên Pháp lãng mạn nhưng phận mỏng. Các thầy giáo của Arthur Cayley ở trường King's College, London, ngay lập tức đã nhận ra những khả năng toán học phi thường của ông. Khi ông tiếp tục theo học ở Cambridge, vị chủ khảo của đại học này đã xếp Cayley còn "trên cả hạng nhất". Và chàng trai trẻ này thực hiện được đúng như các thầy đã kỳ vọng; ngay cả trước khi tới tuổi

25 ông đã có tới hơn hai chục bài báo mang tên riêng ông. Về mặt năng sản thì chỉ có Cauchy và Euler là có thể sánh được với ông. Không giống như cuộc đời chìm nổi dữ dội (mà chìm là chủ yếu!) của Galois, cuộc sống của Cayley êm ả và thành đạt. Sau những bài báo công bố năm 1854 với các ý tưởng sâu xa, dù ít được chú ý tới, Cayley đã chuyển hướng sang các chủ đề toán học quan trọng khác, nhưng ông lại quay trở về lý thuyết nhóm với sự bùng nổ vào năm 1878. Trong một loạt bốn bài báo gốc, ông đã đẩy lý thuyết nhóm tới chính trung tâm của nghiên cứu toán học. Thực tế, theo các công trình của Cayley, thì phải mất tới hơn bốn năm những định nghĩa theo tiên đề và trừu tượng của nhóm mới ra đời.



Hình 78

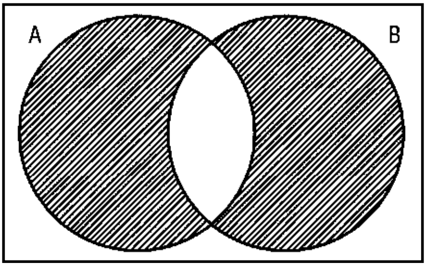
Học giả toán học James R. Newman đã viết trong tác phẩm đồ sộ *Thế giới Toán học* rằng "Lý thuyết Nhóm là một ngành của toán học trong đó người ta làm cái gì đó với một cái gì đó và so sánh kết quả này với kết quả nhận được từ việc làm chính cái đó với một cái gì đó khác hoặc làm một cái gì đó khác với chính cái đó". Cái định nghĩa cà chớn này khó mà được chấp nhận là định nghĩa ghi trong từ điển, nhưng nó lại thâu tóm được mức độ trừu tượng đã trở thành tiêu chuẩn của lý thuyết nhóm. Tôi xin phép được dùng một số ví dụ phi toán học để giải thích khái niệm này.

Có thể nhại lại trò đùa ở trên một cách khác cho những bối cảnh và hoàn cảnh khác nhau. Một nhà vật lý muốn diễn đạt sự coi thường, chê bai khả năng trí tuệ của ai đó có thể nói "Anh ta đặc đến nỗi, ánh sáng bị uốn cong khi đi qua cạnh anh ta". Cũng với mục đích đó, một người lớn lên trong thế hệ Internet có thể dùng hình ảnh "Tôi không nghĩ rằng URL của anh ta cho phép truy cập từ bên ngoài". Một viên tư vấn về thuế có thể nói: "Nếu đánh thuế bộ não của anh ta thì anh ta còn được trả thêm tiền" và một nhà hóa học có thể dùng cách nói sau: "Anh ta có chỉ số IQ cỡ nhiệt độ phòng". Tương tự, câu đố về lũy thừa của 7 đã xuất hiện cách xa nhau hàng thế kỷ trên tấm giấy dó của Ahmes, trong cuốn sách của Fibonnaci và trong bài hát ru *Mẹ ngỗng* (xem Chương 3) về căn bản là như nhau chỉ có diễn đạt là khác nhau mà thôi. Cuối cùng, bạn có thể cãi lại rằng thì nhiều chuyện cổ tích như "Nàng Bạch tuyết" và "Lọ lem" thực ra cũng chỉ là một nhưng có cách kể khác nhau thôi: một mụ dì ghẻ độc ác hành hạ bà hoàng hậu tương lai cho đến khi một hoàng tử đẹp trai đến cứu cô gái đang trong cảnh khốn cùng. Các nhóm cũng cho phép sự trừu tượng hóa tương tự. Một cấu trúc nhóm đồng nhất có thể mô tả những khái niệm tưởng chừng như khá khác nhau. Tôi sẽ chứng minh sức mạnh thống nhất này của nhóm bằng một số ví dụ tương đối đơn giản.

Hãy bắt đầu với bốn phép tính có thể được trên một chiếc quần jean bất kỳ. Ký hiệu X là phép "lộn quần mặt sau ra mặt trước" (tất nhiên là khi bạn không mặc nó), Y là "lộn quần trong ra ngoài", Z là "lộn quần mặt sau ra mặt trước và lộn trong ra ngoài" và I là phần tử đồng nhất, nghĩa là không làm gì hết. Luật hợp thành (hay còn gọi là phép toán) giữa các phép nói ở trên (ký hiệu là "$\circ$") được thực hiện theo kiểu "tiếp theo bởi". Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng các phép trên lập thành một nhóm. Đặc biệt, mỗi phép trên là phần tử nghịch đảo của chính mình vì $X \circ X = I$ (lộn mặt sau ra mặt trước hai lần sẽ phục hội lại tình trạng ban đầu); $Y \circ Y = I$ (lộn trong ra ngoài hai lần sẽ đưa cái quần trở lại trạng thái bình thường), và kết hợp hai phép bất kỳ sẽ được phép thứ ba. Ví dụ, $Z \circ Y = X$ vì "lộn trong ra ngoài tiếp theo bởi "lộn mặt sau ra mặt trước và lộn trong ra ngoài" thì kết quả đơn giản sẽ là "lộn mặt sau ra mặt trước". Do đó, "bảng nhân" của nhóm này có dạng (nhớ rằng ô nằm ở hàng X cột Y chính là $X \circ Y$ nghĩa là X tiếp theo Y)

$\circ$	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	X	Y
Y	Y	Z	I	X
Z	Z	Y	X	I

Tiếp theo, ta xét một phép toán thú vị, thường ký hiệu là Δ, có thể tổ hợp (theo cách nào đó) hai tập hợp các đối tượng. Ví dụ, nếu tập A gồm các con mèo ít nhất có một số vết đen trên lông cổ của nó và tập B gồm các con mèo ít nhất có một số vết trắng, khi đó $A \Delta B$ cho tập các con mèo hoặc có các vết đen hoặc có các vết trắng trên cổ chứ không có cả hai. Để biểu diễn bằng giản đồ, nếu A và B được biểu diễn bằng các vùng giới hạn bởi hai vòng tròn tương ứng trên hình 79, thì $A \Delta B$ được biểu diễn bởi vùng gạch sọc trên hình, như vậy Δ đã hợp nhất hai tập hợp lại nhưng loại trừ đi phần giao nhau. Bây giờ ta lấy bốn tập đơn giản sau. Tập X chỉ chứa 1 đối tượng: một con gà. Tập Y cũng chỉ chứa một đối tượng: một con bò.



Hình 79

Tập Z chứa hai đối tượng: một con bò và một con gà. Giả sử I là tập rỗng tức là không chứa bất cứ đối tượng nào (chức năng của tập hợp này giống như vai trò của số 0 đối với phép cộng thông thường vậy). Bây giờ chúng ta dùng phép toán Δ để tổ hợp hai tập bất kỳ trong số bốn tập đó. Ví dụ, $X \Delta Z = Y$, bởi vì tập chứa các đối tượng thuộc X hoặc thuộc Z nhưng không thuộc cả hai chính là tập chứa con bò, tức là tập Y. Tương tự, $Y \Delta I = Y$, vì rõ ràng có một con bò thuộc Y nhưng không thuộc tập rỗng I. Do đó, tập I đóng vai trò là phần tử đồng nhất. Các tập X, Y, Z đều là phần tử nghịch đảo của chính chúng. Bởi vì tập các đối tượng không thuộc cả hai X và X rõ ràng chỉ có thể là tập rỗng, tức $X \Delta X = I$ Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng các tập X, Y, X, I tổ hợp bằng phép tính Δ tạo thành một nhóm có bảng nhân như sau:

Δ	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	Z	Y
Y	Y	Z	I	X
Z	Z	Y	X	I

Nhưng cũng chính là bảng nhân mà ta vừa nhận được ở trên đối với các phép biến đổi của cái quần jean. Thậm chí mặc dù các phần tử của hai nhóm và phép toán nhóm trong hai trường hợp là hoàn toàn khác nhau, nhưng hai nhóm lại có cùng một cấu trúc, tức là chúng đẳng cấu với nhau. Liệu điều này có thể đơn giản chỉ là hệ quả của thực tế là hai nhóm mà chúng ta chọn ở trên có điều gì đó đặc biệt? Để tin rằng không phải như vậy, chúng ta hãy xét một nhóm các phép quay rất bình thường. Để dễ hình dung các phép biến đổi mà chúng ta sắp thực hiện, ta sẽ chọn một hình hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là khác nhau như một hộp diêm hay một cuốn sách mỏng. Xét bốn phép quay sau (hình 80):

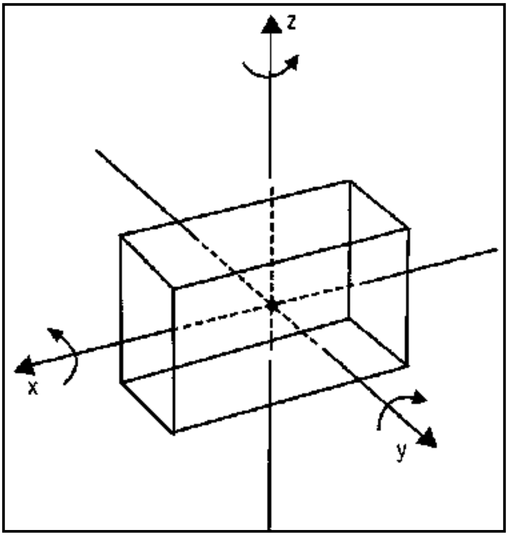
X – quay nửa vòng xung quanh trục x

Y – quay nửa vòng xung quanh trục y

Z – quay nửa vòng xung quanh trục z

I – phần tử đồng nhất, để cho hộp vẫn như cũ

Một số thử nghiệm sẽ cho thấy rằng nếu bạn thực hiện, ví dụ, *X* tiếp theo bởi *Y* bạn sẽ nhận được cùng một kết quả như khi bạn thực hiện phép quay *Z*. Đồng thời, nếu bạn thực hiện mỗi phép quay *X*, *Y*, *Z* hai lần thì bạn sẽ phục hồi lại cấu hình cũ (phần tử đồng nhất). Bảng nhân của nhóm này cũng đồng nhất bảng nhân của hai nhóm trên, nghĩa là nhóm hình học này đẳng cấu với nhóm quần jean và nhóm bò-gà.



Hình 80

Có lẽ không ở đâu việc áp dụng lý thuyết nhóm lại gây kinh ngạc hơn là trong lĩnh vực nhân chủng học. Một hệ thống quan hệ huyết thống và hôn nhân cực kỳ phức tạp của người Kariera, một bộ lạc thổ dân Australia, đã được phát hiện khiến các nhà nhân chủng học phải bối rối. Mỗi một người Kariera thuộc một trong bốn tầng lớp hay thị tộc: Banaka, Karimera, Burung và Palyeri. Người ta thấy rằng hôn nhân và sự kết hợp của các con cháu thuộc các tầng lớp đó tuân theo những quy tắc rất chặt chẽ sau:

1. Một Banaka chỉ có thể được cưới một Burung.
2. Một Karimera chỉ có thể cưới một Palyeri
3. Con cái của một người đàn ông Banaka và một người đàn bà Burung là một Palyeri.
4. Con cái của một người đàn ông Burung và một người đàn bà Banaka là một Karimera.
5. Con cái của một người đàn ông Karimera và một người đàn bà Palyeri là một Burung.
6. Con cái của một người đàn ông Palyeri và một người đàn bà Karimera một Banaka.

Bối rối vì hệ thống khác thường nay, nhà nhân chủng học nổi tiếng người Pháp Claude Lévi-Strauss (sinh năm 1908) đã mô tả những quy tắc này cho người đồng hương là nhà toán học André Weil (1906-1998) vào những năm 1940 với hy vọng ông này sẽ tìm ra một hình mẫu dẫn dắt nào đó. Weil là một con người tuyệt vời để nhờ cậy. Ngoài những kỹ năng toán học xuất chúng ra, ông còn đam mê các ngôn ngữ và ngôn ngữ học. Niềm say đắm của ông đối với chữ Phạn (*Sanskrit*) và những hiểu biết của ông về các văn bản cổ, như bộ sử thi *Mahabharata* của Ấn Độ, đã khiến ông được bổ nhiệm làm giáo sư lần đầu tiên là ở Đại học Aligarh Muslim ở Ấn Độ. Sau một thời gian suy ngẫm, thực tế Weil đã dịch được toàn bộ hệ thống Kariera thành ngôn ngữ của lý thuyết nhóm. Để tái tạo lại cách kiến giải của Weil, tôi sẽ ký hiệu bốn tầng lớp như sau:

Banaka - A

Karimera - B

Burung - C
Palyeri - D

Các quy tắc kết hôn (1) và (2) ở trên, tức A chỉ có thể cưới C (và ngược lại), và B chỉ có thể cưới A, có thể được biểu diễn bằng sự tương ứng "gia đình" sau và được ký hiệu là "f":

$$f = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng nếu hoán vị này được thực hiện hai lần thì sẽ phục hồi lại trật tự gốc, tức $f \circ f = I$ (ở đây I là phần tử đồng nhất; f chuyển A thành C và C thành A, vậy khi áp dụng hai lần A chuyển thành chính nó; và điều này cũng đúng đối với các chữ cái khác). Theo các quy tắc về huyết thống 3 – 6, tầng lớp của các con có thể được xác định hoặc là theo cha (ví dụ, con của người đàn ông Banaka luôn là Palyeri) hoặc theo mẹ (ví dụ, con của người đàn bà Banaka luôn là Karimera). Bằng cách dùng ký hiệu các tầng lớp ở trên và lần lượt ký hiệu p và m cho các quy tắc về cha và mẹ, điều này được biểu diễn bởi hai hoán vị sau:

$$p = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix} \qquad m = \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng $p \circ p = I$ và $m \circ m = I$. Ta cũng thấy tổ hợp mỗi cặp trong ba hoán vị f, p, m sẽ cho hoán vị thứ ba (ví dụ, $f \circ p = m$). Bây giờ ta có thể lập được "bảng nhân" đầy đủ của bốn hoán vị trên:

$\circ$	I	f	p	m
I	I	f	p	m
f	f	I	m	p
p	p	m	I	f
m	m	Y	f	I

Chúng ta phát hiện ra rằng không chỉ các quy tắc hôn nhân-huyết thống của người Kariera lập nên một nhóm, mà khi xem xét kỹ hơn bảng nhân, ta thấy nhóm này là đẳng cấu với nhóm quần jean, nhóm bò-gà và nhóm các phép quay! Thực tế, ta có thể coi bảng nhân này mô tả một nhóm trừu tượng bất kỳ miễn là nó gồm 4 phần tử, trong đó mỗi phần tử X, Y, Z là phần tử nghịch đảo riêng của chính nó, và sự tổ hợp hai phần tử bất kỳ này theo phép tính nhóm sẽ cho phần tử còn lại.

Bạn có thể ngẫu nhiên thắc mắc là liệu những quy tắc hôn nhân-huyết thống phức tạp của người Kariera có thể bằng cách nào đó quy ra cái gì đó tương đương của nền văn minh phương Tây hay không. Có thể. Hãy hình dung hai gia đình, Smith và Jones. Các thành viên của hai gia đình này sống ở New York và Los Angeles. Có thể định nghĩa bốn lớp: các thành viên của gia đình Smith sống ở New York; các thành viên của gia đình Smith sống ở Los Angeles; các thành viên của gia đình Jones sống ở New York; các thành viên của gia đình Jones sống ở Los Angeles. Còn các quy tắc được phát biểu như sau: Một Smith chỉ có thể cưới một Jones (và ngược lại). Một người ở New York chỉ có thể cưới một người ở Los Angeles (và ngược lại). Các đứa trẻ sống ở nhà mẹ nhưng vẫn lấy họ của cha. Những quy tắc hôn nhân-huyết thống này (rõ ràng là có tính sắp đặt) sẽ tạo nên cùng một cấu trúc như của người Kariera.

Rõ ràng không ai nghĩ rằng những người Kariera biết lý thuyết nhóm cả. Sự mô tả bằng lý thuyết nhóm những quy tắc hôn nhân-huyết thống của họ có thể là không hoàn toàn cần thiết cho những nghiên cứu nhân chủng học. Tuy nhiên, việc phân tích các quy tắc theo cách ấy có thể làm phát lộ ra những cấu trúc ẩn dấu bên dưới mà bằng những cách khác khó có thể phát hiện được hoặc bỏ mất hoàn toàn. Sự tước bỏ của các nhóm thuộc những lĩnh vực khác nhau cho tới lúc chỉ còn cốt lõi của chúng, về nhiều phương diện, rất tương tự với sự phân tích cấu trúc của nhiều ngôn ngữ khác nhau. Sự thừa nhận mối tương liên này, chẳng hạn, giữa các ngôn ngữ Ấn-Âu, đã đạt được thông qua một quá trình tương tự. Những phân tích sâu rộng của Claude Lévi-Strauss trong lĩnh vực nhân chủng học xã hội, như được thể hiện trong cuốn *Cấu trúc sơ cấp của huyết thống*, do đó đã được đông đảo thừa nhận như là một động lực nằm phía sau chủ nghĩa cấu trúc hiện đại – việc tìm kiếm những đơn vị và các quy tắc nằm bên dưới chi phối tại sao chúng lại có mối tương liên với nhau.

Chủ nghĩa cấu trúc đã rút ra những nguyên tắc tổ chức của nó, và được kích thích bởi các công trình của nhà ngôn ngữ học Thụy Sĩ Ferdinand de Saussure (1857-1913). Saussure đã vứt bỏ cách tiếp cận các ngôn ngữ theo lối truyền thống – cách tiếp cận chủ yếu dựa trên những nghiên cứu lịch sử và ngôn ngữ học – để đi theo hướng phân tích cấu trúc. Một nhà cấu trúc luận khi xem xét một chiếc máy bay được lắp ráp bằng các khối trò chơi Lego sẽ không quan tâm nhiều đến chuyện cái mô hình này có bay được không. Thay vì thế, rất giống một nhà lý thuyết nhóm, nhà cấu trúc luận của chúng ta nhận ra rằng có nhiều loại khối lắp ghép khác nhau và các đơn vị cơ bản đó kết nối với nhau theo các quy tắc rất cụ thể. Trong ngôn ngữ, các phần tử có thể là các âm vị làm nên tất cả các âm nói (trong tiếng Anh có 31 hình vị) và các quy tắc là ngữ pháp mà theo đó sắp xếp các từ. Thực tế là với một tập hợp các quy tắc ngữ pháp khá hạn chế và một tập hữu hạn các âm vị thế mà loài người đã làm ra những tác phẩm đầy ấn tượng như các vở kịch của Shakespeare, như *Thần khúc* của Dante và như bộ bách khoa toàn thư *Encyclopaedia*

Britannica. Ngay cả những đứa bé đang chập chững tập đi cũng có thể thốt ra cả những cụm từ mà trước đó chưa ai diễn đạt thế cả. Tốc độ học tiếng nhanh đáng kinh ngạc của trẻ em và những nét tương đồng cả trong quá trình học lẫn trong những sai phạm đặc trưng mà trẻ em thường mắc phải trên toàn cầu đã là động lực để người ta đưa ra ý tưởng về một ngữ pháp phổ quát. Cũng như các nguyên tắc của lý thuyết nhóm nằm ẩn bên dưới mọi đối xứng, lý thuyết ngữ pháp phổ quát thừa nhận rằng mọi ngôn ngữ đều có những nguyên tắc ngữ pháp nằm ẩn bên dưới vốn là bẩm sinh đối với toàn bộ loài người. Theo một nghĩa nào đó, ngữ pháp phổ quát không thực sự là một ngữ pháp mà là trạng thái ban đầu của khả năng ngôn ngữ mà mọi người đều sở hữu. Lưu ý rằng điều đó không có nghĩa là mọi ngôn ngữ đều có cùng một ngữ pháp mà chỉ có nghĩa là có tồn tại những quy tắc cơ bản chung và bất biến. Những nhận thức sâu sắc thuộc loại này, một phần rút ra từ chủ nghĩa cấu trúc, đã được nhà nghiên cứu có ảnh hưởng tại MIT là Noam Chomsky áp dụng cho cả lý thuyết ngôn ngữ và tâm lý học nhận dạng. Ở Italia, nhà tiểu thuyết và triết gia Umberto Eco cũng đã nổi tiếng nhờ những phân tích cấu trúc luận chi tiết của ông trong lĩnh vực ký hiệu học (*semiotics*) trong các bối cảnh văn học và xã hội.

Với sự tương đồng về mặt triết lý giữa lý thuyết nhóm và ngôn ngữ học, không có gì là ngạc nhiên rằng cũng cùng khoảng thời gian Saussure làm một cuộc cách mạng trong ngôn ngữ học thì nhà toán học Na Uy Axel Thue (1863-1922) đã đưa ra khái niệm ngôn ngữ hình thức – một tập các từ (hoặc các xâu (chuỗi) ký tự thuộc một bảng chữ cái nào đó) được mô tả bằng một ngữ pháp hình thức nào đó (một tập các quy tắc được định nghĩa rất chính xác). Một ví dụ rất đơn giản về một ngôn ngữ hình thức có thể là một tập các xâu gồm hai chữ cái *g* và *l*. Còn "ngữ pháp", chẳng hạn, được định nghĩa theo các quy tắc sau:

1. Bắt đầu với g.
2. Mỗi lần gặp chữ cái g trong một từ, hãy thay nó bằng gl.
3. Mỗi lần gặp chữ cái l trong một từ, hãy thay nó bằng lg.

Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng ngôn ngữ này gồm các từ như *g*, *gl*, *gllg*, *gllglggl*, và v.v... Các ngôn ngữ hình thức đóng một vai trò quan trọng trong khoa học máy tính và trong lý thuyết độ phức tạp (liên quan đến độ phức tạp nội tại của các nhiệm vụ tính toán). Nếu những định nghĩa của Thue về ngôn ngữ học hình thức gợi nhớ đến những yếu tố và các định nghĩa của lý thuyết nhóm thì đó hoàn toàn không phải là tình cờ. Hai chủ đề này có liên quan mật thiết với nhau, đặc biệt thông qua một bài toán quan trọng gọi là *bài toán về từ:* Bằng cách sử dụng các thay thế cho phép của ngữ pháp, liệu hai từ bất kỳ có thể biến đổi thành nhau được hay không?

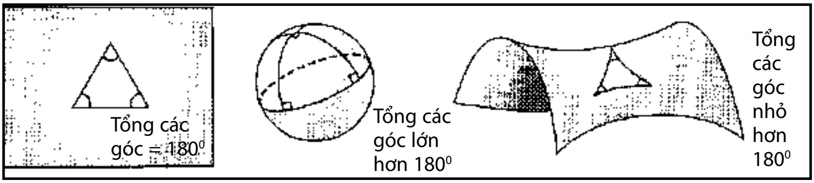
Tất cả những ví dụ nêu ra ở trên sẽ dẫn chúng ta đến kết luận gì? Các nhóm có thể đạt tới mức độ trừu tượng mà người ta thường chỉ gắn với các số thông thường. Bất kể chúng ta nói về bảy samurai, bảy năm tốt lành, bảy ngày trong một tuần, bảy cô dâu của bảy anh trai, hay bảy nhà chính trị (thực sự thì tôi không chắc là có ai muốn nói về họ không), thì tất cả những cái đó chỉ là những biểu hiện của cùng một thực thể trừu tượng, đó là số bảy. Tương tự, bốn nhóm mà chúng ta vừa đề cập tới ở trên (nhóm cái quần jean, nhóm người Kariera, v.v...) tất cả đều chỉ là sự thể hiện của một và chỉ một nhóm trừu tượng. Thật bất ngờ, bằng cách tạo ra nhóm các hoán vị, các quy tắc của người Kareira lại dâng thêm một thể hiện nữa của định lý Cayley: thực sự tồn tại một nhóm các hoán vị đồng nhất về cấu trúc với ba nhóm kia.

Toán học thường gọi các nhóm là đẳng cấu với nhau nếu như chúng thực sự chỉ là một nhóm. Nhóm cụ thể được thực hiện bởi cái quần jean và các quy tắc của người Kareira được gọi là *nhóm-bốn Klein* theo tên của nhà toán học Đức Felix Christian Klein (1849-1925). Klein là người đã có nhiều đột phá quan trọng trong việc ứng dụng lý thuyết nhóm dẫn đến sự thừa nhận rằng sự gắn kết giữa hình học, đối xứng và lý thuyết nhóm là điều không thể tránh khỏi. Mà thực tế không phải đơn giản chỉ là gắn kết. Klein đã chứng tỏ rằng, trên nhiều phương diện, hình học *chính là* lý thuyết nhóm. Phát biểu thật bất ngờ đó đã thể hiện sự cắt đứt đầy kịch tính với quan niệm truyền thống về hình học đến mức đáng phải được trình bày một cách chi tiết hơn.

HÌNH HỌC LÀ GÌ?

Khoảng năm 300 trước Công nguyên nhà toán học Hy Lạp Euclid ở Alexandria đã cho xuất bản một tác phẩm đã trở thành một cuốn sách giáo khoa best-seller ở mọi thời đại – đó là cuốn *Cơ sở*. Trong tác phẩm gồm 13 tập này, Euclid đã đặt nền móng cho môn hình học Euclid mà chúng ta đã học ở trường phổ thông và nó là môn hình học duy nhất được biết đến cho đến tận thế kỷ 19. Euclid có ý định xây dựng một lý thuyết hoàn chỉnh của hình học dựa trên một cơ sở logic được định nghĩa rất hoàn hảo. Theo đó, ông bắt đầu chỉ với năm *tiên đề* được giả thiết là luôn luôn đúng và tìm cách chứng minh tất cả những mệnh đề khác dựa trên năm tiên đề đó bằng các phép suy diễn logic. Các tiên đề cũng giống như các quy tắc của một trò chơi, mà tính "chân lý" của nó không được bàn cãi. Nếu bạn muốn thay đổi các tiên đề thì bạn sẽ chơi một trò chơi khác. Ví dụ, tiên đề đầu tiên phát biểu: "Giữa hai điểm bất kỳ có thể vẽ một đường thẳng". Hình học Euclid mô tả những mệnh đề được suy ra là đúng nếu tiên đề này và các tiên đề khác là đúng. Các tiên đề thứ hai, thứ ba và thứ tư đều cũng cô đọng như thế, nhưng tiên đề năm thì khác, nó được phát biểu rắc rối hơn, và do đó có một lịch sử khá phức tạp. Ngay cả Euclid có lẽ cũng không thật hoàn toàn ưng ý với tiên đề năm, vì ông cố lẩn tránh nó cho tới khi nào còn có thể. Chứng minh hai mươi tám mệnh đề đầu tiên trong bộ *Cơ sở* là không dùng đến tiên đề năm. Phiên bản của tiên đề năm, còn được gọi là *tiên đề về đường thẳng song song*, ngày nay thường được trích dẫn theo tên nhà toán học Scotland John Playfair (1748-1819), thậm chí mặc dù nó đã xuất hiện đầu tiên trong các bình luận của nhà toán học Hy Lạp Proclus ở thế kỷ 5. Tiên đề này phát biểu như sau: "Cho một đường thẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó, có thể vẽ được một và chỉ một đường thẳng đi qua điểm đó và song song với đường thẳng đã cho". Trong suốt nhiều thế kỷ, nhiều nhà toán học không hài lòng đã thử chứng minh tiên đề năm dựa trên bốn tiên đề đầu, nhằm xây dựng một hình học tiết kiệm hơn, nhưng đã không thành công. Tuy nhiên, đó không hoàn toàn là thất bại, vì chúng đã mang lại những nhận thức sâu sắc mới. Đặc biệt, những nỗ lực này đã dẫn tới hiểu được rằng nhiều phát biểu khác thay thế cho tiên đề năm là có thể được, tất cả đều tương đương với nhau. Cuối cùng, những bước đi vòng vo đã mở đường cho sự phát triển các hình học mới – hình học phi Euclid.

Người đầu tiên đã có những bước tiến quan trọng theo hướng các hình học phi Euclid, nhưng lại không tự nhận ra, là nhà toán học Italia Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733). Trong cuốn *Euclides ab omni naevo vindicates* (*Euclid thoát khỏi mọi tì vết*), Saccheri đã khảo sát một câu hỏi hấp dẫn: Cái gì sẽ xảy ra nếu tổng các góc trong tam giác không bằng 180 độ (như chúng ta đã học trong hình học Euclid), mà là lớn hơn hay nhỏ hơn? Liệu có thể còn xây dựng được một hình học logic tức là tự nhất quán, phi mâu thuẫn hay không? Khoảng một thế kỷ sau Legendre đã xuất phát từ chỗ Saccheri đã bỏ lại và đã chứng minh trong cuốn sách hình học nổi tiếng của ông (cuốn sách mà Galois đã học) rằng phát biểu tổng các góc trong một tam giác bằng 180 độ là tương đương với tiên đề năm của Euclid (tức là người ta có thể giả thiết một trong hai phát biểu trên là đúng thì có thể chứng minh được phát biểu kia). Tuy nhiên, cả Saccheri lẫn Legendre đều không nắm được đầy đủ các ngụ ý của những khả năng thay thế đó và cuối cùng họ đã bị sa lầy bởi những mâu thuẫn không đúng. Tuy nhiên, những công trình này và nghiên cứu bổ sung của nhà toán học vùng Alsace Johann Heinrich Lambert (1728-1777) đã giúp người ta tập trung vào tiên đề "đường thẳng song song" mà vào năm 1767 nó được nhà toán học Pháp Jean d'Alembert mệnh danh là "vụ xì-căng- đan trong hình học sơ cấp". Bốn nhà toán học từ ba quốc gia - Gauss, Bolyai, Lobachevsky và Riemann – cuối cùng đã phát biểu đúng được các hình học phi Euclid đầu tiên. Trong những hình học mới đó, tiên đề năm được thay bằng một trong những mệnh đề phủ định nó: "Qua một điểm không nằm trên một đường thẳng đã cho hoặc có

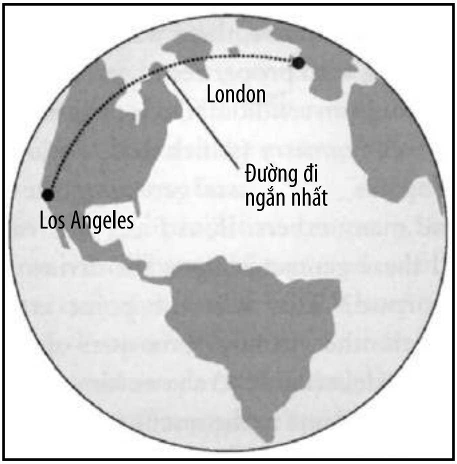


Hình 81

thể dựng được hơn một đường thẳng hoặc không dựng được đường thẳng nào song song với đường thẳng đã cho". Hay tương đương, tổng các góc trong một tam giác hoặc là nhỏ hơn 180 độ hoặc là lớn hơn 180 độ.

Hình dung các hình học như vậy được thực hiện như thế nào là điều không mấy khó khăn. Chúng ta hãy xét ba bề mặt hình 81. Hình học Euclid là hình học của không gian phẳng, loại mặt bàn hay mặt màn hình máy tính. Trong hình học này các đường thẳng song song (giả thiết là dài vô hạn) không bao giờ gặp nhau và tổng các góc trong một tam giác luôn bằng 180 độ. Trái lại, trên mặt nhìn giống như cái yên ngựa, tổng các góc trong một tam giác luôn nhỏ hơn 180 độ. Còn trên mặt cầu, như bề mặt Trái Đất, thì tổng các góc trong một tam giác luôn lớn hơn 180 độ (trong trường hợp cụ thể như trên hình vẽ, thì tổng này thực sự bằng 270 độ). Hình học trên mặt hình yên ngựa được gọi là *hình học hyperbolic*. János Bolyai (1802-1860), một nhà toán học trẻ tuổi người Hungary, đã tìm ra những nét cơ bản của hình học này vào năm 1824. Trong bức thư gửi cho cha mình là nhà toán học Farkas Bolyai, János đã không kìm được sự hân hoan với phát minh của mình: "Con đã tạo ra được một thế giới mới thật kỳ lạ, mà là từ hư vô". Vào năm 1831, tràn đầy hưng phấn, János đã hoàn tất sự mô tả hình học mới này. Vì cha anh sắp cho xuất bản một chuyên luận lớn về những nền tảng của hình học, đại số và giải tích, nên János đã chuẩn bị bản thảo của anh dưới dạng một phụ lục cho cuốn sách đó. Chuyên luận này được gửi cho Gauss để phản biện, và một bức thư từ "ông hoàng của toán học" này đã nhanh chóng làm mất đi nhuệ khí của János. Đầu tiên Gauss bày tỏ sự khâm phục đối với những ý tưởng của János, nhưng ông đã nhanh chóng chỉ ra rằng "toàn bộ nội dung của công trình... trùng gần như hoàn toàn với những suy tư riêng đã từng xâm chiếm đầu óc tôi trong suốt 30 hay 35 năm qua". Mặc dù không ai nghi ngờ rằng Gauss đã thực sự biết trước hầu hết, nếu không muốn nói là tất cả, những kết quả của János, nhưng ông chưa bao giờ công bố cả (có lẽ vì sợ rằng một hình học mới một cách triệt để như thế sẽ được xem như là một thứ dị giáo triết học). Ý thức rằng mình không phải là người đầu tiên nảy những ý tưởng đó đã hủy hoại János. Anh âm thầm chịu nỗi đắng cay, và những công trình toán học sau đó của anh hoàn toàn mất đi chất tưởng tượng bay bổng của hình học hyperbolic.

Không hề biết tới Bolyai và Gauss, nhà toán học Nga Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) vào năm 1829 đã công bố toàn văn chuyên luận gọi là hình học hyperbolic, một hình học thay thế cho hình học Euclid. Tuy nhiên, vì công trình này công bố trên *Kazan Messenger*, một tạp chí không mấy tên tuổi, nên hầu như không ai biết tới, cho đến khi một phiên bản tiếng Pháp của nó được công bố trên tạp chí *Crelle' Journal* vào năm 1837. Năm 1868, nhà toán học Italia Eugenio Beltrami (1835-1866) đã đặt hình học Bolyai-Lobachevsky trên một nền tảng vững chắc không thua kém gì hình học Euclid.



Hình 82

Một sinh viên xuất sắc của Gauss là Georg Friedrich Berhard Riemann (1826-1866) là người đầu tiên đã bàn đến *hình học elliptic*, mà một dạng đơn giản nhất của nó là hình học trên mặt cầu, trong một bài giảng của ông vào ngày 10 tháng 7 năm 1854. Bài báo của Riemann đã thuộc danh sách *top ten* của nhiều nhà toán học. Một trong những khác biệt then chốt giữa hình học elliptic và hình học Euclid là trên mặt cầu khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm không phải là đường thẳng. Mà nó là cung của vòng tròn lớn (là vòng tròn có tâm trùng với tâm của mặt cầu, như xích đạo và các kinh tuyến) đi qua hai điểm đó. Các chuyến bay từ Los Angeles tới London đã lợi dụng thực tế đó để không đi theo con đường dường như là thẳng theo bản đồ mà đi theo vòng tròn lớn hướng về phía bắc của Los Angeles (xem hình 82). Bạn có thể dễ dàng kiểm tra rằng hai vòng tròn lớn gặp nhau ở hai điểm đối kính (tức hai mút của một đường kính). Ví dụ, hai kinh tuyến song song với nhau ở xích đạo sẽ cắt nhau ở hai cực. Do đó, trong hình học này hoàn toàn không có các đường song song. Riemann đã đẩy các khái niệm trừu tượng của hình học phi Euclid đi xa hơn nhiều. Ông đã đưa vào khái niệm các không gian cong ba chiều hoặc có số chiều lớn hơn. Trong một số các không gian đó, bản chất của hình học có thể thay đổi từ chỗ này sang chỗ khác, là elliptic trong một số vùng và là hyperbolic trong những vùng khác. Sự khác biệt then chốt giữa các công trình của Riemann và những nghiên cứu của những người đi trước (kể cả Gauss vĩ đại) là sự thay đổi về điểm nhìn. Khi Gauss phân tích một mặt cong hai chiều, ông nhìn lên nó như thể ai đó nghiên cứu mặt quả địa cầu vậy, tức là từ điểm nhìn ba chiều, ở bên ngoài. Trái lại, Riemann xem xét cũng mặt cầu đó từ điểm nhìn là một chấm trên mặt ấy.

Thoạt đầu, các hình học phi Euclid dường như không gì khác chỉ là những phát minh vô dụng, mặc dù rất tài tình của những bộ óc toán học quá giàu trí tưởng tượng. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy ở chương sau, các nghiệm của phương trình Einstein mô tả cấu trúc của không gian và thời gian hóa ra thật bất ngờ lại đòi hỏi chính xác các lớp hình học được mô tả ở trên. Quan điểm của Riemann xuất phát từ việc xem xét các không gian cong, đó chính là nền tảng của vũ trụ học hiện đại – khoa học nghiên cứu vũ trụ như một toàn thể. Nếu chịu suy nghĩ một chút bạn sẽ thấy điều này là hoàn toàn đáng kinh ngạc. Câu hỏi “cái gì sẽ xảy ra nếu...” dường như là ngây thơ của Saccheri về tiên đề năm của Euclid hóa ra đã dẫn chúng ta tới xem xét các hình học đã cung cấp cho Einstein những công cụ cần thiết để giải thích kết cấu của vũ trụ. Cũng như lý thuyết của Galois đã trở thành ngôn ngữ của đối xứng và hình học phi Euclid là ngôn ngữ của các nhà vũ trụ học, kiểu “biết trước” này của các nhà toán học đối với những nhu cầu của các nhà vật lý ở các thế hệ sau đã được lặp đi lặp lại nhiều lần trong suốt lịch sử của khoa học.

Sự tổng quát hóa và trừu tượng hóa của hình học là một phát triển đáng hoan nghênh, nhưng vào những năm 1870 sự nở rộ của các hình học dường như đã bị mất kiểm soát. Ngoài tất cả những hình học phi Euclid nói ở trên, còn có cả một mớ các hình học khác, nào là *hình học xạ ảnh* (liên quan đến tính chất của các hình trong phép chiếu như khi hình ảnh trên phim được chiếu lên màn ảnh trong rạp chiếu bóng vậy), nào là *hình học bảo giác* (liên quan đến các co giãn không gian nhưng bảo toàn góc); rồi *hình học vi phân* (nghiên cứu

Hình 83

hình học bằng giải tích) và nhiều loại hình học khác. Nếu, như Plato tin tưởng, "Chúa Trời là một nhà hình học" thì ngài sẽ duyệt hình học nào đây? Chính là ở đây, chàng thanh niên 23 tuổi Felix Klein (hình 83 chụp ông ở tuổi lớn hơn) đã tới cứu viện bằng cách tiếp cận lý thuyết nhóm của mình và trật tự đã bắt đầu được kết tinh từ hỗn độn.

Trong một bài thuyết trình quan trọng nhan đề "Tổng quan so sánh các nghiên cứu hiện nay trong hình học" được đọc năm 1872 tại Đại học Erlangen, Klein đã dũng cảm giành lại các vai trò của đối xứng và các hình học. Ông nói: "Có những phép biến đổi không gian hoàn toàn không làm thay đổi các tính chất hình học của các hình. Về bản chất, các tính chất này thực sự độc lập với vị trí được chiếm của hình đang xét trong không gian, với kích thước tuyệt đối cũng như với định hướng của nó". Trước Klein, các nhà toán học đều suy nghĩ trước hết thông qua các đối tượng hình học như các vòng tròn, các hình tam giác hay các khối đa diện. Thay vì thế, trong cái gọi là chương trình Erlangen của mình, Klein gợi ý rằng bản thân hình học được đặc trưng và định nghĩa không phải bởi các đối tượng mà là bởi nhóm các phép biến đổi làm cho nó bất biến. Hãy lấy ví dụ nhóm các chuyển động rắn, tức những chuyển động bảo toàn các khoảng cách và các góc và do đó bảo toàn cả hình dạng. Vì các chuyển động này là những thứ thiết yếu của hình học Euclid, nên hình học này được định nghĩa như là hình học bất biến đối với tất cả các phép biến đổi thuộc nhóm các chuyển động rắn. Một vòng tròn có bán kính đã cho vẫn sẽ là vòng tròn đó bất kể là bạn quay nó như thế nào. Hai tam giác chồng khít lên nhau (là đối tượng của rất nhiều định lý trong hình học Euclid và cũng là nguồn gốc của những cơn đau đầu thường xuyên của các học sinh trung học) vẫn còn là bằng nhau bất kể bạn tịnh tiến, quay hay phản xạ gương chúng như thế nào. Tuy nhiên, ý tưởng triệt để này của Klein lại cho phép một tập hợp rất phong phú các hình học tồn tại. Các phép biến đổi khác có thể xoắn hoặc kéo giãn các đối tượng cũng có thể sẽ xác định các hình học mới. Nói cách khác, khái niệm cơ bản có tác dụng thống nhất và là xương sống của mọi hình học đó là *nhóm đối xứng*. Ngay cả mặc dù mỗi một hình học này có thể dựa trên một nhóm các phép biến đổi khác nhau, nhưng bản thiết kế cơ bản của tất cả các hình học là một. Trong hình học xạ ảnh rõ ràng các khoảng cách là không bất biến. Mô hình được thu trên phim của bộ phim *King Kong* gốc chỉ cao có 46cm khác rất xa với chiều cao 15m của nó trên màn ảnh. Do đó, hình học xạ ảnh được đặc trưng bởi một nhóm các phép biến đổi đối xứng khác nhóm của hình học Euclid (các khái niệm như "bát giác", "elip" vẫn còn được bảo toàn trong phép chiếu). Theo Klein, cái mà các nhà toán học cần làm để định nghĩa các hình học là cung cấp các nhóm biến đổi và nhận dạng tập hợp các đối tượng còn bất biến đối với các phép biến đổi đó. Những ý tưởng này sau đó đã được hai người khổng lồ trong toán học là nhà lý thuyết nhóm người Na Uy Sophus Lie (1842-1899) và nhân vật đỉnh cao của toán học thế kỷ 19 là người Pháp Henri Poincaré (1854-1912) mở rộng và đào sâu hơn rất nhiều.

Với chương trình cách tân của Klein, với sự trừu tượng hóa các nhóm của Cayley và khuynh hướng tiến tới tư duy cấu trúc của Lie và với toán học bao quát tất cả của Poincaré, người ta bắt đầu nhận thấy một cách rõ ràng rằng đối xứng và lý thuyết nhóm đã cung cấp nền tảng cho rất nhiều lĩnh vực của toán học. Thực tế, theo Poincaré, "toàn bộ toán học là vấn đề của các nhóm". Những lĩnh vực mà trước kia tưởng rằng chẳng có quan hệ gì với nhau, như lý thuyết các phương trình đại số, rất nhiều hình học và thậm chí cả lý thuyết số nữa (thông qua các công trình của Gauss và Euler) thì giờ đây bất ngờ được thống nhất bằng một cấu trúc cơ bản. Ngay cả mặc dù Klein đã bị một số nhà toán học Berlin (khá kiêu ngạo) cùng thời coi là "một gã lang băm chẳng có phẩm hạnh gì", nhưng ông vẫn còn có một kết quả nữa rất xuất sắc. Với một đòn lý thuyết nhóm thật tài tình ông đã kết hợp được đại số với hình học và kết nối nó trở lại với công trình của Galois về phương trình bậc năm. Tất nhiên, đó không phải là công lao chỉ của một người. Hai nhà toán học, một người Phổ tên là Leopold Kronecker và một người Pháp tên là Charles Hermite đã lát đường để dẫn tới phát hiện ra các mối liên hệ lẫn nhau sâu sắc đó.

TRỞ LẠI VỚI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NĂM

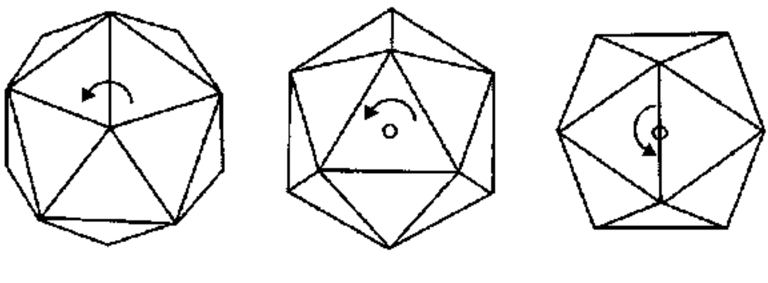
Leopold Kronecker (1823-1891) là người tiêu biểu cho sự kết hợp thực sự hiếm hoi giữa một nhà toán học tài năng và một doanh nhân thành đạt. Khả năng phi thường của ông trong việc nhận ra và ngay lập tức kết bạn với những người đang lên trong cả thế giới tài chính lẫn toán học cũng tỏ ra là rất hữu ích đối với sự thăng tiến trên con đường sự nghiệp của ông. Một số những đóng góp chính của Kronecker là trong lý thuyết các hàm elliptic (chủ đề mà Abel viết một bài báo dài tới 125 trang) và lý thuyết các *số đại số* (các số là nghiệm của một số phương trình đại số).

Năm 1845, người cậu của Kronecker qua đời. Người cậu này là ông chủ nhà băng phát đạt và còn là giám đốc một tổ hợp trang trại. Vậy là sự quản lý tất cả các doanh nghiệp của người cậu đổ lên vai nhà toán học trẻ tuổi, người vừa mới qua kỳ thi vấn đáp cho luận án tiến sĩ của anh vào ngày 14 tháng 8 năm đó. Kronecker đã nhận trách nhiệm với một nghị lực to lớn và sự chu toàn không khoan nhượng. Mặc dù yêu cầu công việc đã buộc anh phải bỏ ra tám năm sau đó đóng vai trò một doanh nhân nhưng anh vẫn không bỏ toán học. Với những người khác ở cương vị của anh chắc đã kiếm một việc gì đó nhẹ nhàng để giải trí trong những giờ rảnh rỗi, nhưng Kronecker đã dành những nỗ lực của mình để có được sự hiểu biết có lẽ là sâu sắc nhất lý thuyết của Galois trong số tất cả các nhà toán học vào cuối những năm 1840 (cần nhớ rằng các công trình của Galois đã được Liouville công bố vào năm 1846). Kết quả là một công trình trong suốt như pha lê về tính giải được của các phương trình đã được công bố vào năm 1853. Trong một mô tả của mình về công trình này, nhà lịch sử toán học E.T. Bell đã không tiếc lời ca ngợi: "Kronecker đã lấy cục vàng tinh khiết từ những người đi trước mình, tận tụy làm việc với nó như một người thợ kim hoàn đầy cảm hứng và từ thứ nguyên liệu thô đó ông đã làm nên một tác phẩm nghệ thuật không tì vết với dấu ấn cá tính nghệ sĩ không thể lẫn của ông trên đó". Sau khi đã toàn tâm trở lại với toán học, ông đã dành hẳn năm năm trời để tấn công trực tiếp vào phương trình bậc năm. Cần nhớ rằng cả Abel lẫn Galois đã chứng minh được rằng phương trình bậc năm tổng quát là không thể giải được *bằng một công thức* chỉ liên quan với các các phép tính đơn giản trên hệ số của phương trình, chứ không phải là hoàn toàn không giải được. Tuy nhiên, phương pháp giải thực sự vẫn chưa tìm được. Như thường xảy ra với các phát minh khoa học mà thời của nó đã đến, ngay khi Kronecker cuối cùng đã sắp chinh phục được phương trình bậc năm thì một nhà toán học người Pháp cũng đạt được đúng như vậy.

Charles Hermite (1822-1901) là con thứ sáu của ông Ferdinand Hermite và bà Madeleine Lallemand, hai người đã có năm con trai và một con gái. Thời thơ ấu của Hermite, khi doanh nghiệp buôn bán vải vóc của gia đình còn phát đạt, gia đình ông đã chuyển từ Dieuze tới thành phố Nancy lớn hơn. Sau khi học phổ thông ở Nancy và sau đó theo học trường trung học Henri IV ở Paris, Hermite vào học trường Louis-le-Grand khoảng mười một năm sau khi Galois rời trường này. Thầy giáo dạy toán của cậu khi đó – bạn hãy thử đoán xem – chính là Louis Richard, người đã từng dạy Galois. Người thầy giáo tài năng này đã nhanh chóng nhận ra một "Lagrange con" trong Hermite. Nếu bạn đã từng ngờ vực thói quen lặp đi lặp lại của lịch sử thì hãy xem xét kỹ trường hợp này. Trong khi còn học ở Louis-le-Grand, Hermite đã công bố được hai bài báo. Một bài nhan đề "Những khảo sát về việc giải bằng đại số phương trình bậc năm". Đây là một bài báo khá thú vị, nó đã chứng minh được rằng phương pháp giải của Lagrange (xem Chương 3) là không vận hành được. Tuy nhiên, nhan đề và nội dung của bài báo cũng chứng tỏ rằng, ít nhất là ở tuổi hai mươi, Hermite vẫn còn hoàn toàn chưa biết gì về các công trình của Abel cũng như của Galois (cũng không có ai khác vào thời gian đó ý thức được công trình của Galois). Tiếp tục sự tương đồng giữa các trải nghiệm ở nhà trường của Hermite và của Galois, một bước tiếp theo nữa là Hermite cũng đã thử thi vào trường Bách khoa. Song không giống với Galois bị trượt, Hermite đã đỗ nhưng đứng thứ 68. Tuy nhiên, sau đó chỉ một năm anh đã bị buộc phải thôi học vì sức khỏe, chân phải của anh bị dị dạng.

Hermite quay trở lại với phương trình bậc năm vào cuối những năm 1850 và bài báo của anh về đề tài này đã được công bố năm 1858 cũng đúng vào năm Kronecker công bố một bài báo có nhan để hệt như nhau: "Về việc giải phương trình bậc năm tổng quát". Kết quả của Hermite thật là ngoạn mục. Dùng một loại hàm elliptic đặc biệt, ông đã lần đầu tiên giải được phương trình bậc năm tổng quát. Vậy là hàng thế kỷ tấn công liên tục cũng đã được đền đáp.

Kronecker thậm chí còn đi thêm một bước nữa. Thứ nhất, thực tế ông cũng đã nhận được nghiệm y như của Hermite, nhưng dùng một cách tiếp cận khác, về tinh thần gần với những ý tưởng Galois hơn. Thứ hai, bài báo sau đó công bố năm 1861, trong đó ông đào sâu vào những nguyên nhân ẩn bên dưới đã khiến cho phương pháp mà ông sử dụng mang lại thành công. Nói một cách khác, Abel và Galois đã chứng minh được rằng phương trình bậc năm tổng quát không thể giải được bằng một công thức; còn Kronecker cố gắng tìm hiểu xem tại sao nó lại có thể giải được bằng các hàm elliptic. Một thành tựu nữa của Kronecker là công bố (năm 1879) một phiên bản đơn giản hơn, ngắn gọn hơn và có bố cục tốt hơn chứng minh của Abel. Ông cũng sửa lại một lỗi nhỏ trong cái chứng minh gốc dài dòng đó (may là cái lỗi này không ảnh hưởng đến kết cục). Tất cả những thứ đó đã dọn dường cho cú tấn công quyết định của Felix Klein.



Hình 84

Triết lý đứng đằng sau nghiên cứu của Klein rất đơn giản. Ở phần trước của chương này, chúng ta đã dùng các tính chất quen thuộc của nhóm đối xứng của một tam giác đều và nhóm các hoán vị của ba phần tử để chứng minh rằng hai nhóm này thực sự chỉ là một (đẳng cấu). Klein đã lộn ngược logic này lại. Ông trước hết chứng minh rằng hai nhóm tưởng như chẳng có liên quan gì là đẳng cấu, rồi sau đấy khai thác thực tế đó để khám phá ra những nguyên nhân dẫn đến sự kết nối bất ngờ đó. Những phát hiện của Klein đã được công bố năm 1884 trong một chuyên luận lớn với nhan đề thật lạ lùng "*Những bài giảng về khối 20 mặt và nghiệm của các phương trình bậc năm*". Làm sao hai chủ đề nêu trong nhan đề lại có thể liên quan với nhau? Klein đã bắt đầu bằng cách xem xét khối 20 mặt (hình 84). Plato đã coi khối đa diện rất đẹp này là một trong những cấu phần cơ bản của vũ trụ (các khối khác là khối tứ diện, khối lập phương, khối tám mặt, và khối 12 mặt được gọi chung là các *khối Platon*). Khối 20 mặt có 12 đỉnh, 20 mặt (mỗi mặt là một tam giác đều), và 30 cạnh (là giao của hai mặt). Klein đầu tiên đã chứng minh rằng có chính xác 60 phép quay làm cho khối 20 mặt này không thay đổi. Đó là (hình 84): 4 phép quay theo bội số của 72 độ quanh các đường nối các đỉnh đối diện (có cả thảy 24); hai phép quay theo bội của 120 độ quanh các đường nối tâm các mặt đối diện (có cả thảy 20); phép quay nửa vòng quanh các đường nối trung điểm hai cạnh đối diện (có cả thảy 15), và phép đồng nhất để khối ở nguyên trạng. Sau đó, ông chứng minh rằng các phép quay đó tạo nên một nhóm. Tiếp đó, ông xét nhóm hoán vị cụ thể của 5 nghiệm phương trình bậc năm. Cụ thể hơn, ông chỉ xét những hoán vị chẵn (chứa một số chẵn các chuyển vị). Vì có cả thảy 5! = 120 hoán vị của năm phần tử, nghĩa là có đúng 60 hoán vị chẵn (và 60 hoán vị lẻ). Và bây giờ là chiếu tướng. Klein đã chứng minh được rằng *nhóm khối 20 mặt và nhóm hoán vị nói trên là đẳng cấu*. Cần nhớ rằng chứng minh của Galois về tính giải được của các phương trình dựa trên sự phân loại các phương trình theo các tính chất đối xứng của chúng đối với phép hoán vị các nghiệm. Mối liên hệ bất ngờ giữa các hoán vị và các phép quay khối 20 mặt đã cho phép Klein dệt nên một tấm thảm tuyệt vời trong đó phương trình bậc năm, nhóm quay và các hàm elliptic tất cả đều đan bện với nhau. Cũng như sự giải hoàn chỉnh câu đố ghép hình sẽ phát lộ một bức tranh đầy đủ, những kết nối qua lại cơ bản được phát hiện bởi Klein đã cung cấp một câu trả lời xác quyết về tại sao phương trình bậc năm lại có thể giải bằng các hàm elliptic.

Sức mạnh thống nhất của lý thuyết nhóm đã trở nên áp đảo tới mức vào cuối thế kỷ 19 đã trở nên rõ ràng rằng tầm vóc của nó đã tràn qua ranh giới của toán học thuần túy. Đặc biệt, các nhà vật lý đã bắt đầu chú ý tới nó. Trước hết, thông qua thuyết tương đối rộng, hình học đã được thừa nhận là tính chất then chốt của vũ trụ ở quy mô lớn. Sau đó đối xứng đã được nhận dạng là nền tảng tối hậu mà từ đó nảy sinh mọi quy luật của tự nhiên. Hai chân lý đơn giản đó thực sự đã đảm bảo rằng việc tìm kiếm một lý thuyết thâu tóm tất cả của vũ trụ chủ yếu sẽ biến thành một cuộc tìm kiếm các nhóm ẩn bên dưới.

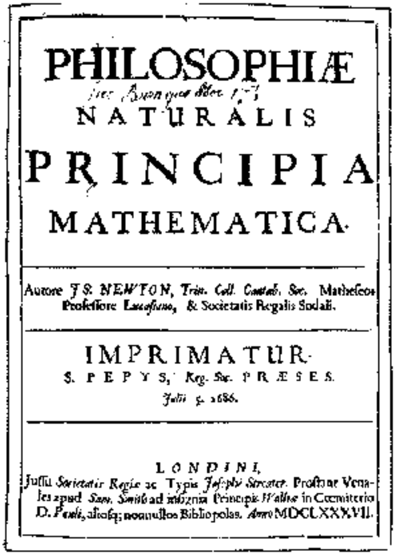
VII

Những quy tắc của đối xứng

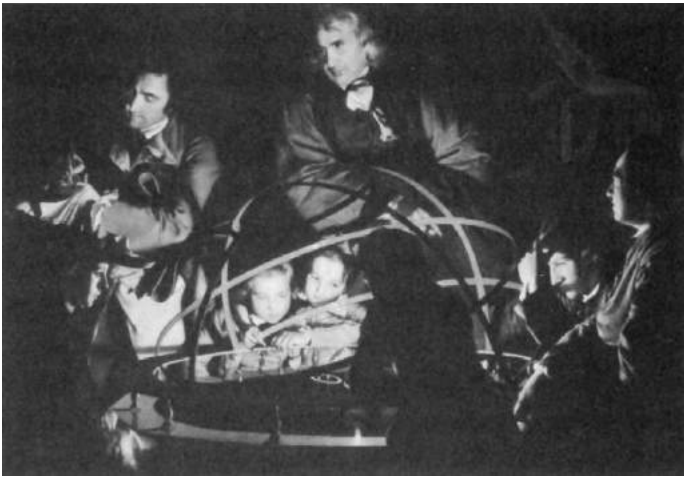
Tự nhiên thật nhân hậu đối với chúng ta. Bị chi phối bởi các định luật phổ quát, chứ không phải bởi các luật lệ cục bộ hạn hẹp, tự nhiên đã cho chúng ta cơ hội để giải mã bản thiết kế vĩ đại của nó. Khác với việc kinh doanh bất động sản – lĩnh vực mà mọi thứ chỉ là địa điểm, địa điểm và địa điểm – cả vị trí của chúng ta trong không gian hoặc sự định hướng của chúng ta đối với Trái Đất, với Mặt Trời hoặc với các ngôi sao cố định đều không làm nên sự khác biệt nào đối với các định luật mà chúng ta rút ra. Nếu không có đối xứng này của các định luật tự nhiên đối với các phép tịnh tiến và phép quay thì các thực nghiệm khoa học sẽ phải thực hiện lại ở mỗi một phòng thí nghiệm mới trên khắp thế giới và mọi hy vọng hiểu được những vùng xa xôi của không gian sẽ vĩnh viễn tiêu tan. Đó là một quan niệm rất mạnh. Khi Newton lần đầu tiên đề xuất rằng động lực học của các thiên thể cũng có thể được mô tả bằng các công thức toán học biểu diễn các định luật phổ quát, thì điều đó đã gây ra những phản ứng dữ dội (có thể thông cảm được!) trên khắp châu Âu. Sự giải thích quả táo rơi còn chưa đủ để gây nhiều ấn tượng. Trái lại, chuyển động của các hành tinh luôn được coi là sự vận hành không thể mắc sai lầm dưới sự dẫn dắt của Chúa. Để diễn đạt tình cảm đó của nhiều người, nhà thơ thế kỷ 18, Alexander Pope đã viết:

> *Tự nhiên và các định luật của tự nhiên nằm ẩn trong đêm tối:*
> *Chúa phán, sẽ có Newton! Và tất cả đều bừng sáng.*

Bản thân là một người rất mộ đạo, nên Newton không có ý định nghi ngờ sự hiện diện khắp nơi của Đức Chúa. Trong tuyệt phẩm khoa học *Principia* (tên đầy đủ là *Những nguyên lý toán học của triết học tự nhiên*) (xem hình 85 chụp trang bìa lót của cuốn sách này), ông đã viết: “Cái hệ thống đẹp nhất gồm mặt trời, các hành tinh và sao chổi này chỉ có thể bắt nguồn từ sự chỉ giáo và ngự trị của một Đấng thông minh và đầy sức mạnh. Và nếu những ngôi sao cố định là trung tâm của những hệ tương tự thì những hệ đó - được tạo nên bởi sự chỉ giáo cũng thông thái như thế - vẫn sẽ phải chịu sự ngự trị của Đấng tối cao đó”. Tuy nhiên, quan niệm vũ trụ như một cỗ máy đã biến nó thành một số tác phẩm hội họa đương thời như bức tranh *Nhà*


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Hình 85



Hình 86

triết học thuyết giảng ở Orrery của Joseph Wright xứ Derby (hình 86). Đó là một phần của sự chuyển đổi từ vũ trụ sinh thể của người Hy Lạp, coi vũ trụ như một cơ thể sống tới vũ trụ cơ giới luận.

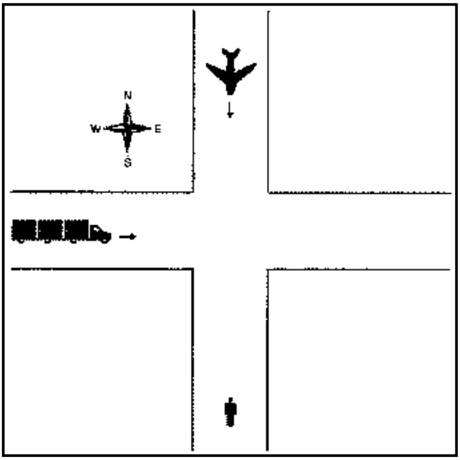
Thế giới xung quanh chúng ta vô thường như những đám mây. Những lịch sử của loài người, của Trái Đất, của hệ Mặt Trời và của toàn dải Ngân Hà (thiên hà) và thậm chí của cả vũ trụ như một toàn bộ nữa đã được đánh dấu bởi những thay đổi không ngừng, đôi khi thật dữ dội, mặc dù trên những thang thời gian khác nhau. Thật may mắn là những định luật của tự nhiên lại ít phù du hơn. Khi các nhà thiên văn quan sát một thiên hà ở cách xa hàng tỷ năm ánh sáng, thì ánh sáng lọt vào kính thiên văn ở thời điểm này thực ra đã xuất phát từ hàng tỷ năm trước. Nói một cách khác, các kính thiên văn đúng là những máy thời gian – chúng đem lại cho chúng ta những bóng hình thấp thoáng của quá khứ rất xa xôi của vũ trụ. Cho đến nay chúng ta có thể nói rằng Tự nhiên không cho phép một sự sửa chữa nào đối với kết cấu của nó – các định luật tự nhiên không thay đổi một cách đáng kể ít nhất là từ thời gian vũ trụ còn chưa đầy một giây tuổi. Nếu các định luật của vũ trụ tồn tại một cách nổi trôi hơn thì sẽ rất khó cho các nhà vật lý (nếu như họ tồn tại) khám phá ra lịch sử của vũ trụ.

KHÔNG THỜI GIAN

Đối xứng của các định luật tự nhiên mở rộng ra rất xa ngoài các phép tịnh tiến và phép quay. Chẳng hạn, các định luật không quan tâm đến chuyện chúng ta chuyển động nhanh chậm ra sao và theo hướng nào. Bạn có thể gặp thể hiện đơn giản nhất của thực tế đó tại một ga xe lửa. Đôi khi bạn khó có thể nói được xe lửa của bạn hay xe lửa ở đường ray bên cạnh là đang chuyển động. Hai người quan sát chuyển động với vận tốc không đổi (tức cả hướng và độ lớn không thay đổi) đều sẽ thấy tự nhiên tuân theo cùng một quy luật bất kể người này được bắn lên trời trên chiếc tên lửa vị lai với tốc độ bằng 99% tốc độ ánh sáng còn người kia lười nhác ngồi trên lưng một con rùa khổng lồ. Galileo và Newton cũng đã nhận ra đối xứng quan trọng đó giữa những người quan sát chuyển động với vận tốc không đổi, nhưng Einstein đã rất nhấn mạnh đối xứng này và cho nó một sự thay đổi bất ngờ trong thuyết tương đối hẹp của ông. Một phần của đối xứng này tương đối đơn giản. Câu hỏi “Khi nào New York đỗ ở chiếc xe lửa này?” nghe có vẻ siêu thực nhưng hoàn toàn hợp thức ngay cả trong vật lý Newton. Một người ngồi trong xe lửa sẽ thấy xe đứng yên còn tất cả các thứ khác bên ngoài đều chuyển động. Tuy nhiên, để phù hợp với kết quả thực nghiệm, Einstein đã phát biểu đối xứng này rằng tốc độ của ánh sáng luôn là như nhau, bất kể nguồn sáng hoặc người quan sát chuyển động như thế nào. Nói cách khác, ngoài đối xứng quy định rằng các định luật của vật lý (kể cả các định luật của điện từ và ánh sáng) đều là như nhau đối với mọi người quan sát chuyển động thẳng đều, Einstein còn thêm vào một đối xứng nữa: *tốc độ ánh sáng là như nhau đối với mọi người quan sát*.

Sự không đổi của vận tốc tuyệt đối của ánh sáng là một đặc điểm tiềm ẩn trong các phương trình Maxwell (lý thuyết điện từ), nhưng thoạt nhìn thì dường như cực kỳ trái với trực giác. Và thực tế, nó đã vượt quá khả năng nhận thức của lương tri về sự vận hành của vạn vật. Khi một người đang lái xe ném một quả táo về phía trước (thật may là không có nhiều người lái xe làm chuyện đó) thì vận tốc của quả táo đối với mặt đất bằng tổng vận tốc của xe và vận tốc của quả táo được ném đi. Cũng theo cách đó, bạn có thể chờ đợi rằng khi một chiếc xe không mui lao thẳng về phía chúng ta thì tốc độ ánh sáng phát ra từ đèn trước của nó mà ta đo được sẽ bằng tổng vận tốc ánh sáng từ đèn phát ra (khoảng 300 triệu m/s) và vận tốc của xe. Tuy nhiên, Einstein nói với chúng ta và có rất nhiều thực nghiệm xác nhận, rằng thực tế lại *không* phải như vậy. Ngay cả nếu xe chạy với tốc độ không thể tin nổi bằng 99,99% tốc độ ánh sáng đi nữa, thì tốc độ của ánh sáng đèn trước mà ta ghi được vẫn chỉ là 300 triệu m/s, tức là không thay đổi. Hơn nữa, điều này cũng vẫn đúng nếu chúng ta đo ánh sáng phát ra từ đèn hậu xe khi xe vụt qua ta với tốc độ gần tốc độ ánh sáng. Trước khi đi vào tìm hiểu những hệ quả của phát hiện quan trọng này, chúng ta hãy xét xem điều gì sẽ xảy ra nếu vận tốc của nguồn sáng được cộng (hoặc trừ đi) vận tốc của ánh sáng. Hình 87 vẽ hai đường băng cắt nhau trong một sân bay. Máy bay vừa hạ cánh chạy theo hướng nam với tốc độ lớn.

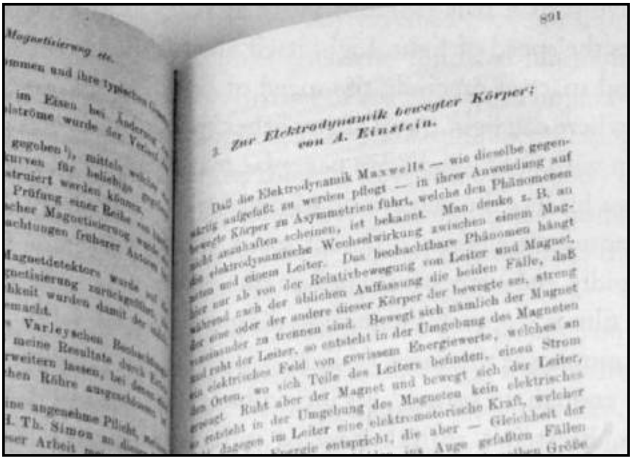
Khi nó sắp tới ngã tư, viên phi công nhận thấy một ô tô chở hàng cũng đi tới ngã tư từ phía tây. Viên phi công nhanh chóng lái máy bay chệch đi để tránh va chạm. Bây giờ giả sử rằng một người quan sát quan sát toàn bộ sự cố trên từ nhánh phía nam của ngã tư. Để hình dung rõ hơn, giả sử rằng máy bay hạ cánh chuyển động với tốc độ rất gần tốc độ ánh sáng. Nếu như vận tốc ánh sáng không phải là không đổi thì người quan sát sẽ thấy vận tốc ánh sáng phản xạ từ máy bay đi tới anh ta với vận tốc gần gấp hai lần vận tốc ánh sáng (bằng tổng vận tốc máy bay và vận tốc ánh sáng). Trái lại, ánh sáng phản xạ từ chiếc xe tải chạy chậm hơn đi đến người quan sát với vận tốc ánh sáng (vì nó phản xạ vuông góc với hướng chuyển động). Do đó, ánh sáng phản xạ từ máy bay sẽ tới người quan sát sớm hơn nhiều so với ánh sáng phản xạ từ xe tải. Người quan sát sẽ thấy máy bay đột nhiên quặt mạnh mà không có bất kỳ lý do rõ ràng nào. Sự không đổi của tốc độ ánh sáng đối với mọi người quan sát sẽ loại bỏ những nghịch lý kiểu như vậy, trong đó hậu quả lại xảy ra trước nguyên nhân.



Hình 87

Để đảm bảo sự đối xứng của các định luật vật lý đối với những người quan sát chuyển động đều, cũng như sự bất biến của tốc độ ánh sáng, thuyết tương đối hẹp đã phải trả giá. Einstein phát hiện ra rằng không gian và thời gian không thể được đối xử tách rời nhau nữa, mà chúng ràng buộc chặt chẽ với nhau bởi đối xứng. Bài báo gốc của Einstein về thuyết tương đối hẹp có một nhan đề khá khiêm nhường “Về điện động lực học của các vật chuyển động” (hình 88 chụp trang đầu của bài báo này), nhưng, như ví dụ sau sẽ chứng tỏ, nó đã làm thay đổi thực sự nhận thức của chúng ta về thực tại.

Hãy hình dung trong khoảng thời gian một vài năm bạn tiến hành quay video một quả táo đặt trên bàn khi nó nẫu dần và thối rữa. Cái mà cuốn phim (không mấy gay cấn) này ghi được đó là sự “chuyển động” của quả táo theo thời gian, đối ngược với chuyển động của nó qua không gian. Thời gian, theo thuyết tương đối hẹp, là chiều thứ tư thêm vào ba chiều không gian quen thuộc. Khi quả táo được ném với một tốc độ nào đó, nó cần phải đi qua tất cả bốn chiều, vì khi quả táo chuyển động qua không gian thì thời gian cũng tiến triển. Nhưng liệu quả táo có nẫu đi với tốc độ như quả táo đứng yên không? Câu trả lời bất ngờ của thuyết tương đối hẹp là không. Quả táo chuyển động qua không gian càng nhanh thì “đồng hồ” của nó


891

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.

Hình 88

sẽ tíc tắc càng chậm. Điều đó nghe ra hoàn toàn không thể tin nổi nếu như nó không được xác nhận một cách dứt khoát bởi rất nhiều thí nghiệm. Ví dụ, một hạt cơ bản có tên là *muon* thường được tạo ra ở tầng trên cùng của khí quyển do sự bắn phá của các hạt năng lượng cao trong cái gọi là các tia vũ trụ. Thực tế các hạt muon có thể đi qua hàng chục dặm để tới được mặt đất hoàn toàn là do sự làm chậm lại "đồng hồ" nội tại của chúng theo thuyết tương đối. Khi đứng yên, các muon chỉ sống được trong khoảng 2 phần triệu giây trước khi phân rã thành các hạt nhẹ hơn. Đối với những thời gian sống ngắn như vậy, cho dù có lao vun vút qua không gian với tốc độ ánh sáng thì thời gian bay trong khí quyển của chúng cũng chỉ lớn hơn 10 lần thời gian sống của chúng (khi không có những hiệu ứng tương đối tính). Các nhà nghiên cứu đã đo thời gian và đếm những muon như vậy ở giữa đỉnh và chân ngọn núi Washington ở New Hampshire vào năm 1941 đã xác nhận rằng các muon chuyển động sống lâu hơn, đúng như thuyết tương đối hẹp đã tiên đoán. Những thực nghiệm tiến hành năm 1975, trong đó các muon được gia tốc tới tốc độ bằng 99,94% tốc độ ánh sáng, đã chứng tỏ rằng những muon chuyển động nhanh như vậy sống lâu hơn 29 lần so với các muon đứng yên và lại một lần nữa hoàn toàn phù hợp với những tiên đoán của thuyết tương đối hẹp.

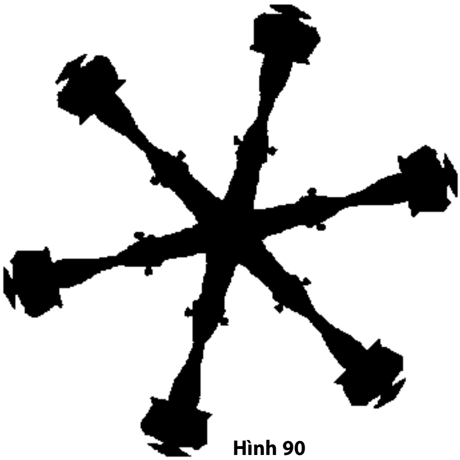
Nhưng, bạn có thể nghĩ, muon là một hạt cơ bản kỳ dị chứ đâu có phải là cái đồng hồ thông thường. Lẽ nào những chiếc đồng hồ đeo tay hay nhịp tim của chúng ta cũng sẽ chậm lại nếu chúng ta chuyển động với tốc độ gần tốc độ ánh sáng hay sao? Đúng thế, một thí nghiệm tiến hành năm 1971 đã sử dụng đồng hồ thực. Hai nhà vật lý Joseph Carl Hafele và Richard Keating đã bay vòng quanh địa cầu theo hai hướng ngược nhau trên các máy bay hành khách của hãng Pan Am. Họ đã mang theo bốn đồng hồ nguyên tử đã được đồng bộ trước khi bay với một đồng hồ đặt đứng yên ở Washington D.C. Vào cuối chuyến đi, các đồng hồ bay theo hướng đông (và do đó nhanh hơn sự quay của Trái Đất), đúng như chờ đợi, đã chỉ khoảng thời gian ngắn hơn 59 phần tỷ giây, trong khi đồng hồ bay theo hướng tây (do đó chuyển động chậm hơn đồng hồ ở D.C) ghi được khoảng thời gian dài hơn 273 phần tỷ giây.

Một trong những tiên đoán then chốt của thuyết tương đối hẹp là các vận tốc của một vật qua các chiều không gian và thời gian luôn tổ hợp để cho đúng vận tốc ánh sáng. Ví dụ, một muon đứng yên có "vận tốc" toàn bộ của nó chỉ theo hướng thời gian, khi nó chỉ "du hành" theo chiều thời gian. Đối với muon chuyển động, thành phần vận tốc của nó qua không gian càng lớn thì nó càng chậm "già", và thời gian của nó sẽ tiến tới dừng trôi (đối với người quan sát đứng yên) khi tốc độ của muon tiến gần tới vận tốc ánh sáng. Thuyết tương đối hẹp nói với chúng ta rằng không ở đâu ánh sáng có thể truyền với vận tốc khác và cũng không bao giờ đuổi kịp ánh sáng vì nó không bao giờ đứng yên cả. Theo nghĩa đó, cảm nhận ánh sáng có chút gì hao hao sự cảm nhận chuyển động trong điện ảnh. Mỗi một khuôn hình trên phim chụp một cảnh chỉ hơi khác, và khi những khuôn hình này lướt qua nhanh và liên tiếp trước mắt ta, ta sẽ nhìn thấy chuyển động. Khi phim dừng chuyển động cũng biến mất. Chúng ta chỉ có thể nhìn thấy ánh sáng khi nó chuyển động với vận tốc ánh sáng.

Có điều khá lạ lùng là mặc dù có một trực giác siêu việt và những nhận thức hết sức sâu sắc, nhưng thái độ ban đầu của Einstein đối với toán học thuần túy lại khá lãnh đạm. Hồi còn là sinh viên ở Zurich, việc thường xuyên vắng mặt trong các giờ lên lớp của nhà toán học Hermann Minkowski (1864-1909) đã mang lại cho ông biệt danh "con chó lười nhác". Thông qua sự xoay vần trớ trêu của lịch sử, sau khi Einstein đã công bố thuyết tương đối hẹp, thì người đã dùng đối xứng để xây dựng một cơ sở toán học vững chắc cho lý thuyết này không phải ai khác chính là Minkowski. Ông đã chứng minh rằng không gian và thời gian có thể "quay" như một thực thể bốn chiều hệt như quả cầu quay trong không gian ba chiều vậy. Quan trọng hơn, cũng giống quả cầu là đối xứng (tức là không thay đổi) đối với phép quay một góc nào đó quanh một trục bất kỳ đi qua tâm quả cầu, các phương trình Einstein trong thuyết tương đối hẹp cũng là đối xứng (hay nói theo thuật ngữ vật lý là *hiệp biến*) đối với các phép quay không thời gian đó. Tính chất đối xứng quan trọng này được gọi là *bất biến Lorentz*, theo tên nhà vật lý Hà Lan Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), người đã mô tả những phép biến đổi này vào năm 1904. Giờ thì chắc là bạn không còn quá ngạc nhiên nữa khi nghe nói rằng tập hợp tất cả các phép biến đổi đối xứng của không thời gian tạo nên một nhóm, tương tự như nhóm các phép quay thông thường và phép tịnh tiến trong không gian ba chiều. Nhóm này được gọi là *nhóm Poincaré*, theo tên nhà toán học xuất chúng người Pháp, người đã trau chuốt lại cơ sở toán học của thuyết tương đối. Thoạt tiên là ngờ vực ("từ khi các nhà toán học đột nhập vào thuyết tương đối, bản thân tôi cũng không hiểu được nó nữa"), nhưng rồi Einstein chậm rãi nắm bắt được cái sức mạnh không tưởng tượng nổi của đối xứng. Nếu các định luật của tự nhiên vẫn còn không thay đổi đối với những người quan sát chuyển động thì không chỉ các phương trình mô tả *các định luật này phải tuân theo bất biến Lorentz, mà bản thân các định luật có thể thực sự được rút ra từ đòi hỏi phải có đối xứng đó*. Nhận thức sâu sắc đó thực sự đã làm đảo ngược quá trình logic mà Einstein (và nhiều nhà vật lý sau ông) đã dùng để phát biểu các định luật của tự nhiên. Thay vì xuất phát từ một tập hợp lớn các thực kiện quan sát và thực nghiệm về tự nhiên, phát biểu nên một lý thuyết rồi sau đó kiểm tra xem lý thuyết ấy có tuân theo một số nguyên lý đối xứng hay không, Einstein đã ý thức được rằng những đòi hỏi đối xứng có thể xuất hiện đầu tiên và quy định các định luật của tự nhiên phải tuân theo. Bây giờ tôi sẽ minh họa sự đảo ngược đầu vào – đầu ra (*input-output*) đó bằng cách dùng một số ví dụ tương tự đơn giản.

Giả sử bạn chưa bao giờ nhìn thấy bông tuyết, nhưng bạn được yêu cầu hãy phỏng đoán hình dạng của nó. Tất nhiên bạn không thể bắt đầu mà không có một thông tin nào. Ngay cả bức hình một cánh của nó (hình 89) cũng chẳng giúp được là bao, chả khác gì bạn không thể phỏng đoán gì về con voi nếu chỉ biết cái đuôi của nó. Tuy nhiên, bây giờ bạn được cho thêm một số thực kiện phụ, cụ thể là hình dạng chung của bông tuyết là đối xứng đối với phép quay 60 độ xung quanh trục đi qua tâm của nó. Chỉ dẫn này ngay

Hình 89



Hình 90

lập tức giới hạn các khả năng về chỉ còn các bông tuyết hình sáu đỉnh, mười hai đỉnh, mười tám đỉnh và v.v... Vì tự nhiên thường ưa giải pháp đơn giản nhất và tiết kiệm nhất nên bông tuyết sáu đỉnh (như trên hình 90) là một phỏng đoán tuyệt vời. Đối xứng áp đặt những ràng buộc cứng đến mức lý thuyết được nó dẫn dắt gần như chắc chắn dẫn tới chân lý.

Để lấy một ví dụ hơi phức tạp hơn một chút, bạn hãy tưởng tượng rằng các nhà sinh học ở một hệ mặt trời xa xôi nghiên cứu cấu trúc "ADN" của mọi dạng sống trên hành tinh của họ. Sau nhiều năm làm việc, họ đã phát hiện ra rằng sự sống luôn luôn dựa trên những sợi "ADN" rất dài xuất hiện dưới dạng bảy cấu hình khác nhau như trên hình 91. Một sự khảo sát kỹ lưỡng các "bản thiết kế" kiểu sợi khác nhau này phát lộ ra rằng mỗi một cấu hình đó đều có thể nhận được từ một phép đối xứng hoặc một tổ hợp các phép đối xứng trên ký hiệu cơ sở là *b*. Ví dụ, sợi thứ nhất chỉ liên quan tới đối xứng tịnh tiến – motif của nó đơn giản là được dịch đi một cách lặp lại. Sợi thứ hai biểu diễn phép *phản xạ trượt* mà chắc bạn còn nhớ (Chương 1) nó liên quan tới các ảnh gương được tịnh tiến đối với nhau. Dây thứ tư nhận được bằng phép tịnh tiến và phản xạ qua một gương nằm ngang. Hình mẫu của "ADN" thứ sáu có thể nhận được theo một vài cách khác nhau – chẳng hạn, thông qua phép tịnh tiến liên tiếp bốn ký hiệu hoặc qua các phép phản xạ trượt liên tiếp của cặp các ký hiệu phản xạ. Với ý định phát biểu các phát hiện của mình theo ngôn ngữ của một "định luật", những nhà sinh học ngoài Trái đất có thể kết luận rằng tất cả các sợi ADN đều được sắp xếp theo các hình mẫu là đối xứng đối với tổ hợp các phép tịnh tiến, quay, phản xạ và phản xạ trượt. Tuy nhiên, giả sử rằng các nhà sinh học đó đã có một trực giác mạnh (có thể sau khi họ đã phát hiện ra

(i)	b b b b b b b b b b b ...
(ii)	b p b p b p b p b p b ...
(iii)	b d b d b d b d b d b ...
(iv)	b b b b b b b b b b b ... p p p p p p p p p p p
(v)	b q b q b q b q b q b ...
(vi)	b q p d b q p d b q p ...
(vii)	b d b d b d b d b d b ... p q p q p q p q p q p

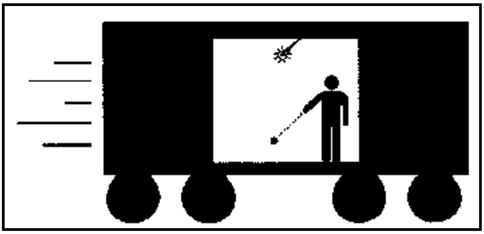
Hình 91

một vài sợi) gợi ý rằng các sợi ADN phải tuân theo một số đối xứng. Sau đó, họ có thể tiếp cận bài toán từ đầu ngược lại và đòi hỏi ngay từ đầu rằng các sợi ADN là đối xứng. Tất nhiên là không có cách nào để đoán được motif cơ bản – nó có thể nhìn giống *b*, giống một ngôi sao hay giống con vịt AFLAC. Song, một khi motif đã được phát hiện, người ta có thể dùng lý thuyết nhóm để chứng minh rằng chỉ có bảy hình mẫu dạng sợi khác nhau và những hình mẫu này có thể tạo thành bằng cách sử dụng bốn phép đối xứng trên. Tất cả những hình mẫu khác đơn giản là những biến tấu trên bảy chủ đề khác nhau đó. Nói cách khác, đòi hỏi đối xứng trong trường hợp này đã quy định một cách minh bạch số các hình mẫu hoa văn phải tồn tại. Nhà toán học ở Princeton John Horton Conway đã đặt cho bảy loại hình mẫu kiểu sợi này những cái tên rất tếu. Những cái tên này tương ứng với các bước chân khi mỗi hành động này được lặp lại: nhảy lò cò (*hop*), bước (*step*), nhảy (*jump*), bước len lén (*sidle*), nhảy lò cò quay (*spinning hop*), bước len lén quay (*spinning sidle*), nhảy quay (*spinning jump*).

Những đối xứng của các định luật vật lý đối với các phép tịnh tiến, quay và chuyển động đều (kể cả tính bất biến của tốc độ ánh sáng) là tuyệt đối căn bản đối với sự tìm hiểu không gian và thời gian của chúng ta, nhưng tự chúng không áp đặt sự tồn tại của các lực mới hay các hạt mới. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy ngay dưới đây, những nỗ lực nhằm hiểu được lực hấp dẫn và để thống nhất tất cả các lực cơ bản của tự nhiên đã nâng tầm quan trọng của các nguyên lý đối xứng tới một tầm cao hơn nữa – đối xứng đã trở thành *nguồn* của lực.

MỘT ĐỐI XỨNG NẶNG KÝ

Sự rực rỡ của thuyết tương đối hẹp đã mở rộng chân trời đối xứng của các định luật vật lý tới tất cả những người quan sát đang chuyển động đều. Nhưng, bạn có thể thắc mắc, thế còn những người quan sát đang chuyển động có gia tốc thì sao? Nhìn chung, đa số những chuyển động mà chúng ta quan sát thấy hằng ngày đều không phải là đều – chúng thường bắt đầu từ trạng thái đứng yên này tới trạng thái đứng yên khác hoặc có liên quan tới sự lệch, cong và quay. Nếu, chẳng hạn, các định luật điện từ mất tác dụng, hoặc ngay cả thay đổi một cách đáng kể trong một tên lửa được phóng lên từ bệ phóng thì chúng ta không thể đưa các nhà du hành vũ trụ lên không gian được. Einstein chưa sẵn sàng để chấp nhận điều đó như một sự lựa chọn. Thực vậy, tại sao các định luật lại phải phụ thuộc vào chuyện những người quan sát chuyển động như thế nào? Hơn nữa, chuyển động có gia tốc có mặt ở khắp nơi – từ chuyển động của các hành tinh xung quanh Mặt Trời đến người chạy nước rút trên đường đua – nên một lý thuyết mà không bàn tới gia tốc sẽ là chưa đầy đủ. Một thiếu sót khác của thuyết tương đối hẹp là thực tế rằng lý thuyết này đã hoàn toàn không đếm xỉa gì đến lực hấp dẫn. Nhưng hấp dẫn hiện diện ở khắp nơi và không giống như các hiện tượng điện từ mà các lực của nó chúng ta có thể che chắn được, chúng ta không có cách nào tránh được vòng xiết của lực hấp dẫn cả. Do đó, một trong những mục tiêu của Einstein là phải mở rộng tầm với của đối xứng thậm chí còn ra xa hơn nữa. Đặc biệt, ông cảm thấy rằng các định luật của tự nhiên phải nhìn chính xác như nhau không chỉ đối với những người quan sát chuyển động với vận tốc không đổi mà là đối với mọi người quan sát bất kể trong một phòng thí nghiệm chuyển động có gia tốc trên một đường thẳng hay quay trên một sàn quay ở công viên hay chuyển động theo bất cứ cách nào. Cũng như các nhà sinh học hư cấu trong ví dụ ở mục trước có thể xuất phát ngay từ các nguyên lý đối xứng rồi sau mới từ đó rút ra bảy hình mẫu kiểu sợi khả dĩ, Einstein cũng muốn đặt đối xứng lên trước hết. Lấy cảm hứng từ bất biến Lorentz trong thuyết tương đối hẹp (cụ thể là các phương trình không thay đổi đối với các phép quay không-thời gian), ông đòi hỏi sự bất biến tổng quát, ngụ ý là một đối xứng của các định luật tự nhiên – bất kể là định luật nào - đối với mọi thay đổi trong các tọa độ của không gian và thời gian. Đó không phải là một đòi hỏi tầm thường. Xét cho cùng, chỉ riêng ở Mỹ khoảng một triệu người bị chấn thương cổ mỗi năm cũng chứng tỏ con người thường xuyên phải chịu những gia tốc đột ngột đến mức nào. Mỗi lần quanh gấp xe, chúng ta đều cảm thấy thân thể chúng ta bị đẩy về một phía do lực ly tâm và máy bay khi thụt xuống "ổ gà" cũng làm cho chúng ta nôn nao. Về bề ngoài dường như có sự phân biệt không thể nhầm lẫn giữa chuyển động đều và chuyển động có gia tốc. Khi đi xe lửa hoặc thang máy chuyển động với vận tốc không đổi bạn sẽ không cảm thấy chuyển động. Quan điểm của bạn - cho rằng bạn là đứng yên còn mọi thứ xung quanh bạn đều chuyển động – cũng hoàn toàn hợp thức như quan điểm của người tiễn đưa đứng vẫy tay trên sân ga. Trái lại, khi mông của nhà du hành bị ấn mạnh xuống trong lúc phóng, người đó cảm giác được ngay sự gia tốc. Vậy thì làm sao các định luật vật lý lại có thể là như nhau ngay cả trong các hệ quy chiếu có gia tốc? Thế còn về các lực phụ đó thì sao? Lời giải cuối cùng cho câu đố này chính là thành tựu đầy vinh quang của Einstein mà ông đã mất nhiều năm để hoài thai. Chúng ta hãy thử theo dõi dòng suy nghĩ của ông khi ông tìm cách xác lập đối xứng như là nguồn gốc của các định luật trong vật lý.



Hình 92

Hãy hình dung tình hình trong một toa xe chuyển động có gia tốc (hình 92). Nếu toa xe chuyển động có gia tốc không đổi sang bên phải, thì từ kinh nghiệm hằng ngày chúng ta biết rằng mọi thứ sẽ bị đẩy về phía sau (tức là về bên trái trên hình vẽ). Bóng đèn treo trên trần, chẳng hạn, sẽ bị lệch so với phương thẳng đứng. Mọi vật thả xuống sàn sẽ rơi lệch đi một góc và mọi người ngồi trên ghế mặt hướng về phía trước đều cảm thấy áp lực của ghế ở phía dưới và từ lưng ghế. Điều này thực ra không có gì khó hiểu. Nếu người đứng trong toa đánh rơi chìa khóa, thì tốc độ theo phương ngang của nó là không đổi (bỏ qua thay đổi nhỏ do sức cản không khí) và bằng tốc độ của chìa khóa ở thời điểm nó rơi. Nhưng trong lúc đó, bản thân toa xe liên tục gia tốc tới những tốc độ mỗi lúc một cao. Do đó, chiếc chìa khóa bị bỏ lại phía sau, kết quả là đường đi của nó nghiêng về phía sau. Tuy nhiên, ở đây đã xuất hiện một nhận thức quan trọng. Trải nghiệm của người trong toa xe chuyển động có gia tốc không khác gì trải nghiệm của người đó nếu như lực hấp dẫn trở nên mạnh hơn và nghiêng đi chứ không hướng thẳng xuống đất như bình thường. Nói một cách khác, lực hấp dẫn tạo ra những hiện tượng giống hệt như các hiện tượng quan sát được trong chuyển động có gia tốc.

Hãy xét một tình huống khác. Khi bạn đứng trên chiếc cân sức khỏe trong một thang máy đang gia tốc đi lên, thì cân sẽ chỉ trọng lượng của bạn lớn hơn (vì chân bạn tác dụng một áp lực lên cân lớn hơn) – cứ như là lực hấp dẫn mạnh lên vậy. Còn khi thang máy gia tốc đi xuống thì người đó có cảm giác như lực hấp dẫn yếu đi. Trong trường hợp cực hạn, khi dây treo thang máy đứt, bạn và cái cân sẽ rơi tự do cùng nhau và cân sẽ chỉ trọng lượng của bạn bằng 0. (Đây không phải là biện pháp làm giảm cân cần khuyến dụ, bạn hãy thử nghĩ xem cân sẽ chỉ bao nhiêu khi thang máy cuối cùng cũng chạm đáy!). Các nhà du hành vũ trụ trôi nổi "không trọng lượng" bên trong các trạm không gian không phải vì họ ở ngoài tầm tác dụng của lực hấp dẫn của Trái Đất mà bởi vì cả trạm và các nhà du hành đều chịu cùng một gia tốc hướng về tâm Trái Đất – cả hai đều đang rơi tự do.

Trong khi suy ngẫm về các thí nghiệm tưởng tượng thuộc loại này, vào năm 1907, cuối cùng Einstein đã đi tới kết luận: *Lực hấp dẫn và lực tạo ra từ gia tốc thực tế chỉ là một*. Sự thống nhất mạnh mẽ này có tên là *nguyên lý tương đương* – gia tốc và hấp dẫn là hai mặt của cùng một lực; chúng là tương đương nhau. Bên trong một thang máy rơi, không thể nói bạn không trọng lượng là do thang máy gia tốc hướng xuống dưới hay do một phép thần nào đó làm cho lực hấp dẫn biến mất. Einstein đã mô tả giây phút ngộ ra chân lý đó vào năm 1907 trong một bài giảng của ông ở Kyoto năm 1922: "Tôi đang ngồi ở Văn phòng cấp bằng sáng chế phát minh ở Bern [Thụy Sĩ] thì hoàn toàn bất ngờ một ý nghĩ lóe lên trong đầu tôi: Nếu như một người rơi tự do anh ta sẽ không cảm thấy trọng lượng của mình nữa. Tôi rất sững sờ. Ý nghĩ đơn giản ấy đã gây ấn tượng sâu sắc đối với tôi. Và nó đã thúc đẩy tôi đi tới lý thuyết của hấp dẫn". Các phòng thí nghiệm y khoa ở mọi thời đại đã biết lợi dụng nguyên lý tương đương này. Họ đã dùng các máy ly tâm để quay nhanh các chất lỏng nhằm tách các chất có khối lượng riêng khác nhau. Máy ly tâm chính là các máy hấp dẫn nhân tạo. Gia tốc của chuyển động quay là tương đương với lực hấp dẫn tăng.

Phát biểu một đối xứng bao trùm kèm theo với nguyên lý tương đương – các định luật của vật lý được biểu diễn bằng các phương trình Einstein của thuyết tương đối rộng là chính xác như nhau trong *mọi* hệ quy chiếu, kể cả các hệ có gia tốc. Tức là các định luật là đối xứng đối với mọi thay đổi của các tọa độ không-thời gian. Nếu vậy thì tại sao lại có sự khác biệt biểu kiến giữa cái được quan sát, chẳng hạn, trên một sàn quay và trong một phòng thí nghiệm đứng yên? Theo thuyết tương đối rộng thì đó là những khác biệt về *môi trường* chứ không phải về bản thân các định luật. Cũng tương tự như vậy, lên trên và xuống dưới dường như là khác nhau trên Trái Đất (mặc dù các định luật là đối xứng đối với phép quay) do có lực hấp dẫn của Trái Đất, những người quan sát trên sàn quay cảm thấy lực ly tâm và lực này như đã nói trên là tương đương với lực hấp dẫn. Nói cách khác, đối xứng giữa tất cả các hệ quy chiếu, kể cả các hệ có gia tốc, *buộc phải* có sự tồn tại của hấp dẫn. Như các ví dụ về toa xe và thang máy chuyển động có gia tốc cho thấy, các định luật vật lý trong một hệ quy chiếu có gia tốc là không thể phân biệt được với các định luật trong hệ quy chiếu có hấp dẫn.

Được trang bị những nhận thức sâu sắc do nguyên lý tương đương mang lại, Einstein cảm thấy rằng cuối cùng ông đã sẵn sàng tấn công vào hai vấn đề thú vị nhất mà lý thuyết hấp dẫn của Newton hoàn toàn không trả lời được. Đầu tiên và trước hết là câu hỏi "làm sao" đáng giá ngàn vàng: Làm sao mà hấp dẫn thực hiện được những trò ranh ma của nó? Hay nói một cách khác, làm thế nào mà Mặt Trời ở cách Trái Đất hàng trăm triệu dặm lại có thể tác dụng một lực hút không cách gì tránh khỏi để giữ cho Trái Đất ở trên quỹ đạo của nó?

Newton hoàn toàn ý thức được thực tế đó, cái thực tế mà ông đã không trả lời được.

> Cho đến bây giờ chúng tôi đã giải thích được các hiện tượng trên trời cũng như dưới biển bằng sức mạnh của lực hấp dẫn, nhưng chúng ta còn chưa tìm được nguyên nhân của sức mạnh đó [tác giả nhấn mạnh]. Chắc hẳn nó phải diễn tiến từ một nguyên nhân thâm nhập sâu tới tận tâm của Mặt Trời và các hành tinh mà không mảy may suy giảm hiệu lực của nó... và truyền theo mọi phía tới những khoảng cách khổng lồ với cường độ giảm tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách... Nhưng cho đến nay, từ các hiện tượng, tôi không thể phát hiện ra nguyên nhân của những tính chất đó của hấp dẫn, mà tôi thì không thích bịa ra các giả thuyết.

Thứ hai là có sự xung đột rất phiền toái giữa thuyết tương đối hẹp và khái niệm hấp dẫn của Newton. Trong khi thuyết tương đối phát biểu dứt khoát rằng không có khối lượng, năng lượng và thông tin thuộc bất cứ loại nào có thể truyền nhanh hơn ánh sáng, thì Newton lại coi hấp dẫn tác dụng lực của nó một cách tức thời qua những khoảng cực kỳ rộng lớn của không gian. Một lực hấp dẫn "siêu tốc" như vậy có thể mở toang cửa cho những hiện tượng thực sự bí ẩn và không mong muốn. Ví dụ, nếu Mặt Trời đột ngột biến mất thì tất cả các hành tinh trong hệ Mặt Trời sẽ ngay lập tức chuyển động dọc theo các đường thẳng, vì lực giữ chúng trên quỹ đạo elip đã không còn nữa. Tuy nhiên, phải mất cỡ 8 phút sau, Mặt Trời mới thực sự biến khỏi mắt của mọi người trên Trái Đất, vì ánh sáng truyền từ Mặt Trời đến Trái Đất phải mất chừng ấy thời gian. Nếu như có người sống trên Hải Vương tinh thì họ sẽ bắt đầu cuộc chu du trong không gian lạnh lẽo bốn giờ trước khi họ thấy Mặt Trời biến mất. Một sự đảo ngược nguyên nhân và hậu quả như thế sẽ biến sự nhận thức thực tại của chúng ta thành một cơn ác mộng không sao hiểu được. Là người có niềm tin vững chắc cả vào thuyết tương đối hẹp lẫn nguyên lý tương đương, Einstein ý thức được rằng đã đến lúc phải xem lại một cách toàn bộ lý thuyết hấp dẫn của Newton.

Những gợi ý đầu tiên về khả năng uốn cong của không-thời gian nảy ra trong đầu Einstein từ một thí nghiệm tưởng tượng rất hấp dẫn khác. Về gốc gác, thí nghiệm này là do nhà vật lý Paul Ehrenfest (1880-1933) đề xuất và sau này được gọi là *nghịch lý Ehrenfest*. Một trong những kết quả quen thuộc của thuyết tương đối hẹp là chiều dài của các vật chuyển động, khi được đo bởi người quan sát đứng yên, bị co lại theo hướng chuyển động của vật. Sự co lại càng nhiều nếu vật chuyển động càng nhanh. Đó không phải là một ảo giác – một thanh chuyển động có thể tức thời nằm trọn trong một vùng không gian mà khi đứng yên thanh đó không thể. Giờ ta hãy xét xem điều gì sẽ xảy ra đối với một vật dẹt, như một đĩa CD, nếu như nó quay rất nhanh. Vì chu vi của đĩa quay nhanh hơn vùng bên trong nên nó sẽ co lại nhiều hơn. Kết quả là hình dạng của đĩa bị biến dạng và bị uốn cong. Và Einstein đã chộp lấy ngay ý tưởng đó, tức là ý tưởng cho rằng gia tốc là nguồn gốc của sự uốn cong. Ông đã đi đến kết luận rằng gia tốc sẽ uốn cong chính cấu trúc của không-thời gian. Và theo nguyên lý tương đương, nếu gia tốc làm cho không gian bị uốn cong thì hấp dẫn cũng làm được như thế. Điều này đã trở thành điểm cốt lõi thuyết tương đối rộng – *hấp* *dẫn làm uốn cong không-thời gian* – theo đúng như cách các nghệ sĩ nhào lộn trong rạp xiếc làm cong lưới bảo hiểm khi họ rơi xuống. Cũng như các đối tượng càng nặng càng làm cho tấm lưới cong rõ rệt hơn, khối lượng của vật càng lớn thì không-thời gian ở lân cận nó càng cong mạnh hơn. Đường đi của một chiếc xe Jeep vượt qua những đụn cát trên sa mạc Sahara được quyết định bởi hình dạng của địa hình lượn sóng ở đó. Tương tự, đường đi của các hành tinh xung quanh Mặt Trời là hệ quả của độ cong mà Mặt Trời tạo ra trong không-thời gian. Các hành tinh đơn giản là tìm con đường đi trực tiếp nhất và hình dạng các quỹ đạo của chúng bộc lộ hình học cong của không-thời gian. Trong khuôn khổ của không-thời gian bị uốn cong, ảnh hưởng của hấp dẫn chắc chắn không còn là tức thời nữa. Einstein đã tính được rằng các nhiễu động về hình dạng của không-thời gian sẽ truyền như các sóng nước trên mặt hồ, với tốc độ đúng bằng tốc độ ánh sáng. Nếu do một phép thần nào đó mà Mặt Trời đột ngột biến mất, thì sự biến mất ảnh hưởng hấp dẫn của nó sẽ đến được Trái Đất sau 8 phút – đồng thời với sự biến mất hình ảnh thị giác của nó. Kết quả hài lòng này đã loại bỏ vấn đề nhức nhối cuối cùng trong vật lý Newton.

Việc Einstein biến không-thời gian bị uốn cong thành hòn đá tảng trong lý thuyết mới về vũ trụ của ông đã tạo ra nhu cầu cần có những công cụ toán học để mô tả những không gian như vậy. Những giờ toán mà ông đã vắng mặt hồi còn đi học đã quay trở lại ám ảnh ông. Thật may mắn thay, một người trước kia luôn hoài nghi về toán học đã có một người để nhờ cậy, đó là Marcel Grossman (1878-1936), một người bạn học cũ của Einstein đồng thời cũng là một nhà toán học tài giỏi. Với một giọng tuyệt vọng vốn không phải là tính cách của mình, Einstein đã tỏ ra hối hận: "Bây giờ mình mới thấm thía sự vĩ đại của toán học, mà những phần tinh tế nhất của nó trước kia mình đã coi là những thứ hoàn toàn xa xỉ". Và người bạn luôn trung thành Grossman đã không phụ lòng tin cậy. Ông đã chỉ cho Einstein cả hình học phi Euclid của Riemann lẫn những phương pháp toán học đã được phát triển bởi Elwin Christoffel, Gregorio Ricci-Curbastro, và Tullio Levi-Civita. Nên nhớ rằng Riemann thực tế đã "dự báo" chính xác bộ máy toán học mà Einstein cần, đó là hình học các không gian cong với số chiều tùy ý. Việc đưa giải tích toán vào hình học thông qua một ngành có tên là *hình học vi phân* và sự phát triển của giải tích tensor sau đó đã cho phép thực hiện những tính toán chính xác (tensor là "những hộp các con số" có thể biểu diễn không gian với số chiều bất kỳ). Sau gần chục năm, vào những năm 1912-1915, Einstein đã quyết định đi theo ánh sáng dẫn đường chính của ông đó là đối xứng của mọi hệ quy chiếu ngụ ý bởi nguyên lý bất biến tổng quát. Và trực giác của ông đã mang lại kết quả. Cuối năm 1915, thuyết tương đối rộng, một lý thuyết bao trùm không-thời gian và hấp dẫn đã ra đời (hình 93 chụp trang đầu của bài báo). Trong một bức thư gửi cho nhà vật lý lý thuyết Arnold Sommerfeld, Einstein không giấu nổi niềm hân hoan của mình: "Chắc rằng ông sẽ xem xét kỹ chúng [các phương trình của thuyết tương đối rộng]; chúng là những phát minh giá trị nhất của cuộc đời tôi".


Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie

von

A. Einstein

Leipzig :: Verlag von Johann Ambrosius Barth :: 1916

Hình 93

Einstein là người đầu tiên đã thừa nhận món nợ của ông đối với toán học. Trong một bài phát biểu trước Viện Hàn lâm Khoa học Phổ năm 1921 ông tuyên bố: “Thực tế chúng ta có thể coi [hình học] như một nhánh cổ xưa nhất của vật lý... Không có nó tôi sẽ chẳng bao giờ có thể xây dựng được thuyết tương đối rộng”. Trong một bài giảng năm 1933, ông nói thêm: “Nguyên lý sáng tạo [của khoa học] trú ngụ trong toán học”.

Ngay từ ngày xuất hiện đầu tiên của mình, đối xứng ẩn dưới nó và sự đơn giản về mặt logic của thuyết tương đối rộng đã thu hút được nhiều người hâm mộ, trong đó có cả những nhà vật lý vĩ đại nhất của thời đó. Ernest Rutherford (người đã phát minh ra hạt nhân nguyên tử) và Max Born (một người tiên phong của vật lý lượng tử) sau này đã so sánh lý thuyết này với một tác phẩm nghệ thuật.

Một trong những tiên đoán then chốt của thuyết tương đối rộng là sự uốn cong của tia sáng dưới tác dụng của hấp dẫn. Đặc biệt, Einstein đã tiên đoán Mặt Trời làm cong các tia sáng tới từ những ngôi sao xa nằm ở ngay phía sau nó. Do ánh sáng từ Mặt Trời hoàn toàn lấn át ánh sáng tới từ các ngôi sao này, nên quan sát phải được tiến hành vào thời gian nhật thực toàn phần, khi mà Mặt Trăng chặn hết ánh sáng tới từ Mặt Trời. Ý tưởng này là cơ sở cho một thực nghiệm đơn giản: Bằng cách so sánh bức ảnh chụp trong thời gian nhật thực toàn phần với bức ảnh cũng chụp vùng đó của bầu trời nhưng khi ánh sáng của ngôi sao không bị lệch, người ta có thể đo được độ dịch biểu kiến nhỏ đối với vị trí của các ngôi sao đó do sự uốn cong của tia sáng.

Những quan sát do hai nhóm người Anh thực hiện vào thời gian nhật thực toàn phần ngày 29 tháng 5 năm 1919, nhưng chỉ đến ngày 22 tháng 9, Einstein mới nhận được kết quả khẳng định tiên đoán đó. Một trong hai nhóm trên do nhà vật lý thiên văn nổi tiếng người Anh Arthur Eddington (1882-1944) đứng đầu đã tìm ra độ lệch trung bình của tia sáng là 1,79 giây cung, phù hợp tuyệt vời (trong phạm vi sai số của thí nghiệm) với tiên đoán của thuyết tương đối rộng. Vô cùng phấn khởi, Einstein đã vội vã báo tin vui cho mẹ ông. Sự khẳng định tính đúng đắn của thuyết tương đối đã được thông báo chính thức trong một hội nghị liên tịch của Hội Hoàng gia và Hội Thiên văn Hoàng gia ở London ngày 6 tháng 11 năm 1919 và được tuyên bố hoàn toàn đúng đắn rằng đó là “một trong những thành tựu vĩ đại nhất trong lịch sử tư tưởng của nhân loại”. Ngày hôm sau, toàn thế giới đã thức dậy với một tin nóng sốt về “một cuộc Cách mạng trong khoa học” (hình 94 chụp bài báo đăng trên tờ *Times* ở London ngày 7 tháng 11 năm 1919), và Einstein ngay lập tức được đẩy lên địa vị bất ngờ của một ngôi sao truyền thông. Không phải mọi người đều hiểu được đầy đủ mọi hàm ý của lý thuyết mới. Theo một giai thoại phổ biến thì một phóng viên có hỏi Eddington rằng có đúng là thuyết tương đối rộng phức tạp tới mức trừ Einstein ra thì trên thế giới chỉ có hai người nữa thực sự là hiểu được nó. Eddington

THE TIMES, FRIDAY, NOVEMBER 7, 1919.

DEARER MONEY.
RISE IN BANK RATE.
CAUSES AND EFFECTS.

LABOUR DISPUTES COURTS.
SECOND READING OF THE BILL.
COMPULSION CLAUSES DROPPED.
(By a Student of Politics.)

COAL OUTPUT AND PRICE.
MINERS TO MEET MINISTERS.
SCOPE OF THE INQUIRY.
(By Our Parliamentary Correspondent.)

REVOLUTION IN SCIENCE.
NEW THEORY OF THE UNIVERSE.
NEWTONIAN IDEAS OVERTHROWN.

Hình 94

ngồi lặng ít phút còn tay phóng viên thì khích lệ ông không nên quá khiêm tốn, và cuối cùng Eddington trả lời: "Không hoàn toàn là như vậy, tôi đang cố hình dung xem ai là người thứ hai đây".

Ngay cả ngày hôm nay tôi vẫn còn e sợ chuỗi kỳ diệu các ý tưởng và các mối liên hệ lẫn nhau sau đây. Được dẫn dắt xuyên suốt bởi nguyên lý đối xứng, Einstein trước hết đã chứng minh được rằng gia tốc và hấp dẫn thực sự là hai mặt của một đồng xu. Sau đó ông đã mở rộng khái niệm này để chứng minh rằng hấp dẫn đơn giản là phản ánh hình học của không-thời gian. Những công cụ mà ông đã dùng để phát triển lý thuyết là hình học phi Euclid của Riemann, và cũng chính là những hình học mà Felix Klein đã dùng để chứng minh rằng hình học thực tế là sự biểu hiện của lý thuyết nhóm (vì mỗi hình học được định nghĩa bởi nhóm đối xứng của nó). Lẽ nào điều đó không đáng kinh ngạc sao?

Nên nhớ rằng Galois còn khá mù mờ về những ứng dụng tiềm tàng những ý tưởng về lý thuyết nhóm của ông. Sức mạnh tổ hợp trí tưởng tượng của các nhà toán học như Klein, Lie, Riemann, Minkowski, Poincaré và Hilbert đã "hợp lực" với trực giác vô song của Einstein để biến đối xứng và lý thuyết nhóm thành những công cụ cơ bản nhất để mô tả không-thời gian và hấp dẫn.

ĐI VÀO THẾ GIỚI LƯỢNG TỬ

Đối xứng thật quan trọng đối với các định luật mô tả không-thời gian và hấp dẫn, nhưng tầm quan trọng của chúng còn được khuếch đại lên hơn nữa trong thế giới của các hạt nội nguyên tử. Không giống như vật lý cổ điển, nơi mà từ *hạt* thường gắn với hình ảnh một viên bi-a nhỏ xíu, còn trong lý thuyết lượng tử - một khuôn khổ lý thuyết được dùng trong vật lý hạt – thì các hạt có thể xử sự như các sóng. Trạng thái của một hệ và sự tiến triển theo thời gian của nó được mô tả bởi một thực thể gọi là *hàm sóng*. Hàm sóng của electron là một sóng xác suất, được dùng, chẳng hạn, để xác định xác suất tìm thấy electron tại một vị trí nào đấy với một hướng cụ thể của spin. Vì tất cả các electron trong vũ trụ là đồng nhất, nên cách duy nhất để phân biệt chúng với nhau là theo năng lượng, động lượng (bằng tích của khối lượng với vận tốc), và spin. Trong cơ học lượng tử, các đại lượng cơ bản này được xác định bởi đáp ứng của hàm sóng đối với các phép biến đổi đối xứng khác nhau trong không gian và thời gian. Ví dụ, năng lượng phản ánh sự thay đổi trong hàm sóng được tạo ra do dịch chuyển tọa độ thời gian (tương đương với sự đặt lại giờ của đồng hồ). Tôi xin phép được giải thích một cách ngắn gọn khái niệm này. Hãy hình dung hai người thợ ảnh chụp hình một sóng tròn truyền từ điểm mà hòn sỏi ném xuống chạm mặt nước hồ. Các đèn chớp trên hai máy ảnh được đặt trước sẽ bật sáng đúng 8h00. Tuy nhiên, đồng hồ điều khiển đèn chớp của một trong hai máy ảnh lại chạy sớm một giây. Điều đó có nghĩa là mặc dù hai máy ảnh ghi hình cùng một sóng, nhưng ở các pha hơi khác nhau. Chỗ mà một bức ảnh ghi là một đỉnh sóng thì ở bức ảnh kia lại là một hõm sóng và ngược lại. Cơ học lượng tử xác định năng lượng của một hệ, ví dụ như một electron, thông qua sự thay đổi về pha của hàm sóng (được đo theo chu kỳ sóng) do sự đặt lại giờ của đồng hồ là 1 giây. Tương tự, động lượng của electron đặc trưng cho sự thay đổi về pha của hàm sóng đối với một dịch chuyển nhỏ theo không gian. Mặc dù các định nghĩa này liên hệ những tính chất vật lý cơ bản với các phép biến đổi đối xứng nhưng chắc hẳn là nghe có vẻ quá ư trừu tượng. Bất kỳ ai đã từng học vật lý ở trường phổ thông đều có thể nhớ rằng các đại lượng như năng lượng và động lượng thường gắn với một khái niệm khác, đó là *các định luật bảo toàn*. Các định luật này phản ánh một thực tế là một số đại lượng không thể sinh ra mà cũng không thể mất đi – chúng luôn có cùng một giá trị bất kể là chúng ta đo nó hôm nay, ngày mai hay một triệu năm nữa. Sự bảo toàn năng lượng là một tương đương vật lý của thành ngữ "không có gì không phải trả giá". Nếu chúng ta nhận được năng lượng từ hư vô thì chúng ta sẽ không phải trả thêm tiền bơm xăng mỗi khi sản xuất xăng bị suy giảm. Bảo toàn động lượng cũng rất quen thuộc đối với những ai đã từng quan sát sự va chạm của các viên bi-a. Bạn sẽ không bao giờ thấy hai viên bi-a lăn giật lùi (về phía người chơi) vì động lượng tổng cộng của hai viên bi-a giật lùi phải bằng động lượng của viên cái. Định luật bảo toàn động lượng chính là bữa ăn sáng, ăn trưa và ăn tối của các nhà vật lý. Ví dụ, các nhà vật lý hạt thực nghiệm sử dụng những máy gia tốc khổng lồ để phá vỡ các hạt và tạo ra các hạt khác. Những máy gia tốc này là các cấu trúc khổng lồ (ví dụ một máy ở Geneva, Thụy Sĩ, dùng một đường hầm hình tròn dài tới 17 dặm) trong đó các hạt nội nguyên tử được gia tốc tới những năng lượng cực cao. Mục tiêu ở đây là thăm dò các lực ở những khoảng cách ngày càng ngắn và tạo ra các hạt nặng hơn mà lý thuyết đã tiên đoán. Các nhà thực nghiệm đã lợi dụng thực tế là tổng năng lượng và động lượng của các sản phẩm sau va chạm phải bằng tổng năng lượng và động lượng của hạt tới (đạn) và hạt bia (do các định luật bảo toàn) để xác định ngay cả những tính chất mà ta không thể đo trực tiếp bằng các dụng cụ của thí nghiệm được.

Do đó bề ngoài, chúng ta dường như có hai định nghĩa không liên quan gì với nhau cả. Một mặt, các đại lượng cơ bản như năng lượng và động lượng được định nghĩa thông qua đáp ứng của hàm sóng đối với các phép biến đổi đối xứng. Mặt khác, cũng chính những đại lượng đó lại gắn liền với các định luật bảo toàn. Vậy mối liên hệ chính xác giữa những đối xứng của các định luật vật lý và các định luật bảo toàn là gì? Câu trả lời thật bất ngờ đến từ nhà toán học Đức Emmy Noether (1882-1935). Tuy nhiên, trước khi giải thích kết quả này, tôi muốn mô tả một cách ngắn gọn cuộc đời của người phụ nữ phi thường này, để phần nào soi rọi được những khó khăn mà một người phụ nữ phải gánh chịu trong thế giới toán học mà đàn ông chiếm ưu thế.

Emmy Noether sinh ở Erlangen, Đức, nơi mà cha bà là một giáo sư toán học. Ý định ban đầu của Emmy là trở thành một giáo viên dạy tiếng Pháp và tiếng Anh, nhưng đến tuổi 18 bà quyết định sẽ học toán. Nói thì dễ thế nhưng làm thật khó khăn. Mặc dù phụ nữ được phép đăng ký vào học ở các trường tổng hợp ở Pháp từ năm 1861, nhưng ở nước Đức bảo thủ điều đó cho tới tận năm 1900 vẫn chưa được phép một cách chính thức. Năm 1898, Hội đồng học thuật của Đại học Erlangen đã ra tuyên bố rằng việc nhận sinh viên nữ vào học sẽ "làm đảo lộn toàn bộ trật tự của nhà trường". Tuy nhiên, Emmy ít nhất đã được phép tham dự một số môn học. Sau khi thi đỗ ở Nürnberg, Göttingen và Erlangen và được hưởng lợi từ những thay đổi chậm chạp nhưng đều đặn trong sự phân biệt giới tính, cuối cùng bà đã được trao học vị tiến sĩ toán học vào năm 1907. Tuy nhiên, điều đó chưa chấm hết những trận chiến của bà với các cơ quan học thuật Đức. Mặc dù, năm 1905, bà đã được David Hilbert và Felix Klein mời tới làm việc ở Đại học Göttingen, nhưng hai ông đã phải đã phải tranh đấu với các quan chức của Đại học này trong suốt bốn năm trước khi bà được phép giảng dạy chính thức ở đây. Trong thời gian còn trao đổi thư từ và tranh cãi trực tiếp với hệ thống hành chính, Hilbert đã lừa lũ công chức quan liêu bằng cách cứ để cho Emmy dạy các lớp được thông báo chính thức dưới tên ông.

Noether đã chứng minh được định lý mang tên bà vào năm 1905, chỉ ít lâu sau khi bà tới Göttingen. Bà bắt đầu từ việc xét các đối xứng liên tục. Đó là những đối xứng đối với các phép biến đổi có thể biến thiên liên tục như các phép quay (trong đó góc quay có thể thay đổi một cách liên tục). Ví dụ, đối xứng của quả cầu là đúng đối với các phép quay nhỏ tùy ý, không giống như đối xứng gián đoạn của bông tuyết, chỉ đối xứng đối với các phép quay với các góc là bội số của 60 độ. Kết quả mà Noether nhận được thật đáng kinh ngạc. Bà đã chứng minh được rằng *mỗi một đối xứng liên tục của các định luật vật lý đều có tương ứng một định luật bảo toàn và ngược lại*. Đặc biệt, đối xứng quen thuộc của các định luật đối với các phép tịnh tiến tương ứng với bảo toàn động lượng, còn đối xứng đối với sự trôi qua của thời gian (thực tế là các định luật không thay đổi theo thời gian) thì cho chúng ta sự bảo toàn năng lượng, và đối xứng đối với các phép quay tạo ra bảo toàn mômen động lượng. Mômen động lượng là đại lượng đặc trưng cho "lượng quay" của một vật hoặc một hệ (đối với một chất điểm thì mômen động lượng bằng tích của khoảng cách đến trục quay và động lượng của hạt, nó tương tự như động lượng trong chuyển động tịnh tiến). Một thực tế thường gặp của bảo toàn mômen động lượng có thể quan sát thấy trong môn trượt băng nghệ thuật: khi nghệ sĩ trượt băng thu tay về áp sát thân thì cô ta sẽ quay nhanh hơn.

Định lý Noether đã dẫn tới sự hòa nhập các đối xứng và các định luật bảo toàn – hai cột trụ khổng lồ này của vật lý thực sự không gì khác chính là hai mặt của cùng một tính chất cơ bản.

Khi bọn Quốc xã lên cầm quyền, vì cha mẹ của bà đều là người Do Thái, nên Noether buộc phải rời nước Đức và bà đã đến dạy ở trường Bryn Mawr College, Hoa Kỳ. Bà vẫn tiếp tục giảng dạy ở Bryn Mawr College và Đại học Princeton cho đến khi bà bị đột tử sau một ca phẫu thuật, vào năm 1935. Trong một diễn văn tưởng nhớ bà, nhà vật lý toán Hermann Weyl đã nói về những cuộc đấu tranh mà bà đã phải chịu đựng do giới tính của mình: “Nếu ở Göttingen chúng tôi thường gọi đùa bà là “der Noether” (der là quán từ giống đực trong tiếng Đức) thì đó chính là sự thừa nhận một cách trân trọng sức mạnh của bà với tư cách là một nhà tư tưởng sáng tạo, người đã phá vỡ mọi rào cản của giới tính”.

Phần lớn những đối xứng mà chúng ta gặp cho đến nay đều có liên quan đến sự thay đổi trong quan niệm của chúng ta về không gian và thời gian. Nhiều đối xứng ẩn phía dưới các hạt sơ cấp và các lực cơ bản của tự nhiên lại thuộc một loại khác – chúng ta thay đổi quan niệm của chúng ta về căn cước của các hạt. Điều đó nghe ra có vẻ lạ lùng; lẽ nào electron lại không phải lúc nào cũng là electron sao? Thực tế đúng là như vậy, khi ta làm việc với tính mờ nhòe của thế giới lượng tử.

Cần nhớ rằng điều duy nhất là chắc chắn trong cơ học lượng tử là mọi thứ đều bất định. Chỉ có các xác suất là thực sự xác định được. Một electron có thể ở trong trạng thái mà ở đó nó quay (spin) không xác định là theo hướng này hay hướng kia. Nghĩa là, trạng thái đó là hỗn hợp của sự quay theo chiều kim đồng hồ và sự quay ngược chiều kim đồng hồ. Đáng ngạc nhiên hơn nữa, các electron có thể trong trạng thái là hỗn hợp của chúng với một hạt cơ bản khác có tên là neutrino. Neutrino là hạt có khối lượng gần bằng 0 và không mang điện. Cũng như Mặt Trăng có thể là tròn, là khuyết hay là mờ là tỏ, hay là gì đó trung gian, các hạt cũng có thể mang nhãn “electron”, “neutrino” hoặc là hỗn hợp của cả hai cho đến khi ta thực hiện một phép đo cụ thể (chẳng hạn như ta đo điện tích) để phân biệt hai hạt. Việc thực hiện khả năng đó của các hạt để hóa thân giữa những trạng thái khác nhau đã đưa các nhà vật lý tiến một bước quan trọng tới sự thống nhất của tất cả bốn lực của tự nhiên.

Newton là người đầu tiên đã đưa ra khái nhiệm thống nhất. Lý thuyết hấp dẫn của ông đã thống nhất lực giữ bàn chân chúng ta trên mặt đất với lực giữ các hành tinh trên quỹ đạo của chúng. Trước Newton không ai ngờ rằng hai thế giới đó lại bị chi phối bởi cùng một lực. Michael Faraday và James Clerk Maxwell đã đưa vào sự thống nhất quan trọng thứ hai: họ đã chứng minh được rằng các lực điện và từ chỉ là hai mặt khác nhau của cùng một lực mà thôi. Thay đổi điện trường sẽ sinh ra từ trường và ngược lại. Ngoài các lực hấp dẫn và điện từ ra, hiện nay chúng ta còn phân biệt hai lực nữa trong tự nhiên. Một là *lực hạt nhân mạnh*, lực giữ chặt các proton và neutron trong hạt nhân nguyên tử. Không có lực này các proton sẽ bay tứ tung ra khỏi hạt nhân dưới tác dụng của lực đẩy tĩnh điện giữ chúng, khi đó sẽ chẳng còn nguyên tố nào khác nữa ngoài hydrogen (chỉ chứa một proton) đã được tạo ra từ trước. *Lực hạt nhân yếu* là lực gây ra phân rã phóng xạ của uranium, và biến một một neutron thành một proton đồng thời trong quá trình đó tạo ra một electron và một phản-neutrino (tức "phản hạt" của neutrino). Những phân rã phóng xạ này lần đầu tiên được phát hiện vào năm 1896, nhưng sự gắn kết của chúng với lực hạt nhân yếu chỉ mới được làm sáng tỏ vào những năm 1930.

Vào cuối những năm 1960, các nhà vật lý Steven Weinberg, Abdus Salam, và Sheldon Glashow đã chinh phục được biên giới thống nhất tiếp theo. Họ đã chứng minh được rằng lực điện từ và lực hạt nhân yếu thực chất không hơn gì những khía cạnh khác nhau của cùng một lực mà sau này được gọi là *lực điện yếu*. Những tiên đoán của lý thuyết mới này thực là kịch tính. Lực điện từ được tạo ra khi các hạt tích điện trao đổi với nhau các gói năng lượng gọi là *photon*. Do đó, photon chính là những hạt truyền tương tác điện từ. Lý thuyết điện yếu tiên đoán sự tồn tại của những hạt anh em gần gũi với photon, chúng đóng vai trò truyền tương tác của lực yếu. Những hạt-chưa-bao-giờ-nhìn-thấy này được hình dung trước là nặng hơn proton khoảng 90 lần, có hạt tích điện (gọi là W) và có hạt trung hòa (gọi là Z). Các thí nghiệm được tiến hành ở Trung tâm Nghiên cứu Hạt nhân châu Âu (CERN) đã phát hiện ra các hạt W và Z lần lượt vào năm 1983 và 1984. (Nhân tiện nói thêm, cuốn tiểu thuyết hồi hộp đến thót tim và cũng là cuốn sách best-seller *Thiên thần và Ác quỷ* của Dan Brown đã đưa CERN đến với hàng triệu độc giả).

Các hạt W và Z phát hiện được đúng là có khối lượng lần lượt lớn gấp 86 và 97 lần proton như lý thuyết tiên đoán. Không nghi ngờ gì nữa đây là một trong những câu chuyện thành công nhất của đối xứng. Glashow, Weinberg và Salam đã lột được mặt nạ của các lực điện từ và yếu bằng cách thừa nhận rằng nằm bên dưới sự khác nhau về cường độ của hai lực đó (lực điện từ mạnh hơn cỡ 100 ngàn lần lực hạt nhân này) và khối lượng khác nhau của các hạt truyền tương tác là một đối xứng quan trọng. Các lực của tự nhiên vẫn giữ nguyên dạng nếu các electron tráo đổi với các neutrino hoặc với một hỗn hợp của chúng. Điều này cũng đúng khi các photon được tráo đổi với các hạt truyền lực W và Z. Đối xứng này vẫn tồn tại ngay cả nếu những hỗn hợp này biến thiên từ nơi này sang nơi khác hoặc từ thời điểm này sang thời điểm khác. Bất biến của các định luật đối với những phép biến đổi như vậy được thực hiện một cách định xứ trong không gian và thời gian được gọi là đối xứng chuẩn (*gauge*). Theo thuật ngữ chuyên môn, *phép biến đổi chuẩn* biểu diễn một bậc tự do trong xây dựng một lý thuyết không có những hệ quả quan sát được một cách trực tiếp. Nói cách khác, đó là phép biến đổi mà sự giải thích vật lý là không nhạy cảm đối với nó. Cũng như đối xứng của các định luật tự nhiên đối với sự thay đổi bất kỳ của tọa độ không gian và thời gian đòi hỏi sự tồn tại của hấp dẫn, đối xứng chuẩn giữa các electron và neutrino đòi hỏi sự tồn tại của các hạt truyền tương tác như các photon, W và Z. Lại một lần nữa khi đối xứng đã được đặt ra trước hết thì chính các định luật sẽ tự viết ra. Với đối xứng quy định sự hiện diện của các trường hạt mới, một hiện tượng tương tự cũng đã được lặp lại với lực hạt nhân mạnh.

QUARK, QUARK, NHÓM

Proton và neutron, các hạt tạo nên hạt nhân nguyên tử, không phải là các hạt "cơ bản". Chúng được tạo thành từ các viên gạch cơ bản hơn có tên là *quark*. Cái tên *quark* đã được nhà vật lý Murray Gell-Mann chọn vào năm 1963. Ông đã nhắm từ này, một từ tổ hợp tiếng sủa của chó và tiếng kêu qua qua của hải âu, được nhà tiểu thuyết nổi tiếng người Ireland James Joyce đặt ra trong tác phẩm *Finnegans Wake:*

Three quarks for Muster
Mark!
Sure he hasn't got much of
A bark
And sure any he had it's all
Beside the mark.

Quark có sáu "mùi" được đặt bằng những cái tên khá tùy tiện: *up* (lên), *down* (xuống), *strange* (lạ), *charm* (duyên), *top* (đỉnh), *bottom* (đáy). Ví dụ, proton được cấu tạo bởi ba quark: hai quark up và một quark down; còn neutron gồm hai quark down và một quark up. Khác với điện tích thông thường, quark có một loại tích khác, được gọi rất bay bướm là *màu* mặc dù nó chẳng liên quan gì đến những thứ mà chúng ta nhìn thấy. Cũng tương tự với việc điện tích là cội nguồn của lực điện từ, màu là nguồn gốc của lực hạt nhân mạnh. Mỗi một mùi của quark thể hiện bằng ba màu khác nhau, thường gọi là đỏ, lục và lam. Do đó, có 18 quark khác nhau.

Các lực của tự nhiên là mù về màu. Cũng giống như một bàn cờ vua lớn vô hạn nhìn sẽ là như nhau nếu ta tráo đổi các ô đen và trắng, lực giữa quark lục và quark đỏ cũng giống hệt như lực giữa hai quark lam hay giữa quark lam và quark lục. Ngay cả nếu chúng ta dùng "bảng màu" cơ học lượng tử của chúng ta và thay mỗi một trạng thái màu "tinh khiết" bằng một trạng thái màu hỗn hợp (ví dụ, "vàng" biểu diễn hỗn hợp của đỏ và lục hay "xanh dương" biểu diễn hỗn hợp của lam và lục), thì các định luật của tự nhiên vẫn giữ nguyên dạng. Nghĩa là, các định luật này là đối xứng đối với phép biến đổi màu. Hơn nữa, đối xứng màu lại là đối xứng chuẩn, tức là các định luật của tự nhiên không quan tâm đến chuyện các màu hay các hỗn hợp màu biến thiên từ vị trí này đến vị trí khác hoặc từ thời điểm này tới thời điểm khác.

Chúng ta đã thấy rằng đối xứng chuẩn đặc trưng cho tương tác yếu - bậc tự do tráo đổi các electron và neutrino – quy định sự tồn tại của các hạt (trường) truyền lực điện yếu (tức photon, W và Z). Tương tự, đối xứng màu chuẩn đòi hỏi sự tồn tại của 8 hạt (trường) *gluon*. Đó là các hạt truyền lực mạnh, liên kết các quark để tạo ra các hạt phức hợp như proton và neutron. Thật tình cờ, "tích" màu của ba quark tạo nên proton và neutron lại là khác nhau (đỏ, lục và lam) và khi cộng lại cho tích màu bằng 0 hay "trắng" (tương đương với trung hòa về điện trong điện từ). Vì đối xứng màu là cơ sở của lực thông qua trao đổi gluon giữa các quark, nên lý thuyết của các lực này được gọi là *Sắc động lực học lượng tử* (*quantum Chromodynamics*). Cuộc hôn phối của lý thuyết điện yếu (mô tả các lực điện từ và yếu) và sắc động lực học lượng tử (mô tả lực mạnh) đã tạo ra *mô hình chuẩn* – một lý thuyết nền tảng của vật lý hạt cơ bản và các định luật vật lý chi phối chúng.

Nếu như bạn đã bắt đầu cảm thấy hơi chóng mặt vì các hạt cơ bản đó, thì bạn không hề cô độc. Nhà vật lý nổi tiếng Enrico Fermi (1901-1954), người được xem là "nhà khoa học bách khoa cuối cùng" (theo nghĩa ông hiểu biết mọi lĩnh vực của vật lý) đã từng nói: "Nếu tôi nhớ được tên của tất cả các hạt này [mà thời của ông còn ít hơn nhiều] thì tôi đã là một nhà thực vật học". Một số tính chất lạ lùng của các hạt cơ bản đã thâm nhập vào cả văn hóa đại chúng". Nhà vật lý kiêm tác giả Cindy Schwarz đã soạn cả một tập văn xuôi và thơ về các hạt cơ bản do các sinh viên ở trường Vassar College sáng tác. Một bài thơ như vậy của sinh viên tên là Vanessa Pepoy, có nhan đề *"Sắc động lực học"*

Đỏ lam lục
Bộ ba màu.
Cơ bản
Có tính tổ chức.
Nguyên lý.
Nhất quán nội tại
Một hạt

Sáng trắng
Không nhìn thấy.

Bạn có thể đã nhận thấy rằng các hạt có liên quan đến đối xứng chuẩn có xu hướng lập thành một họ có "huyết thống" gần gũi nhau (như proton và neutron). Về mặt lịch sử, ngay cả trước khi có đề xuất rằng proton và neutron cả hai đều cấu tạo bởi ba quark trao đổi gluon với nhau, thì các nhà vật lý cũng đã nhận thấy những tương tự đến kinh ngạc giữa hai hạt láng giềng nội hạt nhân đó. Không chỉ gần nhau về khối lượng, mà lực mạnh giữa chúng cũng không phân biệt tương tác giữa hai neutron, giữa proton và neutron hay giữa các trạng thái hỗn hợp của hai hạt đó. Với sự tiến bộ của các máy gia tốc hạt năng lượng cao vào những năm 1950 đã xuất hiện cả một "vườn thú" các hạt. Với ý định xác lập một trật tự nhất định trong cái bầy thú sinh sôi rất nhanh chóng đó, Murray Gell-Mann và nhà vật lý Israel Yuval Ne'eman đã nhận thấy rằng proton và neutron nhìn rất tương tự 6 hạt khác. Họ cũng đã nhận dạng được các họ khác, cũng được mở rộng như vậy, gồm từ 8 đến 10 hạt. Gell-Mann đã gọi đối xứng này là "bát chính đạo" ám chỉ 8 nguyên tắc trên con đường tu thân trong đạo Phật, được cho là sẽ dẫn đến chấm hết mọi đau khổ. Nhận thức rằng đối xứng là chìa khóa dẫn tới sự hiểu biết những tính chất của các hạt nội nguyên tử đã dẫn tới câu hỏi không thể tránh được sau: liệu có cách nào hiệu quả để đặc trưng cho tất cả các đối xứng đó của các định luật của tự nhiên? Hay một cách cụ thể hơn, cái gì là lý thuyết cơ bản của các phép biến đổi có thể làm thay đổi liên tục một hỗn hợp các hạt thành một hỗn hợp khác và tạo nên các họ hạt quan sát được? Giờ thì chắc là bạn đã đoán ra câu trả lời. Sự thật sâu sắc trong cái câu mà tôi đã trích dẫn ở đầu cuốn sách này bây giờ lại tự phát lộ một lần nữa: "Bất cứ ở đâu mà lý thuyết nhóm bộc lộ, hoặc được đưa vào, thì sự đơn giản sẽ được kết tinh từ mớ hỗn độn". Các nhà vật lý của những năm 1960 đã sướng run lên khi phát hiện ra các nhà toán học đã lát sẵn đường cho mình. Cũng như năm mươi năm trước, Einstein biết về bộ công cụ hình học mà Riemann đã chuẩn bị cho từ trước, Gell-Mann và Ne'eman gặp được một công trình lý thuyết nhóm đầy ấn tượng của Sophus Lie. Những ý tưởng của Lie đã trở thành trung tâm đối với vật lý năng lượng cao đến nỗi cũng nên dành một ít lời cho nhà toán học xuất chúng này.

Sophus Lie (hình 95) đã đến với toán học bằng một con đường hơi vòng vo. Ở Đại học Hoàng gia mang tên Fredrik ở Christiania (nay là Oslo) ông không hề bộc lộ niềm đam mê đặc biệt nào cũng như khả năng phi thường gì về toán học, thậm chí mặc dù ông đã nghiên cứu các công trình của Abel và Galois. Một trong số những người thầy của ông là Ludvig Sylow (1832-1918), cũng là một nhà toán học nổi tiếng, sau này đã thú nhận ông không bao giờ nghĩ rằng chàng sinh viên trẻ Lie lại trở thành một trong số những bộ óc vĩ đại nhất của thế kỷ. Nhưng rồi, sau ít năm đắn đo, trong đó ông đã bị ám ảnh bởi ý định tự sát, Lie đã ngày càng hướng sự quan tâm của mình tới toán học. Năm 1868, cuối cùng ông đã rút ra kết luận rằng: "Có một nhà toán học đã ẩn giấu ở trong tôi".

Hình 95

Trong chuyến chu du tới Berlin và Paris vào năm 1869 và 1870, Lie đã gặp và kết bạn với Felix

Klein. Ở Paris ông cũng đã gặp Camille Jordan (1838-1922) và ông này đã thuyết phục Lie rằng lý thuyết nhóm có thể đóng một vai trò cực kỳ quan trọng trong nghiên cứu hình học. Những nỗ lực kết hợp của Lie và Klein trong lĩnh vực này đã cung cấp những hạt mầm cho chương trình Erlangen nổi tiếng của Klein về đặc trưng lý thuyết nhóm của hình học.

Năm 1870, những sự kiện chính trị đã làm cho sự cộng tác tiếp tục của hai nhà toán học trẻ trở nên phức tạp. Chiến tranh Pháp-Phổ nổ ra đã buộc Klein phải rời Paris trở về Berlin. Lie cố gắng tìm đường đến Italia, nhưng chỉ mới tới được Fontainebleau thì ông bị bắt. Đối với các sĩ quan quân đội Pháp, những bài báo toán học dày đặc của chàng trai Na Uy này chắc nhìn giống như những bức thư đã mã hóa của một gián điệp Đức. Thật may mắn cho Lie, nhà toán học Pháp Gaston Darboux đã can thiệp kịp thời và đưa ông ra khỏi tù. Hai năm sau, Đại học Christiania đã không lặp lại sai lầm như với Abel. Khoa và các chức sắc trong trường đã công nhận tài năng khác thường của Lie và đã lập một ghế giáo sư toán học dành cho ông. Lie vẫn tiếp tục cộng tác với Klein, nhưng không thường xuyên, cho đến tận năm 1892, khi mà một sự bất đồng không hay đã cắt đứt quan hệ giữa hai người. Sở dĩ như thế một phần là do Lie cho rằng vai trò của ông trong sự phát triển của Chương trình Erlangen đã không được công nhận một cách thỏa đáng. Năm 1893, Lie đã phát biểu công khai tấn công Klein và tuyên bố: "Tôi không phải là học trò của Klein cũng không phải là thầy của ông ta, mặc dù điều này có lẽ gần với sự thật hơn". Klein đã không làm cho tình hình trở nên khá hơn bằng cách kêu gọi sự chú ý (được cho là nhằm "bảo vệ" những hành động của Lie) tới những vấn đề về thần kinh mà Lie đã mắc phải vào cuối những năm 1880. Nhưng bất luận những sự kiện trên là như thế nào cũng không mảy may ảnh hưởng tới thiên tài của Lie.

Hai người khổng lồ Na Uy ở cuối thế kỷ 19 là Lie và Sylow đều nhận thức một cách đầy đủ món nợ trí tuệ của mình đối với ngôi sao sáng của nền toán học Na Uy là Abel. Trong suốt tám năm ròng rã hai người đã nhận một nhiệm vụ nặng nề là chuẩn bị và công bố toàn tập các tác phẩm của Abel. Cũng trong khoảng thời gian đó, Lie bắt đầu nghiên cứu nhóm các phép biến đổi liên tục (như các phép tịnh tiến và quay trong không gian thông thường). Dự án này đã kết thúc với sự công bố một công trình sâu rộng và một catalog chi tiết về những nhóm như vậy vào giữa các năm 1888 và 1893 (với sự cộng tác của nhà toán học Đức Friedrich Engel). Các thành viên của lớp các nhóm liên tục, được Lie nghiên cứu, sau này gọi là các *nhóm Lie*.

Các nhóm Lie chính là những công cụ mà Gell-Mann và Neẻman cần để đặc trưng cho những hình mẫu ẩn dưới của cái vườn bách thú các hạt vừa mới được khám phá ra. Vô cùng vui sướng, hai nhà vật lý đã phát hiện ra rằng nhà toán học Đức Wilhelm Killing (1847-1923) và nhà toán học Pháp Elie-Joseph Cartan (1869-1951) đã làm công việc của họ thậm chí còn sớm hơn. Cần nhớ rằng, để chứng minh định lý của mình về tính giải được của các phương trình, Galois đã định nghĩa một số nhóm con đặc biệt gọi là nhóm con chuẩn tắc (Chương 6). Khi một nhóm không có nhóm con chuẩn tắc (trừ hai nhóm con tầm thường là nhóm chỉ gồm một phần tử đồng nhất và chính nhóm đó), nó được gọi là nhóm đơn. Các nhóm đơn là những viên gạch cơ bản của lý thuyết nhóm theo nghĩa y hệt như các số nguyên tố (là số chỉ chia hết cho 1 và chính nó) là những viên gạch dựng nên mọi số nguyên. Nói một cách khác, tất cả các nhóm đều có thể xây dựng nên từ các nhóm đơn và bản thân nhóm đơn không thể phân tích được hơn nữa theo chính quá trình đó. Killing đã phác thảo sự phân loại các nhóm Lie đơn vào năm 1888 và được Cartan hoàn chỉnh vào năm 1894. Có bốn họ vô hạn các nhóm Lie đơn và năm nhóm Lie đơn *ngoại lệ* (hay *sporadic*) không nằm trong khuôn khổ của bốn họ trên. Gell-Mann và Neʼeman đã phát hiện ra một nhóm Lie đơn như vậy, gọi là nhóm unita đặc biệt (*special unitary*) bậc 3 hay viết tắt là SU(3), đặc biệt thích hợp với "bát chính đạo" mà ta nói ở trên – tức là cấu trúc họ mà các hạt phải tuân theo. Vẻ đẹp của đối xứng SU(3) đã được phát lộ trong vinh quang đầy đủ thông qua sức mạnh tiên đoán của nó. Gell-Mann và Neʼeman đã chứng minh được rằng nếu lý thuyết của họ là đúng thì phải tìm thấy thành viên thứ mười của họ chín hạt mà ta đã biết trước đó. Cuộc săn tìm đại quy mô hạt còn thiếu này đã được tiến hành trong một thí nghiệm trên một máy gia tốc tại Phòng thí nghiệm Quốc gia Brookhaven, ở Long Island (Hoa Kỳ). Vài năm sau, Yuval Neʼeman đã nói với tôi rằng khi nghe nói một nửa số dữ liệu thực nghiệm đã được săm soi kỹ lưỡng mà không phát hiện thấy hạt tiên đoán, ông đã tính đến chuyện bỏ luôn không theo đuổi vật lý nữa. Nhưng rồi, cuối cùng, đối xứng đã chiến thắng, hạt còn thiếu (gọi là hạt omega trừ) đã được tìm thấy và nó có đúng những tính chất đã được lý thuyết tiên đoán.

Tất cả các đối xứng đặc trưng cho mô hình chuẩn (ví dụ như đối xứng trao đổi màu giữa các quark) có thể biểu diễn bằng tích của các nhóm Lie đơn. Ý định tiên phong nhằm mô tả những đối xứng như vậy về mặt toán học đã được hai nhà vật lý là Dương Chấn Ninh *(Chen Ning Yang)* và Robert Mills thực hiện vào năm 1954. Do thế, các phương trình mô tả lực yếu (tương tự với các phương trình Maxwell mô tả trường điện từ) được gọi là các phương trình Yang-Mills. Mặc dù các công trình của Weinberg, Glashow và Salam về lý thuyết điện yếu và các khuôn khổ tuyệt đẹp được phát triển bởi các nhà vật lý David Gross, David Politzer và Frank Wilczek cho sắc động lực học lượng tử, nhóm đặc trưng của mô hình chuẩn được đồng nhất với tích của ba nhóm Lie, ký hiệu là U(1), SU(2) và SU(3). Do đó, theo một nghĩa nào đó, con đường đi tới sự thống nhất tối hậu của các lực trong tự nhiên cần phải đi qua sự phát hiện ra nhóm Lie thích hợp nhất chứa tích U(1)×SU(2)×SU(3).

Trải nghiệm với thuyết tương đối hẹp và rộng cùng với mô hình chuẩn của các hạt cơ bản có thể dẫn tới chỉ một kết luận: đối xứng và lý thuyết nhóm có một cách thật huyền diệu để dẫn dắt các nhà vật lý tới con đường đúng. Điều đó thoạt nhìn có vẻ hơi bất ngờ, vì đòi hỏi đối xứng áp đặt những ràng buộc khá chặt. Như chúng ta đã thấy, một khi một hình mẫu mở rộng tới vô hạn theo một chiều bị giới hạn phải tuân theo những đối xứng chuyển động cứng thì sẽ chỉ được phép có bảy hình mẫu phân biệt có dạng sợi. Ngay cả trong hai chiều, người ta đã chứng minh được rằng các hình mẫu "giấy dán tường" cũng bị hạn chế chỉ có 17 hình mẫu phân biệt. Những hạn chế tương tự bao giờ cũng được áp đặt cho các lý thuyết có chứa đối xứng. Vậy những hạn chế này có cấm bậc tự do khác mà lý thuyết này có thể có không? Có, và sự cấm này là một kết cục mong muốn. Các nhà vật lý tìm kiếm *một* lý thuyết giải thích được vũ trụ, chứ không phải nhiều lý thuyết đều làm tốt công việc đó như nhau. Nếu tôi có thể giới thiệu với các bạn 23 lý thuyết khác nhau về cái chết của Galois ở Chương 5, mà tất cả đều nhất quán với những bằng chứng hiện có thì có lẽ các bạn sẽ không thật thỏa mãn. Đối xứng không chỉ giúp chúng ta tránh được những xuất phát sai lầm và những ngõ cụt mà còn giúp ta vượt qua được phần khó khăn nhất, đó là cụm từ "quyết định, và quyết định" vốn đặc trưng cho sự lựa chọn.

Kinh Thánh kể với chúng ta rằng khi người Israel rời Ai Cập, họ được dẫn đường trong sa mạc bởi "một cột lửa vào ban đêm, cho họ ánh sáng". Đối xứng chính là cái cột lửa ấy của các nhà vật lý, nó đã dẫn dắt họ tới thuyết tương đối rộng và mô hình chuẩn. Vậy thì liệu nó có cũng dẫn tới sự thống nhất của hai lý thuyết đó không.

SỰ HÀI HÒA CỦA CÁC DÂY

Các nhà lịch sử thích chỉ ra rằng một số cuộc cách mạng xã hội là sai lầm, khi nhìn ngược trở lại thời gian. Trái lại, hai cuộc cách mạng khoa học trong thế kỷ 20 là những thành công khỏi bàn cãi. Thuyết tương đối rộng đã tiên đoán được sự uốn cong của tia sáng khi đi cạnh các thiên thể có khối lượng lớn, sự tồn tại của các đối tượng bị co mạnh lại thành cái mà chúng ta gọi là lỗ đen, và sự giãn nở của vũ trụ, tất cả những thứ đó đều đã được khẳng định bằng quan sát. Thuyết lượng tử đã được khẳng định trong điện động lực học với sự chính xác đến kinh ngạc và viên ngọc trên vương miện của nó là mô hình chuẩn đã nắm bắt và tiên đoán thành công tất cả các tính chất đã biết của các hạt nội nguyên tử. Tuy nhiên, ở đây xuất hiện vấn đề. Chúng ta đã có một lý thuyết cực kỳ thành công cho những thang thiên văn rộng lớn nhất (các sao, thiên hà, vũ trụ) và một lý thuyết khác cho những thang nội nguyên tử nhỏ nhất (nguyên tử, quark, photon). Có thể đúng là hai thế giới này không bao giờ gặp nhau. Nhưng trong một vũ trụ bắt đầu giãn nở từ "Big Bang" (Vụ nổ lớn) – một trạng thái cực nóng và cực đặc – thì các con đường của thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử không tránh khỏi phải gặp nhau. Có nhiều mẩu bằng chứng, như sự tạo thành các nguyên tử của bảng tuần hoàn, chỉ ra thực tế rằng ngay cả cái lớn cũng đã từng là cái nhỏ. Hơn thế nữa, một số thực thể như các lỗ đen, sống trong cả thế giới thiên văn cũng như trong thế giới lượng tử. Do đó, đi theo những dự định không thành của Einstein nhằm thống nhất thuyết tương đối rộng với lý thuyết điện từ, nhiều nhà vật lý đã dấn thân vào những nỗ lực thống nhất lớn nhất – đó là thống nhất thuyết tương đối rộng với cơ học lượng tử.

Trở ngại lớn nhất đã từng gây khó khăn cho tất cả các nỗ lực thống nhất là một thực tế mà nhìn bên ngoài là khá đơn giản: thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử dường như thực sự là không tương thích. Cần nhớ rằng khái niệm then chốt của lý thuyết lượng tử là nguyên lý bất định. Khi bạn thử thăm dò về vị trí với khả năng phóng đại ngày càng tăng thì động lượng (hay vận tốc) của hạt bắt đầu dao động mạnh. Ở bên dưới một chiều dài nhỏ xíu gọi là *chiều dài Planck*, toàn bộ quan niệm về không thời gian trơn tru bị mất hoàn toàn. Chiều dài này (bằng 0,000... 4 inch, trong đó số 4 đứng ở vị trí thập phân thứ 34) quyết định thang mà ở đó hấp dẫn phải được xử lý theo cơ học lượng tử. Đối với những thang còn nhỏ hơn nữa, không gian sẽ biến thành một thứ "bọt lượng tử" luôn luôn thăng giáng. Mà tiền đề cơ bản nhất của thuyết tương đối rộng là sự tồn tại một không thời gian cong một cách trơn tru. Nói cách khác, *những ý tưởng trung tâm của thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử xung đột nhau một cách không thể dung hòa ở những thang cực nhỏ.*

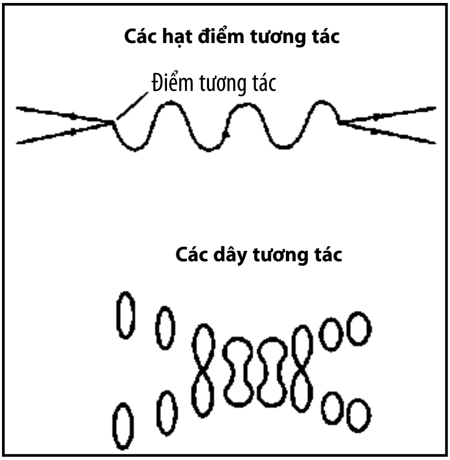
Sự đánh cược tốt nhất hiện nay cho một lý thuyết lượng tử của hấp dẫn dường như là một phiên bản nào đó của *lý thuyết dây*. Theo lý thuyết có tính cách mạng này, thì các hạt cơ bản không phải là những thực thể có dạng điểm, không có cấu trúc nội tại, như mô hình chuẩn muốn chúng ta tin như thế, mà là những vòng dây nhỏ dao động. Những vòng dây vô cùng mảnh này, giống như một dây cao su nhỏ (cỡ chiều dài Planck, nhỏ hơn kích thước của proton cỡ một trăm tỷ lần) đến mức độ phân giải của các thí nghiệm hiện nay coi chúng là các điểm. Vẻ đẹp của ý tưởng có tính nguyên lý này của lý thuyết dây là ở chỗ mọi hạt cơ bản đã biết được coi như là biểu diễn các kiểu (*mode*) dao động của cùng một dây cơ bản. Cũng như một dây đàn violon hay guitar có thể được gảy để phát ra những họa âm khác nhau, các mẫu hình dao động khác nhau của dây cơ bản tương ứng với các hạt vật chất khác nhau, như electron hay quark. Chính điều này cũng được áp dụng cho các hạt truyền lực. Các hạt truyền lực như gluon, hay W và Z tồn tại cũng là nhờ các họa âm khác. Nói một cách đơn giản, toàn bộ các hạt vật chất và các hạt lực của mẫu chuẩn là một phần bảng tổng phổ mà các dây có thể chơi. Tuy nhiên, ấn tượng nhất là một cấu hình đặc biệt của dây dao động được tìm thấy là có các tính chất hoàn toàn trùng khớp với *graviton* – hạt dự đoán là truyền lực hấp dẫn. Đây là lần đầu tiên bốn lực cơ bản của tự nhiên dự tính có thể được ở chung dưới một mái nhà.

Bạn có thể đã nghĩ rằng một thành tựu có tầm cỡ như thế - cái Chén Thánh của vật lý hiện đại – chắc sẽ ngay lập tức được toàn bộ cộng đồng vật lý nhiệt liệt chào đón. Nhưng phản ứng vào những năm 1960 là khá thờ ơ. Những năm tháng đầy thất vọng trong ý định thống nhất thuyết tương đối rộng với cơ học lượng tử đã xây nên một bức tường dày của sự hoài nghi. Tuyên bố của nhà vật lý John Schwarz thuộc Viện Công nghệ California và Jöel Scherk thuộc trường Cao đẳng Sư phạm Paris rằng lý thuyết dây cuối cùng đã thống nhất được hấp dẫn với lực mạnh đã không được ai chú ý tới. Tình hình này kéo dài tới chục năm. Trong thời gian đó, hầu như mỗi bước tiến lại tiếp ngay sau có phát hiện ra một khó khăn tinh tế nào đó khiến cho lại phải giật lùi chín phần mười bước. Cuối cùng một đột phát đã xảy ra vào năm 1984, khi các nhà vật lý Michael Green, khi đó ở trường Queen Mary College và John Schwarz đã chứng minh được rằng lý thuyết dây thực sự có thể mang lại sự thống nhất tối hậu mà mọi người mong đợi.

Một cơn sốt hoạt động diễn ra sau đó khi một số bộ óc lý thuyết xuất sắc nhất lao vào săn tìm cái dường như là "lý thuyết của tất cả" mà người ta đã tìm kiếm từ lâu, một nền tảng tối hậu mà toàn bộ phần còn lại của vật lý có thể xây dựng trên đó. Tuy nhiên, như thường thấy trong khoa học, sự bùng nổ niềm hưng phấn (được gọi là cuộc cách mạng thứ nhất của siêu dây) chẳng bao lâu đã nhường chỗ cho giai đoạn làm việc đầy khó khăn mà giàu thất vọng. Không giống như trường hợp SU(3), mà ở đó toàn bộ các công cụ toán học đều đã có sẵn, chỉ đợi các nhà vật lý sử dụng, các nhà lý thuyết dây, để tiến lên được, phải tự phát triển lấy các công cụ toán học. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy trong mục sau, các nhóm vẫn cứ cung cấp ngôn ngữ đúng để mô tả các hình mẫu nằm ẩn bên dưới.

Vậy, lý thuyết dây đã đề xuất cách giải quyết xung đột cơ bản giữa hình học trơn của thuyết tương đối rộng và những thăng giáng dữ dội của cơ học lượng tử như thế nào? Bằng cách chia sẻ một độ mờ nhòe nhất định cho cả không-thời gian tương tự như cơ học lượng tử chia sẻ nó cho vị trí và chuyển động của các hạt.

Hãy hình dung bạn muốn vẽ một đám mây. Nếu đám mây bạn lấy từ bầu trời để làm mẫu ở tương đối xa, mãi gần tận đường chân trời, thì chắc bạn sẽ tái tạo lại được hình dạng của nó một cách khá chính xác như bạn quan sát. Nhưng nếu, trái lại, đám mây ở tương đối gần thì bạn sẽ khó nắm bắt được mọi biến chuyển trong mỗi nắm nhỏ của nó. Thu nhỏ lại hơn nữa, tới thang nội phân tử, sẽ làm cho bất kỳ ý định tái tạo nào sẽ trở nên vô vọng. Lý thuyết dây khẳng định rằng bằng cách xem các hạt cơ bản và các hạt truyền tương tác như những hạt điểm 0 chiều, vật lý có ý định thăm dò vũ trụ tới giới hạn mà dưới nó là vô nghĩa. Nói cách khác, vì các dây – những cấu phần cơ bản nhất của vũ trụ – là những đối tượng quảng tính, có kích thước cỡ chiều dài Planck, nên những khoảng cách nhỏ hơn chiều dài này là nằm ngoài thực tại vật lý. Bằng cách tập trung chỉ vào những thang chiều dài siêu-Planck, người ta có thể loại bỏ được những thăng giáng dữ dội và tránh được xung đột. Không có gì là đáng ngạc nhiên, tính mờ nhòe trong khuôn khổ lý thuyết dây đã làm thay đổi bản chất các sự kiện trong không-thời gian. Trong khi ở mô hình chuẩn mọi tương tác giữa hai hạt xảy ra chính xác tại một điểm trong không-thời gian phù hợp với mọi người quan sát, thì tình hình đó trong lý thuyết dây lại khác (hình 96). Do bản chất quảng tính của các dây, ta không thể nói một cách chính xác khi nào và ở đâu hai dây tương tác với nhau. Cả vị trí và thời gian tương tác đều bị "nhòe đi". Tình hình này có thể na ná (nhưng chỉ bề ngoài thôi) với sự không thể tiên đoán được khi nào và ở đâu cái xương chạc bị kéo căng hai đầu sẽ bị gãy.



Hình 96

Vừa mới hồi phục từ cuộc cách mạng tìm hiểu không-thời gian do Einstein khởi xướng, các nhà vật lý lại phải điều chỉnh lại cho phù hợp với các khái niệm mới do cuộc cách mạng dây đưa vào. May mắn thay, một khái niệm quen thuộc không chỉ sống sót qua cuộc cách mạng này mà còn đạt tới đỉnh cao của nó qua lý thuyết dây.

KHÔNG CHỈ ĐỐI XỨNG MÀ CÒN SIÊU ĐỐI XỨNG

Các định luật của tự nhiên không phụ thuộc vào chuyện chúng ta sử dụng chúng ở đâu, dưới góc độ nào, hoặc khi nào. Chúng là đối xứng đối với các phép tịnh tiến, quay, và dịch theo thời gian. Chúng cũng là như nhau đối với mọi người quan sát, bất kể là họ chuyển động đều hay chuyển động có gia tốc. Đó là nét căn bản của nguyên lý bất biến tổng quát của Einstein. Cũng như những người quan sát chuyển động đều có thể tuyên bố mình là đứng yên với mọi vật xung quanh họ là chuyển động, những người quan sát chuyển động có gia tốc cũng có thể tuyên bố như vậy. Những người sau hoàn toàn được biện minh với tuyên bố rằng những lực phụ mà họ cảm thấy là do trường hấp dẫn (theo nguyên lý tương đương). Vào năm 1967, các nhà vật lý nghĩ rằng không tồn tại các đối xứng nào khác chỉ gắn với sự thay đổi điểm nhìn trong không gian và thời gian. Thực tế, thậm chí còn tồn tại một định lý tuyên bố đã chứng minh được rằng điều đó là đúng. Trước sự ngạc nhiên của nhiều nhà vật lý, sự nghiên cứu tích cực trong bốn năm sau đó đã dẫn tới một phát hiện rằng cơ học lượng tử còn cho phép một đối xứng phụ nữa. Đối xứng bất ngờ đó được mệnh danh là *siêu đối xứng*.

Siêu đối xứng là một đối xứng tinh tế dựa trên tính chất spin của cơ học lượng tử. Cần nhớ rằng (Chương 1) spin của electron là một tính chất nội tại, rất giống với điện tích, và trên một số phương diện nó giống với mômen động lượng cổ điển – dường như electron quay xung quanh trục của nó. Nhưng khác với các vật thể quay, như các con quay, mà ở đó tốc độ quay có thể nhận giá trị nhanh hay chậm tùy ý, còn electron chỉ có spin cố định. Theo đơn vị mà spin được đo trong cơ học lượng tử (được gọi là *hằng số Planck*) thì spin của electron là một nửa đơn vị, tức là chúng là các hạt có "spin 1/2". Thực tế, các hạt vật chất trong mô hình chuẩn, như electron, quark, neutrino, và hai loại hạt khác có tên là muon và tau, đều có "spin 1/2". Các hạt có spin bán nguyên như thế được gọi chung là các *fermion* (theo tên nhà vật lý Italia Enrico Fermi). Trái lại, các hạt truyền lực, như photon, W, Z và các gluon, đều có spin bằng 1 đơn vị hay nói theo ngôn ngữ vật lý chúng là các hạt có "spin 1". Riêng hạt mang lực hấp dẫn – graviton – thì có "spin 2" và đây cũng là tính chất nhận dạng mà một trong các dây dao động sở hữu. Tất cả các hạt có spin nguyên được gọi là *boson* (theo tên nhà vật lý Ấn Độ Satyendra Bose). Giống như không-thời gian bình thường gắn với đối xứng đối với các phép quay, không-thời gian cơ học lượng tử gắn với siêu đối xứng dựa trên spin. Những tiên đoán của siêu đối xứng, nếu nó thực sự được tuân theo, là có tầm rất xa. Trong một vũ trụ dựa trên siêu đối xứng, *mỗi một hạt đã biết trong vũ trụ phải có một hạt đối ứng (hay cũng gọi là siêu đối ứng) hiện còn chưa phát hiện ra*. Trong khi các hạt vật chất có spin 1/2 như electron và quark, thì các siêu đối ứng của chúng phải có spin 0. Photon và các gluon (có spin 1) thì cần phải có các hạt siêu đối ứng có spin 1/2, lần lượt được gọi là *photino* và *gluino*. Điều quan trọng nhất là, vào những năm 1970, các nhà vật lý đã ý thức được rằng cách duy nhất để lý thuyết dây bao gồm được hết các hình mẫu fermion (và do đó có thể giải thích được các cấu phần của vật chất) là lý thuyết đó phải là siêu đối xứng. Trong phiên bản siêu đối xứng của lý thuyết dây, các hình mẫu dao động boson và fermion không tránh khỏi xuất hiện theo từng cặp. Hơn nữa, lý thuyết siêu dây còn tránh được một vấn đề quan trọng gây nhức đầu khác vốn gắn với lý thuyết gốc (không phải siêu đối xứng) – đó là các hạt có khối lượng ảo. Cần nhớ rằng căn bậc hai của các số âm được gọi là số ảo. Trước siêu đối xứng, lý thuyết dây tạo ra những hình mẫu dao động rất lạ (gọi là *tachyon*) có khối lượng là ảo. Các nhà vật lý đã thở phào nhẹ nhõm khi siêu đối xứng đã loại bỏ được các con thú không mong muốn đó.

Khỏi phải nói rằng tất cả các đối xứng nằm ẩn bên dưới và các hình mẫu của các phiên bản lý thuyết dây hiện nay đều được mô tả bằng lý thuyết nhóm. Ví dụ, một phiên bản được biết đến dưới cái tên khiến người ta phải chờn là *loại Lai* $E_8 \times E_8$ dựa trên một trong số các nhóm Lie ngoại lệ.

Bước quan trọng tiếp theo trong việc khẳng định hay bác bỏ lý thuyết dây, tất nhiên, sẽ là phát hiện ra các hạt siêu đối xứng đã được tiên đoán. Các nhà vật lý hy vọng rằng điều đó là trong tầm của Máy Va chạm Hadron Lớn (*Large Hardron Collider*) hay LHC ở Geneva. Khoảng năm 2007, máy gia tốc lớn nhất thế giới này được chờ đợi là sẽ đạt tới năng lượng cao gần gấp 8 lần năng lượng đạt được ngày hôm nay. Nếu thực sự tìm được các hạt siêu đối xứng thì các tính chất của chúng sẽ cung cấp cho chúng ta những manh mối quan trọng về chuyện lý thuyết tối hậu phải là như thế nào. Còn nếu không tìm được chúng thì đó là một chỉ dẫn rằng lý thuyết đã đi theo một hướng hoàn toàn sai.

Lý thuyết dây phát triển với tốc độ không thể tin nổi, khiến cho những ai ở ngoài giới những người nghiên cứu nó hằng ngày rất khó theo dõi được một cách chi tiết. Hướng nghiên cứu này hiện nay vẫn dẫn đầu bởi Edward Witten thuộc Viện Nghiên cứu Cao cấp Princeton và nhiều người khác không thể kể hết tên ra đây. Toán học được dùng trong những nghiên cứu đó ngày càng trở nên tân tiến hơn. Không chỉ những con số thông thường được thay bằng một lớp mở rộng các con số như *các số Grassmann* (theo tên nhà toán học Phổ Hermann Grassmann), mà hình học thông thường cũng được thay thế bởi một nhánh đặc biệt gọi là *hình học không giao hoán* do nhà toán học Pháp Alain Connes phát triển.

Mặc dù những công cụ tân tiến đó đã trở thành tiêu chuẩn của lý thuyết này, nhưng thực tế lý thuyết dây vẫn còn đang trong thời kỳ phát triển và hoàn thiện. Một trong những người tiên phong của lý thuyết dây, nhà vật lý Italia Daniele Amati, đã chỉ ra đặc điểm của nó là "một phần của thế kỷ 21 tình cờ rơi vào thế kỷ 20". Thực vậy, có một cái gì đó về bản chất của chính lý thuyết hiện nay chỉ ra thực tế rằng chúng ta đang chứng kiến những bước đi chập chững của lý thuyết đó mà thôi. Nên nhớ lại bài học mà chúng ta học được ở tất cả những ý tưởng vĩ đại từ thời thuyết tương đối của Einstein – đưa đối xứng lên trước hết. Đối xứng là nguồn gốc của lực. Nguyên lý tương đương – sự kỳ vọng rằng mọi người quan sát, bất kể là họ chuyển động như thế nào, đều suy ra những định luật như nhau – đòi hỏi sự tồn tại của hấp dẫn. Đối xứng chuẩn – thực tế rằng các định luật không phân biệt các màu, không phân biệt electron với neutrino – *quy định* sự tồn tại của các hạt truyền lực mạnh và lực điện yếu. Nhưng siêu đối xứng lại là đầu ra (*output*) của lý thuyết dây, một hệ quả cấu trúc của nó chứ không phải là nguồn gốc sự tồn tại của lý thuyết này. Điều đó có nghĩa là gì? Nhiều nhà lý thuyết dây tin rằng một nguyên lý lớn hơn nào đó nằm ẩn bên dưới và là hết sức thiết yếu cho sự tồn tại của lý thuyết dây vẫn đang phải còn tìm kiếm. Nếu như lịch sử tự lặp lại, thì nguyên lý này hóa ra sẽ liên quan tới một đối xứng bao quát tất cả và thậm chí hấp dẫn hơn, nhưng ở thời điểm hiện tại chưa ai có manh mối gì về chuyện nguyên lý đó có thể là như thế nào. Tuy nhiên, vì chúng ta mới chỉ ở chặng đầu của thế kỷ 21, nên câu nói của Amati có thể lại hóa ra một lời tiên tri đáng kinh ngạc.

Như chúng ta đã thấy trong chương này, các nhà vật lý đã đề cao đối xứng tới vị trí là khái niệm trung tâm trong những ý định của họ nhằm tổ chức và giải thích một vũ trụ phức tạp và vô cùng rắc rối. Điều này đặt ra một số câu hỏi khá thú vị. Thứ nhất, tại sao chúng ta lại thấy đối xứng hấp dẫn đến thế? Thứ hai, và có lẽ là câu hỏi khó nhất, những giải thích theo lý thuyết nhóm dựa trên đối xứng có phải là thực sự không thể tránh khỏi không? Hay là bộ não con người bằng cách nào đó đã điều chỉnh để cài chốt vào chỉ những khía cạnh đối xứng của vũ trụ? Để hiểu được tại sao đối xứng lại hấp dẫn chúng ta mạnh mẽ như thế, chúng ta cần phải hiểu đối xứng đã tác động đến đầu óc con người như thế nào.

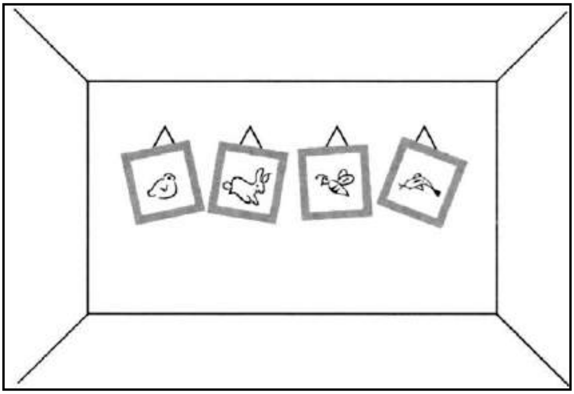
VIII

Ai là đối xứng nhất?

Bạn nghĩ là bạn có thể chịu đựng được bao lâu khi nói chuyện lịch sự với người đàn ông trên hình 97 trước khi cái kính xộc xệch mà ông ta đeo khiến cho bạn cảm thấy bực bội? Hay giả sử bạn bước vào nhà một ai đó và phát hiện ra rằng các bức tranh treo trên tường được "bày biện" như trên hình 98. Liệu về bản năng bạn có muốn chỉnh lại những bức tranh ấy không? Bằng cách nào và tại sao sự ham muốn đối xứng hai bên đó lại phát triển trong trí óc của bạn? Một trong những mục đích của tâm lý học tiến hóa là trả lời một cách chính xác những loại câu hỏi đó.

Tâm lý học tiến hóa là một khoa học nỗ lực kết hợp những điều tốt nhất của hai thế giới: sinh học tiến hóa và tâm lý học nhận thức. Trên quan điểm đó thì bộ óc của con người thực sự là một tập hợp gồm nhiều môđun có mục đích cụ thể được thiết kế và nhào nặn bởi chọn lọc tự nhiên để giải quyết những bài toán thích nghi rất cụ thể. Một bài toán thích

Hình 97



Hình 98

nghi là thách thức bất kỳ do môi trường đặt ra mà các bộ óc của tổ tiên con người cần phải đối phó một cách sẵn sàng để cho những sinh vật hai chân này có thể sống sót và sinh sản thành công. Nói cách khác, theo các nhà tiên phong của tâm lý học tiến hóa là Leda Cosmides và John Tooby, thì bộ óc con người như con dao nhíp của quân nhân Thụy Sĩ có nhiều "chi tiết" khác nhau, mỗi chi tiết được thiết kế cho một nhiệm vụ cụ thể. Các nhà tâm lý học tiến hóa bác bỏ những ý tưởng về các quá trình có mục đích chung hơn ở trong não. Họ lập luận một cách thuyết phục rằng tất cả các vấn đề mà sinh vật có hai chân đã từng phải đối mặt, về bản chất, luôn luôn là cụ thể chứ không phải tổng quát.

Những manh mối tới từ các lĩnh vực khác nhau, từ sinh học và nhân chủng học tới khảo cổ học và cổ sinh học đã gợi ý những vấn đề thích nghi nào là quan trọng nhất. Nói một cách khái quát, những vấn đề đó bao gồm: tránh thú dữ, nhận dạng được thức ăn đúng, tạo các đồng minh, hỗ trợ con cái và những người gần gũi về huyết thống, giao tiếp với những người khác và lựa chọn bạn đời. Vậy thì đối xứng xuất hiện ở đâu trong tất cả những thứ đó?

ĐỐI XỨNG SỢ HÃI

Về lĩnh vực châm ngôn gói gọn trong một dòng thì ít ai có thể sánh được với Oscar Wilde. Trong cuốn *Bức tranh về Dorian Gray* ông đã tuyên bố "Con người không nên quá thận trọng trong việc lựa chọn kẻ thù của mình". Gạt bỏ phần nói đùa ra, trên quan điểm tiến hóa, thì đây là một quan sát rất sâu sắc. Các gen sẽ không thể thực hiện được một trong những nhiệm vụ chủ yếu của nó là truyền một cách nguyên vẹn cho thế hệ tiếp sau, nếu người mang những gen đó để cho mình bị ác thú ăn thịt. Do vậy, những gen nào mà bằng một cách nào đó giúp cho một động vật có thể thoát được thú săn mồi chắc chắn sẽ được quá trình chọn lọc tự nhiên ưu ái. Những gen như vậy sẽ được tham gia vào quá trình xây dựng có tiến hóa các "môđun tránh-thú-săn-mồi" trong bộ não. Nhiệm vụ của các môđun này khá rõ ràng. Đầu tiên và trước hết, cần phải phát hiện ra các ác thú tiềm tàng. Không phát hiện ra sớm và có hành động kịp thời thì những hậu quả có thể sẽ là tai họa. Chỉ ở những giai đoạn sau thì những chức năng khác mới cần được kích hoạt – những nguy hiểm thực cần phải phân biệt với những báo động giả và phản ứng cần phải khởi phát một cách phù hợp. Do đó, các môđun tránh-thú-săn-mồi trước hết cần phải là những dụng cụ phát hiện ác thú.

Rất nhiều thực nghiệm đã chứng tỏ rằng các hệ thống tri giác của nhiều sinh vật, từ ong, chim bồ câu cho tới con người, đều rất nhạy cảm với đối xứng hai bên. Những hình mẫu đối xứng vừa được phát hiện nhanh hơn các hình mẫu phi đối xứng vừa dễ học và dễ truy xuất từ bộ nhớ hơn. Liệu những khả năng chung của nhiều loài này có liên quan gì đó với những nhu cầu tránh-thú-săn-mồi không? Bài toán thích nghi chính xác mà các phần cứng/ phần mềm nhận thức cố gắng phải giải quyết ở đây là gì? Manh mối cho câu trả lời có thể lượm lặt từ việc hỏi một câu hỏi khác: trong một thế giới trống trơn, không có nhà thờ, xe hơi, máy bay và những đồ vật khác do con người làm ra thì cái gì nhìn là đối xứng hai bên? Câu trả lời là tầm thường như cái mũi nằm ở trên mặt vậy: đó là động vật và con người! Thực tế là mặc dù phần đuôi của con sư tử cũng là đối xứng hai bên, nhưng đối xứng ở đó là không nổi bật như ở phần trước. Nói cách khác, việc phát hiện ra đối xứng hai bên, đối với một động vật, được dịch ra là "Tôi đang bị quan sát". Những ý định của kẻ quan sát không nhất thiết phải là ác ý – nó có thể chỉ đơn giản là hưởng thú vui ngắm nghía hoặc lựa chọn "bạn đời". Nhưng không có chuyện là phát hiện sớm đối xứng hai bên có nghĩa là sự khác biệt giữa cái sống và cái chết đối với đối tượng được chú ý.

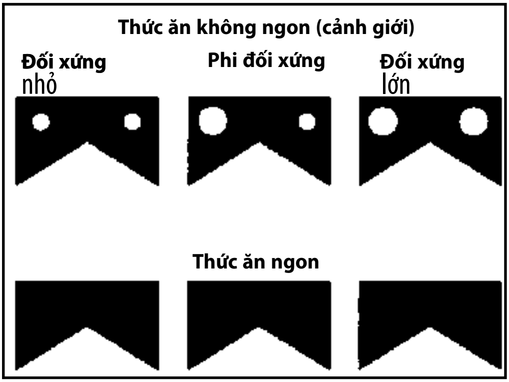
Nhà khoa học thần kinh Joseph LeDoux, thuộc Trung tâm Khoa học Thần kinh của Đại học New York, là một trong số những người tiên phong nghiên cứu những cảm giác với tư cách là các hiện tượng tâm lý, đối lập với hành vi. LeDoux không quan tâm tới những tình cảm phức tạp như sự pha trộn của tình yêu và sự cưỡng bức hay sự đấu tranh có ý thức được gây bởi tác động qua lại giữa ham muốn và ghen tuông. Ông chỉ nghiên cứu các mạch trong não dẫn tới cảm giác sợ hãi. LeDoux phát hiện ra rằng đáp ứng với sự sợ hãi là một tiềm thức không liên quan gì với "những hệ thống xử lý cao cấp hơn của bộ não". Nói một cách nôm na, môđun phát-hiện-thú-săn-mồi của não đối mặt với cùng một nan đề mà bất cứ nhà thiết kế các hệ thống báo động trộm nào cũng gặp phải. Một mặt, các nhà thiết kế muốn hệ thống có thể phản ứng tức thời với bất cứ ý định đột nhập nào, nhưng mặt khác, họ lại muốn giảm đến tối thiểu các báo động giả. Nhưng cân bằng lại thì một sự đáp ứng trễ có thể sẽ phải trả giá đắt và nguy hiểm hơn là vài ba cú báo động giả. Do đó, không có gì đáng ngạc nhiên khi LeDoux phát hiện ra rằng não vận hành theo hai đường neuron tách rời. Một con đường "nhanh và bẩn" ngắn hơn cho phép động vật phản ứng với những kích thích nguy hiểm tiềm tàng thậm chí còn trước khi não phân tích đầy đủ kích thích đó. Một "con đường khác cao cấp hơn", đi qua vỏ cảm giác và được hưởng lợi từ sự xử lý rộng lớn hơn.

Trung tâm đối với cảm giác tức thời (chứ không phải tình cảm có ý thức) của sự sợ hãi là *hạch hạnh* (*amygdale*) – một cấu trúc có hình quả hạnh (almond) ở não trước (*amygdala* tiếng Latin có nghĩa là quả hạnh). LeDoux đã dùng các hóa chất để nhuộm các neuron dọc theo hệ thống mạch của não ở chuột và ông đã lập được bản đồ đường đi chính xác của nỗi sợ hãi. Đó là một bước tiến có ý nghĩa vượt ra ngoài cách tiếp cận đơn giản chỉ là "xóa tập tính của chuột", vốn đặc trưng cho nhiều nghiên cứu trước đó chỉ thuần túy về hành vi. LeDoux phát hiện ra rằng ngay khi một con chuột phát ra âm thanh báo động (những tiếng kêu tần số cao), tín hiệu nhận được ở các con chuột khác sẽ đi thẳng từ đồi thị (*thalamus*) (chất xám ở thùy kép làm trễ các tín hiệu tới vỏ cảm giác) tới hạch hạnh. Đến lượt mình, khi nhận được kích thích mạnh, hạch hạnh khởi phát toàn bộ hệ thống bảo vệ. Phản ứng có thể hoặc dưới dạng đứng dúm lại – để tránh bị nhìn thấy – hoặc nhịp tim đập loạn xạ và các hormone tràn vào máu. Những hormone này giúp kích thích những hành động thích hợp – chuột sẽ chạy để cứu mạng sống của mình hoặc chuẩn bị để chiến đấu.

Hạch hạnh dường như chi phối phản ứng sợ hãi trong tất cả các loài có cấu trúc đó, kể cả con người. Những nghiên cứu chứng tỏ rằng một phụ nữ bị tổn hại não ở hạch hạnh sẽ hoàn toàn mất khả năng phát hiện và nhận ra bất cứ biểu hiện bên ngoài nào có liên quan đến sự sợ hãi.

Rõ ràng, cơ chế "nhanh và bẩn" thường hay khởi phát một số báo động giả và những cuộc tấn công hoảng loạn không cần thiết. Tuy nhiên, đồi thị cũng gửi thông tin tới trung tâm xử lý-tín hiệu chính xác hơn – đó là vỏ cảm giác. Con đường chậm chạp hơn này thực sự cung cấp cho hạch hạnh biểu hiện tin cậy hơn của các kích thích thực và làm dừng phản ứng thái quá của con vật.

Như chúng ta vừa mới thấy, việc phát hiện trơ trọi đối xứng hai bên có lúc cũng đã rú còi đưa toàn bộ bộ máy sợ hãi (tiềm thức) vào hoạt động. Dưới những hoàn cảnh khác nhau, đối xứng hai bên, tự nó, cũng có thể tác động như một cơ chế bảo vệ chống-thú-săn-mồi. Nhiều động vật (được gọi chung là các động vật cảnh giới) dùng các tín hiệu khác nhau, như mùi, âm thanh và các hình mẫu màu sắc để thông báo sự nguy hiểm hay làm cho thú săn mồi thấy khó chịu. Ví dụ, một số loài bướm có những đốm mắt lớn nổi bật thường được giấu kín lúc bình yên nhưng sẽ được phô ra khi phát hiện các đối thủ tiềm năng. Sự xuất hiện đột ngột một cặp "mắt" thường khiến cho đối thủ phải bối rối đủ để con bướm có cơ hội trốn thoát. Trong số những tín hiệu báo động bằng thị giác khác nhau, mà các sinh vật cảnh giới thường sử dụng, các tín hiệu có đối xứng hai bên tỏ ra là có hiệu quả nhất. Đặc biệt, những thí nghiệm hấp dẫn sử dụng những "con bướm" giấy tự tạo với những hình mẫu cánh khác nhau để làm mồi cho những con gà nuôi trong nhà đã chứng tỏ rằng những hình mẫu lớn và đối xứng đã nâng cao giá trị bảo vệ của những phô bày cảnh báo thị giác như vậy lên đáng kể. Trong một thí nghiệm do các nhà nghiên cứu Thụy Điển tiến hành, những con bướm giấy (hình 99) được cài dưới các đĩa nhựa và cho những thức ăn vụn vào các đĩa đó. Trong mỗi lần xử lý, 45 con bướm đen đơn sắc với các vụn thức ăn ngon và 45 con bướm có tín hiệu cảnh giới với các vụn bánh có pha ký ninh, không ngon được đặt trên sàn nhà. Các con bướm cảnh giới có hình mẫu cảnh báo là đối xứng hoặc phi đối xứng, mỗi nhóm gà được mời ăn một loại bướm cảnh báo không ngon (đối xứng lớn, đối xứng nhỏ hoặc phi đối xứng). Những kết quả thí nghiệm gợi ý rằng phi đối xứng trong hình mẫu làm mất hiệu quả của những tín hiệu cảnh giới. Các nhà nghiên cứu kết luận rằng điều đó có thể do thực tế là những sai lệch với đối xứng đã làm lộ ra đáp ứng trung tính yếu hơn và do đó đã làm cho tín hiệu này trở nên khó phát hiện, khó nhớ và khó gắn kết với thức ăn không ngon đối với gà. Nhìn chung, những phát hiện của nghiên cứu này dẫn tới một kết luận thú vị: Các loại thú mồi có màu cảnh giới có thể dễ được chọn lọc tự nhiên ưu ái đối với những hình mẫu lớn và có đối xứng hai bên.



Hình 99

Một chính khách và triết gia người Anh Edmund Burke (1729-1797) đã từng nói rằng: "không có xúc cảm mạnh mẽ nào cướp mất của trí óc toàn bộ sức mạnh hành động và suy lý của nó một cách hiệu quả như là nỗi sợ hãi". Điều đó hẳn là đúng, nhưng đáp ứng tiềm thức đối với sự sợ hãi, thường được khởi phát bởi sự phát hiện ra đối xứng, có thể đôi khi là tất cả những gì cần thiết để thoát được thú săn mồi. Tương tự, trong lãnh vực báo hiệu, sự trưng bày những tín hiệu cảnh giới đối xứng, trong một số trường hợp, lại cung cấp một chiếc khiên bảo vệ chống lại các thú săn mồi tiềm năng.

Như vậy, vai trò của đối xứng trong cả hai loại cơ chế tránh-thú-săn-mồi (phát hiện và báo hiệu) là một vai trò mang tính tiêu cực. Theo một nghĩa nào đó, đối xứng như là một tác nhân xua đuổi, mặc dù quan trọng. Nhưng liệu đối xứng có thể gây ra những kích thích mang tính khích lệ và mời gọi không? Quá trình lựa chọn "bạn đời" cho thấy rằng thực sự là nó có thể, mà có lẽ thậm chí còn hơn là bạn trông đợi.

CHIM LÀM THẾ, ONG LÀM THẾ, THẬM CHÍ CON BỌ CHÉT CÓ GIÁO DỤC CŨNG LÀM THẾ

Tránh thú săn mồi và ăn thức ăn phù hợp là cực kỳ quan trọng để sống sót. Tuy nhiên, trên quan điểm các gen thì sống sót chỉ là một phương tiện để kết thúc. Ngay cả nếu như cả loài người thực hiện thành công những ý tưởng trong cuốn sách *Làm thế nào sống được trăm tuổi hoặc thọ hơn* của diễn viên hài George Burns, thì bản thân điều đó cũng không sử dụng bất cứ điều gì đối với các gen, trừ phi những người đó cũng sinh con. Sinh sản và truyền các gen cho thế hệ sau là tất cả những gì thực sự về gen. Như nhà sinh học tiến hóa và tác giả nổi tiếng Richard Dawkins từng nói: "Một cơ thể chẳng qua chỉ là một cách để các gen làm ra nhiều gen hơn mà thôi".

Trong một số loài, các cá thể có thể tự sinh sản – chúng tự phân đôi, mỗi phần là một sinh vật mới. Rõ ràng tự nhiên đã quyết định rằng quá trình vô tính như thế là kém vui, bởi vì khoảng 1,7 triệu loài trên Trái Đất đều dấn thân vào sinh sản hữu tính hết. Nghiêm trọng hơn, sinh sản hữu tính chắc có lẽ đã mang lại lợi ích thích nghi cho các loài, vì nếu không thế thì nó không thể thịnh hành đến như vậy. Một sự khác biệt rõ ràng (giữa con đường vô tính và hữu tính) là con cháu được tạo ra bằng sinh sản hữu tính có thể được hưởng lợi từ sự tráo đổi các gen của cha mẹ. Sự tạo lập bộ gen mới và hoàn thiện hơn có thể sẽ hạn chế những tổn thương do các đột biến có hại gây ra và nâng cao tính thích nghi của con cái. Tuy nhiên, để khai thác những ưu điểm của các cá thể cần phải chọn lọc người "bạn đời" thích hợp nhất. "Thích hợp nhất" từ quan điểm gen có nghĩa là "bạn đời" phải có những đặc tính làm tăng cơ may sống sót và sinh sản ra con cái. Điều này tương ứng với hai đặc điểm chính: chất lượng cao của gen (qua sự phù hợp) và khả năng chăm sóc của bố mẹ. Ở đây tôi sẽ chỉ tập trung vào đặc điểm thứ nhất vì nó có quan hệ trực tiếp nhất với đối xứng.

Con cái kế thừa 50% gen của mỗi bậc cha mẹ. Do đó, hôn phối với người có gen "tốt" có tầm quan trọng sống còn. Nhận thức này có từ chính Darwin, người đã thừa nhận rằng ngoài việc được dẫn động bởi chọn lọc tự nhiên để sống sót ra, sự tiến hóa cũng được hình thành bởi chọn lọc hữu tính thông qua sự lựa chọn "bạn đời". Tuy nhiên, ở đây đã xuất hiện câu đố chủ chốt. Rõ ràng là tổ tiên chúng ta ngày xưa không được trang bị các bộ thử ADN, vậy thì làm thế nào một cá nhân nào đó có thể đánh giá được sự phù hợp về gen của người bạn đời tiềm năng của mình? Ngay cả với những khả năng thử ADN mà ngày nay đang trở thành thông dụng, thì đa số mọi người cũng không dựa vào đó để chọn ý trung nhân của mình và những lựa chọn bạn đời tự nguyện của những con chim đuôi dài châu Phi hay các con công mái cũng không phụ thuộc vào các phép thử như vậy. Một sự hiểu biết đầy đủ quá trình lựa chọn bạn đời đòi hỏi không kém gì phải khám phá hết mọi bí ẩn của sự hấp dẫn giới tính, mà điều này rõ ràng là vượt ra ngoài khuôn khổ của quyển sách. Trong số rất nhiều phương diện thú vị của vấn đề này, tôi sẽ chỉ bàn về một số phương diện có liên quan một cách cụ thể đến đối xứng.

Vậy các bạn đời đã được lựa chọn như thế nào? Về cơ bản, cả động vật lẫn con người, ngoài những điều khác ra, đều tìm kiếm những chỉ dấu tin cậy về sự phù hợp. Họ tìm kiếm những đặc tính sinh học đã tiến hóa một cách đặc biệt để báo hiệu và thông báo sự phù hợp. Lưu ý rằng điều đó có nghĩa là trong cùng một khoảng thời gian những dấu hiệu phù hợp đó đã tiến hóa sao cho các hệ thống cảm giác có thể phát hiện và nhận ra. Tức là cái đít đỏ như lửa của loài khỉ baboon (ở châu Phi) sẽ chẳng có ích lợi gì trên phương diện tiến hóa nếu như không có sự ưa thích cái đít đỏ cùng phát sinh và tiến hóa trong hệ thống cảm giác của các bạn tình tiềm năng. Đặc điểm của con đực và sự ưa thích của con cái cùng tiến hóa tới những đặc tính thậm chí còn cực đoan hơn chừng nào lợi ích hôn phối chưa được cân bằng với một trở lực nào đó của chọn lọc tự nhiên theo hướng ngược lại. Nhiều nghiên cứu đã gợi ý rằng một trong những chỉ dấu sự phù hợp mạnh mẽ nhất là đối xứng hai bên. Để đánh giá quan niệm này, ta hãy xét một trường hợp cụ thể và thường được thảo luận, đó là cái đuôi của con công đực. Một cái đuôi lớn và đối xứng một cách hoàn hảo là lời thông báo to và rõ ràng với thế giới rằng "chủ nhân của tôi không có ký sinh trùng và không hề có những đột biến sai lạc". Những ký sinh trùng ở chim rất phổ biến và chúng đột biến nhanh đến nỗi bất cứ con chim nào tỏ ra là đã chinh phục được chúng phải có những gen rất khỏe. Một con công có ký sinh trùng sẽ phải có một cái đuôi đơn điệu và phi đối xứng. Nói cách khác, đối xứng hoàn hảo có thể là một chỉ dấu rất rõ ràng về sự bền vững trong phát triển. Ngay cả những sai lệch tương đối nhỏ đối với đối xứng hoàn hảo (gọi là *phi đối xứng thăng giáng*) cũng có thể tiết lộ bộ gen đó thích nghi tốt với môi trường xung quanh như thế nào.

Sự kết hợp giữa việc chọn bạn đời và chất lượng gen đã trở nên khá nổi tiếng từ sau một công trình có ảnh hưởng của hai nhà sinh học William Hamilton và Marlene Zuk công bố năm 1982. Hai nhà nghiên cứu này đã khảo sát các ký sinh trùng trong máu của những con chim ở Bắc Mỹ và mối quan hệ tiềm tàng của chúng với biểu lộ lôi cuốn sự chú ý. Kết quả đã gợi ý rằng các động vật quả thật đã chọn bạn đời để chống lại các bệnh di truyền bằng cách sàng lọc lấy các đặc tính mà biểu hiện của chúng phụ thuộc vào sức khỏe. Những thí nghiệm khác với chim én (của nhà sinh học Thụy Điển Anders Møller) và với chim sẻ vằn (của hai nhà sinh học Anh John Swalddle và Innes Cuthill) cũng đã chứng tỏ rằng các con cái thường dùng đối xứng như là một tiêu chuẩn để chọn bạn tình.

Một sự nhạy cảm tương ứng với các hình mẫu đối xứng cần phát triển dựa trên sự chấm dứt nhận được các tín hiệu phi đối xứng thăng giáng. Hai nhà sinh học Randy Thornhill, Andrew Pomiankowski và các đồng nghiệp đã đề xuất rằng những sự ưu ái đối với đối xứng đã tiến hóa trong các động vật chính xác là bởi vì thực tế là mức độ đối xứng trong các tín hiệu chỉ rõ chất lượng của kẻ phát ra tín hiệu đó. Đối xứng không thể bị giả mạo được. Bạn có thể thắc mắc là tại sao động vật lại trước hết phát triển những thứ trang sức lớn và khó vận hành như cái đuôi của con công, chẳng hạn. Nhà sinh học Israel Amotz Zahavi đã đưa ra một câu trả lời rất dễ chấp nhận mà sau này được biết tới như là *nguyên lý bất lợi* (*handicap principle*). Khi nhìn nhận lại, ý tưởng của Zahavi thật đơn giản. Cái giá cao (đối với sự phát triển và vận hành) của sự tô điểm giới tính chính là cái trước hết đã làm cho nó là dấu hiệu phù hợp đáng tin cậy và là chỉ dấu để lựa chọn bạn tình. Nếu có cô gái nào đó gọi điện thoại cho bạn nói rằng em yêu anh, thì điều đó thật tuyệt vời, nhưng nếu người đó bỏ đồng xu cuối cùng của mình ra để mua vé bay từ Nhật Bản đến gặp bạn thì điều đó chứng minh mức độ gắn kết ở mức sâu sắc hơn nhiều. Những thứ tô điểm cao giá và bảo trì công phu thực sự có tác dụng vì đó đúng là những phẩm chất khích lệ sự tin tưởng trong người bạn tình tiềm tàng. Những con đực có chất lượng cao có đủ điều kiện để dùng năng lượng dư thừa cần có cho những phô bày hoang phí như thế.

Không phải mọi người đều nhất trí rằng sự ưu ái đối với đối xứng nhất thiết phải là hệ quả của chuyện đối xứng là chỉ dấu của sự phù hợp. Trong một bài báo rất thú vị nhan đề "Đối xứng, Vẻ đẹp và Tiến hóa" nhà sinh học Thụy Điển Magnus Enquist và kỹ sư người Anh Anthony Arak đã đề xuất rằng sự ưu ái đối xứng có thể đơn giản là do các vật đối xứng dễ nhận dạng hơn là các vật phi đối xứng, bất kể sự định hướng của chúng là như thế nào. Xét cho cùng, một trong những vấn đề phải đối mặt của động vật là cần phải nhận dạng các vật với những định hướng và vị trí khác nhau ở trong trường thị giác. Bất cứ sự trợ giúp nào mà hệ thống tri giác có thể nhận được sẽ được đánh giá và ưu ái, và kết quả là có sự thiên vị về mặt cảm giác đối với đối xứng. Inquist và Arak đã dùng các mạng neuron nhân tạo như những mô hình của các hệ nhận dạng. Các mạng này là những hệ thống máy tính dựa một cách lỏng lẻo vào sự vận hành của bộ não có khả năng học hỏi kinh nghiệm để hoàn thiện kỹ năng của mình. Trong thí nghiệm của Inquist và Arak, sự ưu ái đối với đối xứng dứt khoát là sự khai thác cảm giác – một hệ quả của nhu cầu nhận dạng tín hiệu – và nó không có liên quan gì đến sự định giá chất lượng của gen cả. Những kết quả tương tự cũng đã nhận được trong một thí nghiệm với mạng neuron tách rời của nhà sinh học Rufus Johnstone thuộc Đại học Cambridge. Lại một lần nữa hệ quả thu được là sự ưu ái đối xứng trong việc chọn bạn tình chỉ là một sản phẩm phụ đơn giản đối với việc nhận dạng bạn tình chứ không phải vì mối liên hệ giữa mức độ của sự phi đối xứng thăng giáng và chất lượng của bạn tình.

Tuy nhiên, từ quan điểm của sự thảo luận ở đây, thì sự ưu ái đối với đối xứng trong việc lựa chọn bạn tình trong vương quốc động vật là kết quả của việc tìm kiếm chất lượng hay để nhận dạng là không thực sự quan trọng. Những ưu ái đối với đối xứng có thể đã tiến hóa do nhiều nguyên nhân. Tuy nhiên, điều quan trọng là *có một sự ưu ái đối với đối xứng*, nghĩa là đối xứng đóng vai trò quan trọng đối với sự lựa chọn bạn tình.

TÌNH YÊU THÌ LIÊN QUAN GÌ ĐẾN ĐỐI XỨNG?

Con người là động vật rất phức tạp. Một sự hòa trộn không thể tách rời của tâm lý học tiến hóa, văn hóa và dân tộc, các đức tin khác nhau, những mối quan tâm và đặc tính cá nhân sẽ quyết định con người thấy cái gì là hấp dẫn. Nhưng sâu hơn nữa, ham muốn sinh sôi của các gen vẫn còn là một trong số những quyền lực mạnh mẽ trong đầu óc con người. Trong sự tìm kiếm một bạn tình mạnh khỏe, phồn thực, bộ óc của chúng ta đã được lập trình cũng không khác tổ tiên của chúng ta ở thời đại đồ đá là bao nhiêu. Cái đẹp có thể tùy thuộc vào con mắt của người ngắm, nhưng như nhà tâm lý học tiến hóa David Buss từng nói: "Những con mắt đó và những bộ óc đằng sau các con mắt ấy đã được hình thành bởi hàng triệu năm tiến hóa của con người". Cảm giác cái gì là hấp dẫn phần lớn được quyết định bởi bộ máy ra-quyết-định thích nghi và bộ máy này cũng tiến hóa ít nhất cũng một phần là vì sự lựa chọn bạn tình.

Nếu như bạn nghĩ rằng tính hấp dẫn là không quan trọng, thì bạn nên nghĩ lại. Anna Kournikova được xếp thứ 70 về tennis nữ trong gần suốt năm 2003, nhưng chị đã kiếm được nhiều triệu đôla ở những đồng tài trợ hơn cả những tay vợt có thứ hạng cao hơn chị đáng kể. Nếu như bạn thắc mắc tại sao lại như vậy, thì đây là một gợi ý cho bạn: Kournikova đã hai lần xuất hiện trên bìa của tạp chí *Maxim*. Những người sáng tạo ra Chương trình tin tức *20/20* của hãng ABC đã tiến hành một thí nghiệm nhằm đo lường xem những người đàn ông và đàn bà hấp dẫn nhận được sự đối xử ưu ái hơn như thế nào. Trong một cuộc thử nghiệm ở Atlanta, hai nữ diễn viên ăn mặc như nhau, mỗi người đứng với vẻ vô vọng cạnh một chiếc xe hơi đã hết xăng. Đối với cô diễn viên nhìn hơn trung bình một chút, thì có một số ít người đi bộ dừng lại, nhưng chỉ để chỉ cho cô ta trạm xăng gần nhất. Còn đối với cô diễn viên nhìn hấp dẫn hơn, thì có không ít hơn một tá xe ô tô dừng lại và có tới 6 lái xe đi lấy xăng cho cô ta!

Trong thí nghiệm thứ hai, chương trình *20/20* thuê hai người đàn ông đến nộp đơn xin việc. Hai ứng viên có học vấn và kinh nghiệm làm việc như nhau, và thậm chí ngay cả những khác biệt nhỏ tồn tại trong sơ yếu lý lịch của họ cũng đã bị loại đi. Tuy nhiên, có một sự khác biệt dễ nhận thấy giữa hai người, đó là một người nhìn rất hấp dẫn, còn người kia thì nhìn bình thường thôi. Bạn có tin hay không thì tùy, nhưng người phỏng vấn rất muốn người có ngoại hình hấp dẫn hơn quay trở lại sớm nhất có thể để thử việc, trong khi người có ngoại hình bình thường nhận được câu trả lời "đừng gọi điện cho chúng tôi, chúng tôi sẽ gọi điện cho bạn".

Ngay cả một khu vực trong não đáp ứng lại cái đẹp cũng đã được nhận dạng. Các nhà nghiên cứu Hans Breiter, Nancy Etcoff, Itzhak Aharon và các cộng sự đã dùng máy tạo hình cộng hưởng từ (MRI) để nghiên cứu hoạt động của não người khi họ được cho xem các bức ảnh của những người đàn bà đặc biệt hấp dẫn. Các nhà nghiên cứu đã phát hiện ra rằng cái đẹp đã phát động cùng một vùng của não giống như thức ăn (khi người ấy đói) hay những đối tượng đam mê khác (ví dụ, khi một người đam mê cờ bạc nhìn thấy bánh xe roulette).

Trong một thời gian dài người ta cho rằng tiêu chuẩn đối với cái đẹp chủ yếu là văn hóa, do đó học được chứ không phải bẩm sinh. Những nghiên cứu mới đây của nhà tâm lý học Judith Langlois thuộc Đại học Texas ở Austin đã hoàn toàn lật đổ niềm tin truyền thống đó. Trước hết bà đề nghị những người đàn ông đã trưởng thành xếp hạng các bức ảnh chụp cả phụ nữ da trắng lẫn da đen theo độ hấp dẫn. Sau đó các bức ảnh được đưa ra theo từng cặp (một bức hấp dẫn hơn bức kia) cho những đứa trẻ thuộc hai độ tuổi – từ hai đến ba tháng và từ sáu đến tám tháng tuổi. Người ta đã phát hiện ra rằng bọn trẻ trong cả hai nhóm đều nhìn lâu hơn vào những bộ mặt được xếp hạng cao hơn. Tương tự, những đứa trẻ một tuổi cũng chơi lâu hơn với những con búp bê với gương mặt hấp dẫn hơn.

Những nghiên cứu khác đã thử nghiệm đối với những thay đổi thị hiếu qua các nền văn hóa. Nhà tâm lý học Michael Cunningham đã phát hiện ra sự đồng thuận không thể tin nổi trong việc đánh giá độ hấp dẫn của các gương mặt phụ nữ thuộc các chủng tộc khác nhau bởi những người đàn ông thuộc các chủng tộc khác nhau. Sự nhất trí vẫn duy trì ngay cả khi đã xem xét tới cả mức độ xuất hiện khác nhau trên các phương tiện thông tin đại chúng. Những nghiên cứu được thực hiện ngang qua các biên giới địa lý và dân tộc (ví dụ, với những đàn ông Trung Quốc, Ấn Độ, Nam Phi và Bắc Mỹ) cũng đưa lại những kết quả tương tự. Gộp cả lại, tất cả những nghiên cứu đó dường như đều chỉ ra rằng tồn tại một số tiêu chuẩn phổ quát về tính hấp dẫn, và rằng những gương mặt hấp dẫn có được sự quyến rũ vươn rất xa, xuất hiện ngay từ đầu đời và nhất quán qua các nền văn hóa. Những cơ quan phát hiện cái đẹp có thể không hoàn toàn là bẩm sinh, nhưng bộ óc con người có thể đã có những quy tắc cơ bản bẩm sinh từ đó dựng nên các khuôn mẫu của tính hấp dẫn.

Như vậy có thể là có sự thiên vị đối với "vẻ bên ngoài", nhưng cái gì đã làm cho đàn ông và đàn bà trở nên hấp dẫn? Nhà sinh học Randy Thornhill, nhà tâm lý học Steve Gangestad và nhà phong tục học Karl Grammer đã thu thập được một lượng lớn bằng chứng chứng tỏ đối xứng là yếu tố then chốt. Thornhill, Gangestad và các cộng sự của họ đã tiến hành đo đạc đối xứng trong gần một ngàn sinh viên về các đặc điểm khác nhau của gương mặt (như vị trí của các góc mắt, con ngươi, gò má, các đường viền của miệng, v.v...) và các đặc điểm của thân thể (như bề rộng của chân, bề rộng của tay, bề rộng khuỷu tay, chiều dài của tai, chiều dài của tay thứ hai và thứ năm, v.v...) để phát triển một chỉ số tổng thể về tính phi đối xứng. Khi Thornhill và Gangestad lập sự tương quan của những số liệu đó với những định giá độc lập của tính hấp dẫn, họ phát hiện ra rằng những người kém đối xứng hơn ở cơ thể hoặc trên gương mặt đều được coi là kém hấp dẫn hơn.

Trong một nghiên cứu riêng biệt, Grammer và nhà sinh học Anja Rikowski đã tìm thấy mối quan hệ giữa đối xứng và mùi hương hấp dẫn của cơ thể. Trong một nghiên cứu có sự tham gia của 16 đàn ông và 19 đàn bà, mỗi người mặc một chiếc áo phông liền trong ba đêm dưới những điều kiện có thể kiểm soát. Ngay lập tức sau khi dùng, những chiếc áo phông này làm lạnh sâu và chỉ ngay trước khi đánh giá về mùi nó mới được sưởi nóng tới nhiệt độ cơ thể. Sau đó, mười lăm đối tượng thí nghiệm của cả hai giới tính được xếp hạng về độ gợi tình của mùi theo một thang 7 điểm. Hai mươi người đàn ông và đàn bà còn lại đánh giá chân dung của những đối tượng trên theo độ hấp dẫn, và những chỉ số về đối xứng của các đối tượng đó cũng được tính toán dựa trên bảy đặc điểm. Kết quả cho thấy sự hấp dẫn của gương mặt và độ gợi tình của mùi cơ thể luôn đi kèm với nhau đối với các đối tượng là đàn bà. Hơn nữa, những người đàn ông phát hiện ra rằng cơ thể của phụ nữ càng đối xứng thì mùi cơ thể của cô ta càng gợi tình. Thật thú vị là phụ nữ phát hiện ra rằng mùi cơ thể của những người đàn ông đối xứng hơn cũng sẽ là quyến rũ hơn chỉ khi người đàn bà ở giai đoạn dễ thụ thai nhất trong chu kỳ kinh nguyệt.

Có lẽ bất ngờ nhất là Thornhill, Gangestad đã phát hiện ra mối liên hệ giữa đối xứng và sự đạt tới điểm cực khoái của người phụ nữ. Hai nhà nghiên cứu này lý luận rằng nếu những cực khoái của người phụ nữ là sự thích nghi được thiết kế để đảm bảo những gen khỏe mạnh cho con cái của họ thì những người phụ nữ sẽ đạt cực khoái nhiều hơn với những người đàn ông cân đối hơn. Tiến hành nghiên cứu với 86 cặp sinh viên quan hệ tình dục khác giới, hai nhà nghiên cứu đã phát hiện ra rằng thực tế những người phụ nữ có bạn tình đối xứng nhất sẽ có tần số đạt cực khoái cao hơn hẳn. Điều hơi bất ngờ là hai nhà nghiên cứu đã không tìm thấy một tương quan nào giữa sự đạt cực khoái của phụ nữ trong giao hợp và mức độ quyến luyến lãng mạn hay kinh nghiệm tình dục của bạn tình. Trước khi một bạn đọc nữ lao đi tìm kiếm một chàng trai cân đối, tôi xin lưu ý rằng các nghiên cứu cũng chứng tỏ rằng những người đàn ông cân xứng nhất bao giờ cũng đầu tư ít nhất vào các mối quan hệ và hay lừa dối các bạn tình của họ hơn. Sự đạt cực khoái của phụ nữ dường như ít phụ thuộc vào việc bạn tình là một người nổi tiếng hơn là vào việc đánh giá sự thích hợp về gen đã được phát sinh từ thời kỳ Đồ đá giá lạnh.

Nghiên cứu độc lập của các nhà tâm lý học Todd Shackelford và Randy Larsen đã chứng tỏ rằng đối xứng trên gương mặt người có tương quan rõ rệt với những chỉ dấu khác của sự phù hợp, cả trên phương diện sinh lý cũng như tâm lý. Đặc biệt, những người đàn ông có gương mặt phi đối xứng được phát hiện là có nhiều khả năng dễ chán nản, thất vọng, hay hốt hoảng, đau đầu, khó tập trung và thậm chí có vấn đề về dạ dày. Còn những người đàn bà có gương mặt phi đối xứng cũng thường thấy là có sức khỏe kém, rất dễ mất ổn định về tình cảm và hay chán nản. Hơn nữa, đối xứng còn là ám chỉ khác của tuổi trẻ, vì khi người ta già đi, thì gương mặt sẽ trở nên kém đối xứng hơn.

Bức tranh vừa xuất hiện có tính gợi ý cao. Cũng như trong thế giới động vật, quá trình chọn bạn tình có thể đã nhận dạng đối xứng như là một chỉ dấu tốt của sự phù hợp, đối với con người cũng vậy, đối xứng hai bên được coi như biểu hiện của ổn định phát triển, tuổi trẻ và sự kháng lại những bệnh lý làm suy nhược khác nhau. Kết quả là, xét theo khía cạnh "sức hút" của người và động vật, thì đối xứng trở thành gần như đồng nghĩa với *hấp dẫn*.

Tôi không muốn gây cho các bạn ấn tượng rằng đối xứng là phẩm chất duy nhất ảnh hưởng tới tính hấp dẫn. Nhà tâm lý học Judith Langlois và các cộng sự của bà đã nhấn mạnh tính trung bình của gương mặt là hấp dẫn nhất. Langlois đã tạo bằng máy tính những bức ảnh là hỗn hợp của bốn, tám, mười sáu, ba mươi hai gương mặt. Bà ngạc nhiên là đã phát hiện ra rằng những mặt hỗn hợp ấy thường lại được xem là hấp dẫn hơn là những gương mặt cá lẻ đã tạo nên chúng. Ảnh hỗn hợp của mười sáu gương mặt được xếp hạng cao hơn là những bức ảnh là hỗn hợp của bốn hay tám gương mặt cá lẻ, còn ảnh hỗn hợp của ba mươi hai gương mặt được thấy là hấp dẫn nhất. Trong khi những gương mặt hỗn hợp, do cách dựng, có xu hướng đối xứng hơn, Langlois còn phát hiện ra rằng ngay cả khi những hiệu ứng của đối xứng đã bị kiểm soát thì tính trung bình vẫn được coi là hấp dẫn hơn. Những phát hiện này đã biện hộ cho ý tưởng về sự lập các nguyên mẫu nhất định trong bộ óc vì tính trung bình có thể kết đôi chặt chẽ với một khuôn mẫu nguyên thủy.

Nhà khoa học về nhận thức David Perrett thuộc Đại học St. Adrews ở Scotland đã phát hiện ra rằng những khuôn mặt mà chúng ta thấy hấp dẫn thường có sức lôi cuốn vì chúng nhìn giống như gương mặt của chúng ta, hoặc gương mặt của cha mẹ chúng ta. Cảm thấy thú vị về kết quả đó, trong một lần tới thăm Đại học St. Andrews tôi đã gọi điện thoại cho ông để hỏi tại sao ông lại nghĩ rằng đó là sự lựa chọn có tính thích nghi. Đầu tiên, ông nhấn mạnh rằng để cho bộ óc có thể trợ giúp việc lựa chọn bạn tình nó cần phải là một hệ học hỏi. “Đặc biệt”, ông nói thêm, “bộ óc cần có khả năng khóa chặt vào một số thứ quan yếu trong môi trường gần gũi – giống như đối xứng hay tính trung bình. Tìm ra ai đó giống [bạn hoặc cha mẹ bạn] là hấp dẫn cũng có thể có ý nghĩa bởi vì gia đình bạn đã thành công sống sót qua con đường tiến hóa”.

Những nhân tố khác có ảnh hưởng tới việc lựa chọn bạn tình có liên quan đến những chỉ dấu của sự phồn thực, của cải, khả năng và sự sẵn sàng chăm sóc với vai trò là bố mẹ. Ví dụ, những nghiên cứu của nhà tâm lý học Devendra Singh cho thấy rằng trong hầu hết các trường hợp, những người đàn ông đều ưa thích những người đàn bà có dáng "chiếc đồng hồ cát" với tỷ lệ eo/mông đặc trưng là 0,7. Lý do thích nghi nằm phía sau sự ưa thích đó có thể là thực tế rằng tỷ số đó cũng được phát hiện ra là một chỉ dấu tốt của sự phồn thực. Sự đối xứng của bộ ngực cũng được phát hiện là có liên quan tiềm tàng với sự ưa thích. Những khảo sát khác cũng phát hiện thấy phụ nữ thường thích những người đàn ông hơi nhiều tuổi hơn mình có lẽ bởi vì họ thích đàn ông có của cải.

Ngay cả một mô tả ngắn gọn những kết quả và ý tưởng của tâm lý học tiến hóa mà tôi vừa trình bày ở chương này dường như cũng dẫn tới một kết luận không tránh khỏi. Hoặc là vì sự chọn bạn tình, do nhận dạng, do tránh thú săn mồi hay là sự kết hợp của cả ba, *trí óc của chúng ta được thu hút tới và tinh chỉnh để phát hiện ra đối xứng*. Do đó, câu hỏi đối xứng có thực sự là cơ bản đối với chính bản thân vũ trụ hay chỉ đơn giản là cơ bản với vũ trụ mà con người nhận thức được, đang trở nên đặc biệt nhức nhối.

ĐỐI XỨNG CÓ THỰC SỰ THỐNG TRỊ?

Hãy thử hình dung điều gì sẽ xảy ra nếu mắt người chỉ nhạy với màu xanh. Trước khi phát triển được các dụng cụ phát hiện ánh sáng khác, các nhà khoa học lẽ tự nhiên phải kết luận rằng mọi thứ trong vũ trụ đều màu xanh (ngay cả ý nghĩ cũng cho tôi màu xanh). Tương tự, các công ty kiểm soát nạn dịch hạch sản xuất các bẫy chuột dài 3 inch có thể cũng đã kết luận rằng tất cả các con chuột đều ngắn hơn 3 inch, vì các con chuột thực sự bẫy được đều có chiều dài như vậy. Đó là những ví dụ đơn giản của các *hiệu ứng chọn lọc* quan sát – tức là sự lọc lựa thực tại vật lý được đưa vào do những thiên vị không nhận thức được hoặc là trong phương pháp quan sát hoặc là trong các dụng cụ quan sát. Vậy thì liệu sự ưa thích của trí óc chúng ta đối với đối xứng có đưa vào một sự thiên vị tương tự trong nhận thức của chúng ta về cái thực sự là cơ bản trong vũ trụ không?

Tôi cần phải nhấn mạnh một lần nữa ở đây rằng tôi chỉ tập trung xem xét các đối xứng của các định luật vật lý và sự mô tả những đối xứng đó bằng cách sử dụng lý thuyết nhóm, chứ không vào đối xứng của những cấu trúc cụ thể nào trong tự nhiên, mà các tinh thể hoàn hảo là một ví dụ. Các tinh thể này nhìn chính xác như nhau khi chúng ta chuyển động trong tinh thể một đoạn nhất định theo các hướng khác nhau. Tinh thể học là một khoa học nghiên cứu những cấu trúc và tính chất của những tập hợp gồm một số rất lớn các đơn vị giống hệt nhau. Bản thân các đơn vị này có thể được cấu thành từ các nguyên tử, phân tử, hoặc trong một bối cảnh trừu tượng hơn, thậm chí từ các mã máy tính. Một trong những câu hỏi điển hình trong tinh thể học là: làm thế nào mà một số lượng lớn các đơn vị đồng nhất lại có thể sắp xếp trong không gian sao cho mỗi đơn vị lại có thể "nhìn thấy" những thứ xung quanh nó đều là đồng nhất. Lý thuyết nhóm là một công cụ thiết yếu của tinh thể học – những ý định nhằm trả lời cho câu hỏi trên đã dẫn đến chứng minh được rằng có tồn tại chỉ 230 các loại nhóm đối xứng không gian khác nhau (cũng như chỉ có 7 nhóm đối xứng của những hình mẫu kiểu sợi dài; xem Chương 7).

Các nguyên lý đối xứng cũng thể hiện mình trong cấu trúc của rất nhiều các phân tử và cơ thể sinh học, từ các protein kết tinh và ADN tới các virus. Tất cả những đối xứng đó hiển nhiên là quan trọng, vì chúng biểu diễn các hệ bền vững (có năng lượng cực thiểu) và đến lượt mình các hệ này tạo nên các khoáng chất và chất liệu sống. Tuy nhiên, đó không phải là những đối xứng nằm ẩn dưới các định luật cơ bản của tự nhiên.

Khi nói tới các định luật thì điều tuyệt đối chắc chắn là đối xứng và lý thuyết nhóm là những khái niệm cực kỳ *hữu ích*. Không đưa đối xứng và ngôn ngữ của lý thuyết nhóm vào vật lý hạt thì sự mô tả các hạt cơ bản và các tương tác của chúng sẽ chỉ còn là một cơn ác mộng cực kỳ rối rắm. Lý thuyết nhóm thực sự làm hiện ra trật tự và nhận dạng các hình mẫu mà không một bộ máy toán học nào khác làm được.

Trong một cuộc phỏng vấn vào năm 1985, nhà toán học Andrew Gleason thuộc Đại học Harvard đã nói "Tất nhiên toán học sẽ có tác dụng đối với vật lý! Nó được thiết kế ra để thảo luận chính xác những tình huống mà vật lý đang đối mặt; cụ thể là, dường như có một trật tự nào đó ở đó, hãy đi tìm xem trật tự đó là gì". Ngoài sự hữu ích của nó, đối xứng còn tước bỏ đi những thứ dư thừa trong sự mô tả cả các hệ thực cũng như các hệ trừu tượng. Ví dụ, hãy hình dung một hệ nào đó được biểu diễn một cách ký hiệu bằng xâu các ký tự

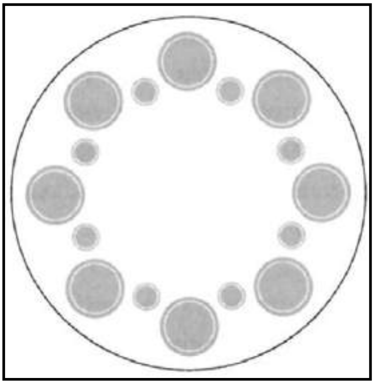
XYZXYZXYZXYZXYZ

Ta có thể dùng đối xứng tịnh tiến của các ký hiệu để vứt bỏ đi những dư thừa và rút gọn sự mô tả về dạng gọn gang hơn nhiều: 5 * (XYZ), đọc là "lặp lại xâu con XYZ năm lần". Tương tự, trong xâu

UVWXYZZYXWVU

chúng ta có thể dùng đối xứng phản xạ để rút gọn xâu này thành *SYM*(UVWXYZ), trong đó toán tử *SYM* chỉ rằng đây là phép phản xạ. Do đó, câu hỏi thực sự đặt ra là có phải đối xứng đã quả thật được nhúng vào cấu trúc của tự nhiên hay nó chỉ biểu hiện một cách thuận tiện cho chúng ta để xây dựng một cuộc đối thoại với thực tại vật lý. Đây không phải là câu hỏi dễ trả lời. Trên một số bước dọc theo con đường đi tới lý thuyết tối hậu của vũ trụ thì đối xứng dường như là cơ bản hơn những thứ khác. Ví dụ, đối xứng cơ bản giữa hai người quan sát bất kỳ - cơ sở của thuyết tương đối – là một đối xứng chính xác thực sự đặc trưng cho cách thức vận hành của tự nhiên. Trái lại, một trong những mẫu nguyên tử đầu tiên có tên là *mẫu Elliott* được mô tả bởi một đối xứng (và một nhóm tương ứng) nhưng đây chỉ là một đối xứng gần đúng và hầu như chắc chắn không phải là cơ bản.

Một vấn đề tiềm tàng đối với một số đối xứng chuẩn được coi là nền tảng của mô hình chuẩn là vấn đề *phá vỡ đối xứng*. Tôi xin phép được giải thích một cách ngắn gọn khái niệm này. Hãy nhìn từ trên xuống một bàn ăn trên hình 100 trong đó các đĩa nhỏ dùng để đặt bánh mì. Tất cả các chỗ ngồi xung quanh bàn là đồng nhất (giống hệt nhau) và theo quan điểm của một người ngồi ở bàn ăn này thì bên trái hay bên phải anh ta là không thể phân biệt được. Do đó cấu hình này là đối xứng cả với phép quay (một số nguyên lần của 360 : 8 = 45 độ) và đối với phép phản xạ (qua tám trục). Tuy



Hình 100

nhiên, ngay khi bánh mì được bày ra, và người đầu tiên lấy bánh đặt vào đĩa (người ta bảo với tôi là cô ta đặt bánh vào đĩa bên trái) thì đối xứng đã "tự phát bị phá vỡ". Trái và phải trở nên khác nhau và bất biến quay không còn nữa.

Cần nhớ rằng trong lý thuyết điện yếu, lực điện từ và lực yếu là hai mặt của một đồng xu (Chương 7). Các hạt truyền lực – photon, W và Z – có thể tráo đổi cho nhau. Một vấn đề ngay lập tức xuất hiện là: thế thì tại sao, trong vũ trụ ngày hôm nay, hai lực này lại có những biểu hiện khác nhau đến như vậy (ví dụ, lực này mạnh hơn lực kia tới 100 ngàn lần). Mô hình chuẩn đã buộc tội điều này cho phá vỡ đối xứng. Theo một kịch bản phổ biến nhất thì rất ngắn ngay sau thời điểm vũ trụ ra đời (sự kiện mà chúng ta gọi là Big Bang), sự đối xứng hoàn hảo giữa lực điện từ và lực yếu là thực sự tồn tại. Ở nhiệt độ cực cao đặc trưng cho pha đó, photon, W và Z thực sự là những hạt không phân biệt được. Tuy nhiên, khi vũ trụ giãn nở lớn lên và lạnh đi, vũ trụ phải chịu một quá trình chuyển pha – không khác gì sự đông đặc của một chất lỏng – trong đó xảy ra sự phá vỡ đối xứng. Người ta cho rằng điều đó đã xảy ra khi vũ trụ mới được một phần nhỏ của giây tuổi. Sự tương tự với chất lỏng, thực tế, còn có thể duy trì thêm một bước nữa. Một chất lỏng sẽ nhìn không có gì thay đổi khi quay nó, nghĩa là nó không có phương nào là ưu tiên cả. Nhưng đối xứng này không còn nữa khi chất lỏng hóa rắn. Cấu trúc tinh thể xuất hiện khi đó sẽ có một số trục được ưu ái hơn. Sự phá vỡ đối xứng giữa lực điện từ và lực yếu gắn liền với sự "đóng băng" đó của vũ trụ đã được tin là đã sinh ra những khác biệt mà chúng ta quan sát thấy ngày hôm nay. Các hạt W và Z có khối lượng còn photon thì không. Tầm tác dụng của lực yếu bị giới hạn về khoảng cách tới cỡ kích thước hạt nhân chỉ là vì những hạt mang lực này quá nặng nề và chậm chạp.

Đối với người ngoại đạo thì mô tả ở trên nghe chả khác gì một câu chuyện cổ tích vậy. Một người như thế có thể nghĩ rằng các nhà vật lý hạt đã bịa ra một đối xứng cho rằng nó đặc trưng cho những lực cơ bản của tự nhiên, và khi vũ trụ ngày hôm nay được phát hiện ra là không tuân theo đối xứng đó thì họ lại sáng tác ra một kịch bản phá vỡ đối xứng quá ư thuận tiện. Thực ra, địa vị của lý thuyết này vững chắc hơn rất nhiều so với mô tả ở trên gợi ý. Nhiều tiên đoán của mô hình chuẩn đã được xác nhận một cách thật ngoạn mục bởi thực nghiệm (Chương 7). Ngay cả những kiểm chứng thực nghiệm quan trọng hơn về toàn bộ sơ đồ phá vỡ đối xứng cũng chẳng bao lâu nữa sẽ trở nên khả thi. Cũng theo cách giống như điểm đóng băng của chất lỏng có thể được đánh giá từ các khối lượng nguyên tử và năng lượng liên kết các nguyên tử với nhau, người ta cũng có thể dùng các tham số đã biết của mô hình chuẩn để đánh giá năng lượng ở điểm phá vỡ đối xứng. Những năng lượng được đòi hỏi này hoặc đã có trong tầm tay của các máy gia tốc hạt lớn – như máy Tevatron ở Fermilab thuộc Đại học Chicago – hoặc sẽ đạt tới bởi LHC ở Geneva khoảng năm 2007. Chí ít ra thì những thí nghiệm được chờ đợi này sẽ nói cho chúng ta biết những ý tưởng lý thuyết về phá vỡ đối xứng có đúng hay không. Và chính các thí nghiệm này cũng có thể kiểm chứng cả những tiên đoán của siêu đối xứng. Cần nhớ rằng nếu thế giới thực tuân theo siêu đối xứng thì toàn bộ các hạt mới đang chờ đợi phải được phát hiện ra. Electron có spin ½ sẽ phải có một hạt đối ứng có spin 0 (gọi là "selectron"), photon có spin 0 sẽ phải có hạt đối ứng có spin ½ gọi là "photino" và những hạt đối ứng tương tự được tiên đoán tồn tại tương ứng với các hạt trong mô hình chuẩn.

Tuy nhiên, nói một cách chặt chẽ thì ngay cả sự xác nhận bằng thực nghiệm của phá vỡ đối xứng cũng không chứng minh được một cách dứt khoát đối xứng là cơ bản chứ không chỉ hữu ích. Như chúng ta đã thấy, siêu đối xứng vẫn chỉ là một đặc điểm của lý thuyết dây chứ không phải là nguồn phát sinh của nó. Nguyên lý nằm ẩn bên dưới của lý thuyết này vẫn còn chưa được khám phá ra và nó có thể có hoặc không chứng tỏ là một nguyên lý đối xứng.

Có một nguyên nhân khác giải thích tại sao chúng ta lại phải thận trọng trước khi tung hô đối xứng như là một động lực chủ yếu của sự phát sinh và vận hành của vũ trụ, và lý thuyết nhóm như là ngôn ngữ hàng đầu của nó. Nguyên nhân này có lẽ sẽ được minh họa rõ nhất khi chúng ta sử dụng ví dụ về những quy tắc huyết thống-hôn nhân của người Kariera. Cần nhớ rằng các quy tắc đó của một bộ lạc thổ dân đã được chứng minh là lập nên một nhóm có cùng cấu trúc như nhóm bốn phần tử nổi tiếng của Klein. Tuy nhiên, không có nghi ngờ gì rằng, người Kariera không hề có ý định để những quy tắc của họ biểu diễn một cấu trúc toán học cụ thể nào đó. Do đó, chúng ta phải đối mặt với một tình huống mà ở đó chúng ta nhận dạng được một công cụ toán học có thể mô tả thực tại một cách hoàn hảo, nhưng cũng ở đó những nguyên nhân thực đối với thực tại vẫn còn chưa biết. Động cơ thực sự đã dẫn những người Kariera lựa chọn một tập hợp cụ thể những quy tắc này có thể ít liên quan với trật tự mà chúng ta đã nhận ra trong đó, ngay cả mặc dù sự phân tích sâu xa hơn có thể phát lộ ra rằng những quy tắc ấy bảo đảm cho một xã hội ổn định.

Trong khi tôi đang vật lộn với câu hỏi đối xứng thực sự là cơ bản như thế nào, tôi quyết định tiến hành một cuộc điều tra nhỏ trong nhóm các nhà vật lý và toán học hàng đầu thế giới để tìm ra họ nghĩ gì về vấn đề này. Steve Weinberg, giải thưởng Nobel về vật lý năm 1979 và là một trong số những người đóng vai trò chủ chốt trong sự phát triển mô hình chuẩn đã nhất trí rằng đối xứng không thể là khái niệm cơ bản nhất trong một lý thuyết tối hậu. Ông nói thêm: "Tôi ngờ rằng cuối cùng nguyên lý vững chắc duy nhất là nguyên lý nhất quán về mặt toán học". Ed Witten, người nhận Huy chương Fields về toán học năm 1990 và là người đã mang đến cuộc cách mạng lần thứ hai của lý thuyết dây cũng nhấn mạnh rằng "vẫn còn những thành tố bị bỏ sót hoặc chưa biết trong lý thuyết dây" và "một số khái niệm như hình học Riemann trong thuyết tương đối rộng có thể tỏ ra là cơ bản hơn đối xứng". Ngài Michael Atiyah, người nhận Huy chương Fields năm 1966 và giải thưởng Abel năm 2004, đã nói bóng gió đến những hiệu ứng chọn lọc dẫn-dắt-bộ-não-của-con-người. "Chúng ta cần mô tả tự nhiên với một số cách nhìn khác", ông nói, "Mô tả toán học của chúng ta là chính xác, nhưng có thể còn có những cách mô tả tốt hơn. Việc dùng các nhóm Lie ngoại lệ có thể là một tạo tác mà chúng ta nghĩ ra". Câu cuối cùng, đặc biệt, khiến tôi nhớ tới một phát biểu lý thú khác của nhà toán học và triết gia nổi tiếng Bertrand Russell (1872-1970): "Vật lý là toán học không phải bởi vì chúng ta biết quá nhiều về thế giới vật lý mà bởi vì chúng ta biết quá ít về nó; những cái chúng ta phát minh ra chỉ là các tính chất toán học của nó". Nói một cách khác, Russell thậm chí đã nhìn thấy được mô tả vũ trụ của chúng ta thông qua toán học đang tiến gần một cách nguy hiểm tới một loại hiệu ứng chọn lọc. Freeman Dyson, một trong những nhân vật chính tham gia phát triển điện động lực học lượng tử và là người được nhận giải thưởng Wolf về vật lý năm 1981, đã đưa ra, như mọi khi, quan điểm rất độc đáo của mình: "Tôi cảm thấy rằng chúng ta thậm chí còn chưa bước vào giai đoạn đầu của quá trình tìm hiểu tại sao vũ trụ lại là như thế". Sau vài giây suy nghĩ ông nói thêm: "Ngay cả những điều đơn giản như chúng ta có khả năng nói được một đường có là thẳng hay không hay có phân biệt được vòng tròn với đường elip hay không đều là những điều tự bản thân chúng còn bí ẩn cả". Liên quan đến đối xứng, ông thú nhận rằng ông không thích từ "cơ bản" mà thích từ "có hiệu quả" hơn khi nói về đối xứng như một nguồn của các lực (như trong tường hợp đối xứng chuẩn của lý thuyết điện yếu). Cuối cùng, ông lưu ý rằng đối xứng và lý thuyết nhóm đã trở thành những công cụ mô tả mạnh hơn nhiều từ khi đưa vào cơ học lượng tử.

Vậy, từ tất cả những nhận thức sâu sắc đó về vai trò của đối xứng trong tấm thảm của vũ trụ, chúng ta có thể rút ra kết luận gì? Sự tổng kết thiển cận của cá nhân tôi là thế này: chúng ta vẫn còn chưa biết đối xứng có là khái niệm cơ bản nhất trong sự vận hành của vũ trụ hay không. Một số đối xứng mà các nhà vật lý phát hiện ra hoặc được thảo luận trong nhiều năm sau này đã được nhận ra chỉ là tình cờ hay chỉ là gần đúng mà thôi. Những đối xứng khác, như bất biến tổng quát trong thuyết tương đối rộng và các đối xứng chuẩn trong mô hình chuẩn đã trở thành các chồi búp mà từ đó các lực và các hạt mới bừng nở. Tóm lại, trong đầu tôi hoàn toàn không có nghi ngờ gì rằng đối xứng hầu như luôn luôn nói cho chúng ta biết điều gì đó quan trọng, và chúng có thể cung cấp cho chúng ta những manh mối và những nhận thức sâu sắc có giá trị nhất trên con đường tiến tới khám phá và giải mã ra những nguyên lý nằm ẩn bên dưới của vũ trụ, bất kể chúng là gì đi nữa. Theo nghĩa đó thì đối xứng quả là có hiệu quả.

Trong *Những bài giảng của Feynman về vật lý*, cuốn sách dựa trên giáo trình mà nhà vật lý nổi tiếng Richard Feynman đã giảng trong năm học 1961-1962, ông đã kết luận phần bàn về đối xứng của ông như sau:

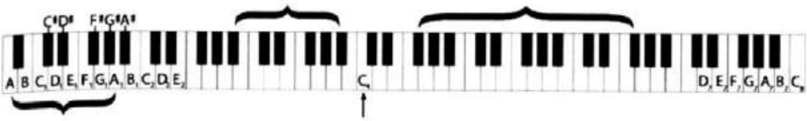
> Vậy vấn đề của chúng ta là phải giải thích xem đối xứng đã tới từ đâu. Tại sao tự nhiên lại gần như là đối xứng? Không ai biết hết. Điều duy nhất mà chúng tôi có thể gợi ý là như thế này: Ở Nhật Bản có một cái cổng, cái cổng ở Neiko, mà đôi khi người Nhật gọi là chiếc cổng đẹp nhất trên toàn nước Nhật. Chiếc cổng này được xây dựng vào thời chưa có những ảnh hưởng lớn tới từ nghệ thuật Trung Quốc. Cổng này được xây dựng rất kỳ công, có rất nhiều cột chống và những chạm khắc rất đẹp. Cổng cũng có nhiều hàng cột trên có trạm khắc các đầu rồng và các vua và hoàng tử, v.v... Nhưng khi nhìn thật kỹ, ta sẽ thấy rằng trong thiết kế kỳ công và phức tạp dọc theo các cột có một chi tiết nhỏ được khắc lộn ngược, nếu không thì toàn bộ bản thiết kế là hoàn toàn đối xứng. Nếu ai hỏi tại sao lại như thế, thì hóa ra câu chuyện là thế này: chi tiết đó phải khắc lộn ngược để cho các thần khỏi ghen tị với sự hoàn hảo của con người. Nghĩa là người ta cố ý đặt một lỗi nhỏ ở đó để các thần không ghen tị và nổi giận với con người. Chúng tôi muốn đảo ngược cái ý tưởng này lại và nghĩ rằng sự giải thích cho tính gần đối xứng của tự nhiên là như sau: Chúa Trời đã làm cho các định luật chỉ là gần đối xứng thôi để chúng ta không ghen tị với sự hoàn hảo của Ngài!

Các đối xứng gắn với các định luật của tự nhiên không phải là chủ đề duy nhất mà trong đó di sản của Galois phát sinh và tiếp tục phát sinh ra những ý tưởng mới. Chúng ta ít nhất có thể hưởng một chút hương vị của di sản vĩ đại đó bằng cách xem xét một số ví dụ đơn giản, trải rộng trong các lĩnh vực hoạt động nghệ thuật và trí tuệ từ âm nhạc cho tới đại số hiện đại.

NIỀM ĐAM MÊ NÀO MÀ ÂM NHẠC KHÔNG THỂ LÀM TRÀO DÂNG VÀ CHẾ NGỰ ĐƯỢC?

Tiêu đề của mục này được vay mượn từ tác phẩm "Một bài ca cho ngày Thánh Cecilia" của nhà thơ và kịch tác gia người Anh nổi tiếng John Dryden (1631-1700). Bữa tiệc của ngày Thánh Cecilia (22 tháng 11) để tưởng nhớ huyền thoại nói rằng vị thánh của âm nhạc này đã phát minh ra đàn organ. Chủ đề của bài thơ này là nhằm ca ngợi sức mạnh của âm nhạc. Thực vậy, ít có các hình thái nghệ thuật nào lại gắn bó với cả những trạng thái xúc cảm và nhịp điệu của cơ thể con người như là âm nhạc. Ví dụ, nhịp thở và nhịp tim có quan hệ gần gũi với mức độ và bản chất những hoạt động của chúng ta và với cường độ hưng phấn hay sợ hãi của chúng ta. Nhiều bản nhạc, nhưng có lẽ không bản nào sánh được với bản *Boléro* của Ravel, đã phản ánh trực tiếp những nhịp điệu đó của cuộc sống. Thực tế, trong bộ phim "*10*" sản xuất năm 1979 của Blake Edwards, bản *Boléro* đã được tuyên bố là âm thanh tuyệt vời nhất cho cuộc làm tình. Như tôi đã nhận xét trong Chương 1, nói rằng đối xứng đóng vai trò chính yếu trong âm nhạc là nói lên một điều hiển nhiên. Do đó, chỉ còn kỳ vọng rằng lý thuyết nhóm sẽ mô tả được những cấu trúc và các hình mẫu âm nhạc một cách đẹp đẽ mà thôi.

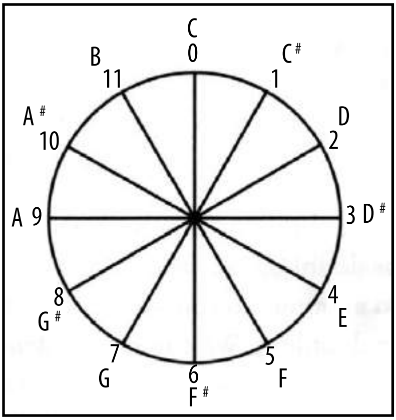
Các nốt trên bàn phím đàn piano là một ví dụ đơn giản cho mối quan hệ âm nhạc-nhóm. Cao độ của âm được đặc trưng bởi *tần số* dao động (ví dụ, của dây đàn). Tần số được đo bằng số dao động trong một giây hay hertz (ký hiệu là Hz), theo tên nhà vật lý Đức Heinrich Rudolf Hertz. Ví dụ, tần số của nốt C trung (hay "đô" trong gam trưởng) trên bàn phím đàn piano (hình 101) là 261,6Hz. Tần số của nốt A4 (hay "la") là 440Hz. *Quãng tám* được định nghĩa sao cho tỷ số các tần số đúng bằng 2. Một quãng tám cao hơn nốt C trung có tần số bằng $261{,}6 \times 2 = 523{,}2$Hz và một quãng tám thấp hơn có tần số $161{,}6 : 2 = 130{,}8$Hz. Các nốt cách nhau đúng một số nguyên lần quãng tám có cùng tên và nghe giống nhau. Trong hệ thống phân bố đều được Bach phổ biến trong tuyển tập đầy ấn tượng các khúc dạo đầu và các fugue của ông, mọi phím đều có địa vị ngang nhau. Tỷ số giữa các tần số của hai phím bất kỳ cạnh nhau luôn là như nhau và bằng 1,05946. Con số này (bằng căn bậc 12 của 2) nhận được đơn giản bằng cách đòi hỏi rằng khi nâng lên lũy thừa bậc 12 (có 12 bán cung (*semitone*) hay nửa bước trong một quãng tám) sẽ cho kết quả là 2, tương ứng với nốt cao hơn một quãng tám.



Hình 101

Nhà toán học cổ Hy Lạp Pythagoras là người được cho là đã phát minh ra rằng hai nốt tương ứng với các tần số có tỷ số bằng tỷ số của hai số nguyên tối giản (ví dụ như $3:2$) sẽ cho các âm hài hòa và êm ái. Ví dụ, một quãng năm hoàn hảo được đặc trưng bởi tỷ số tần số là $3:2$, tương ứng với sự ngăn cách nhau 7 nửa cung (nghĩa là khi nâng 1,05946 lên lũy thừa bậc 7 ta sẽ được con số gần với 1,5). Một quãng bốn hoàn hảo sẽ tương ứng với tỷ số tần số là $4:3$ và 5 nửa cung.

Vì có 12 bán cung trong một quãng tám, nên sẽ là thuận tiện nếu ta biểu diễn chúng trên một mặt đồng hồ, như trên hình 102.

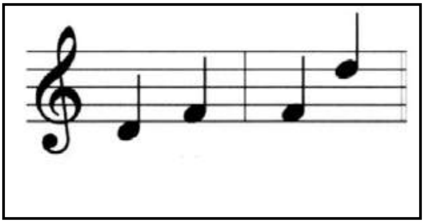


Hình 102

Ta có thể dịch chuyển từ một nốt bất kỳ sang một nốt khác bằng cách làm đúng như khi ta tính toán giờ trong ngày vậy. Ví dụ, khi chúng ta muốn biết thời gian 9 giờ sau 7h giờ tối là mấy giờ theo đồng hồ, ta tính $7+9=16=4$ giờ sáng (vì 12 được coi là 0 giờ). Cộng các số theo cách đó trong toán học gọi là *cộng theo modulo* 12. Ví dụ, $8+7=15=3$ (theo modulo 12) và $10+2=12=0$ (theo modulo 12)[1]. Các bán cung của hệ thống phân bố đều cũng tuân theo đúng quy tắc đó. Nếu bạn muốn biết nốt nào ở trên nốt D# (hình 102) 10 bán cung, bạn chỉ cần tính $3+10=13=1$ (theo modulo 12) = C#. Tập hợp các số {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} hoặc các nốt tương ứng trên âm giai lập nên một nhóm đối với phép cộng theo modulo 12. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra tính đóng của tập hợp này - ví dụ $9+4=13=1$ (theo modulo 12) – và tính kết hợp. Phần tử đồng nhất chính là số 0 và phần tử nào cũng có một nghịch đảo (đó là phần tử cộng với phần tử đang xét bằng 12). Ví dụ, quãng năm hoàn hảo (tương ứng với 7 bán cung) là phần tử nghịch đảo của quãng 4 (có 5 bán cung), bởi vì $7+5=12=0$ (theo modulo 12). Điều này thật có ý nghĩa ngay cả trên quan điểm thuần túy âm nhạc, vì khi hai khoảng này được kết hợp lại sẽ tương ứng với tỷ số tần số là $3/2 \times 4/3 = 2$, đó chính là một quãng tám, nghĩa là sẽ cho cùng một âm. Thực tế, rất

[1] *Cách làm rất dễ, bạn chỉ cần lấy tổng thu được chia cho 12, số dư nhận được chính là kết quả cộng theo modulo 12 - ND*

phù hợp là chính các nhạc sĩ đã gọi hai khoảng kết hợp lại cho một quãng tám là "đảo" của nhau. Một ví dụ khác về hai khoảng đảo như vậy (hình 103) là quãng ba thứ (tỷ số 5:3; 3 bán cung) và quãng sáu trưởng (tỷ số 5:3; 9 bán cung), vì $3+9=12=0$ (theo modulo 12).



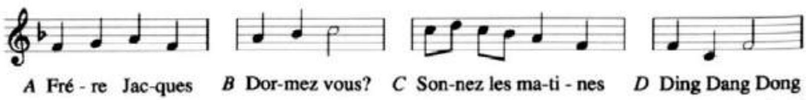
Hình 103

Các nhóm thể hiện không chỉ trong âm giai, mà cả trong các cấu trúc của một số hình thái âm nhạc. Một trường hợp đơn giản là một bản *canon* ngắn trong đó mỗi bè vào lần lượt hát cùng một giai điệu như trong bản "Anh em nhà Jacque" (*Frère Jacques*) (hình 104)

Nếu tôi ký hiệu bốn câu nhạc khác nhau lần lượt bằng các chữ cái A, B, C, D (hình 104) thì cấu trúc được biểu diễn bởi AABBCCDD (mỗi câu đều được lặp lại) và bản canon này viết cho bốn bè hát đuổi có dạng:

1: A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B C C D D
2: _ _ A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B C C
3: _ _ _ _ A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B
4: _ _ _ _ _ _ A A B B C C D D A A B B C C D D A A

Lưu ý rằng nếu có bè thứ năm vào thì nó đơn giản là lặp lại hoặc hòa theo bè thứ nhất. Thực tế, khi bắt đầu từ một bè nào đó, nếu chúng ta tiếp tục thêm các bè vào thì bốn bè vào theo cách trên sẽ tạo nên sự hài hòa. Bây giờ chúng ta có thể ký hiệu *a* là lệnh "vào



Hình 104

sau hai gạch (- -)". Điều đó sẽ đưa chúng ta chuyển từ bè này tới bè tiếp theo. Cũng vậy, ta ký hiệu a^2 (hay $a \circ a$) là "vào sau bốn gạch", a^3 là "vào sau 6 gạch" và a^4 là "vào sau 8 gạch" sẽ hòa vào cùng một bè, hay nghĩa là phần tử đồng nhất. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng bốn lệnh I, a, a^2, a^3 (với I là phần tử đồng nhất) lập thành một nhóm với phép "nhân" (ví dụ, a và a^3 là nghịch đảo của nhau, vì $a \circ a^3 = a^4 = I$).

Rõ ràng cả Bach cũng như bất cứ nhà soạn nhạc cổ điển nào khác, khi họ sáng tác âm nhạc đều không có mảy may khái niệm gì về lý thuyết nhóm cả. Nhưng nó (lý thuyết nhóm) luôn len lỏi vào sự mô tả các hình mẫu âm nhạc, đơn giản bởi vì chính bản chất của nó là ngôn ngữ của các đối xứng. Một số nhà soạn nhạc của thế kỷ 20, mà nổi tiếng nhất là Arnold Schroenberg, Alban Berg và Anton Webern từ Trường phái Vienna thứ hai được coi là đã lưu tâm nhiều hơn đến âm nhạc dựa trên toán học. Đặc biệt, trong "phương pháp soạn nhạc với 12 cung (*tone*)" được sử dụng trong các bản nhạc như *Lyric Suite* của Berg hoặc bản Concerto cho piano của Schroenberg, tất cả các hòa âm đều dựa trên "hàng 12 cung" (*12 – tones row*), tức trên thực tế là sự hoán vị của 12 nốt bán cung phổ biến. Một hàng 12 cung có thể được dùng hoặc theo trật tự gốc (do nhà soạn nhạc chọn) hoặc có thể được biến đổi hơn nữa nhờ một số phép. Các nhà soạn nhạc trường phái Vienna thường dùng ba phép cơ bản, đó là *phép đảo hàng*, *phép giật lùi* và *phép đảo giật lùi*. Trong phép đảo hàng, những khoảng đi xuống được thay bằng những khoảng đi lên và ngược lại. Ví dụ, nếu hàng gốc bắt đầu với C và nâng lên quãng bốn hoàn hảo đến F thì dòng đảo sẽ hạ một quãng bốn tới G (hình 102). Phép giật lùi đảo ngược lại trật tự các bước nhảy (*jump*) giai điệu. Nếu bước nhảy cuối cùng trong hàng gốc đi lên một quãng ba trưởng thì nó sẽ là bước nhảy đầu tiên của hàng mới. Cuối cùng, phép đảo giật lùi áp dụng đồng thời cả phép đảo dòng và giật lùi. Bạn dễ dàng có thể tự kiểm tra thấy rằng ba phép biến đổi trên và phép đồng nhất (tức "tuyệt đối không làm gì cả") tạo nên một nhóm với phép toán là "tiếp theo bởi". Đặc biệt, mỗi phần tử của nhóm này là nghịch đảo của chính mình.

Nhiều người, kể cả những người nhiệt thành đi nghe giao hưởng, đều cảm thấy khó chịu với thứ âm nhạc mới phi giai điệu (*atonal*) như họ đã từng được nghe những bản nhạc thử nghiệm của Igor Stravinsky, Aaron Copland, Pierre Boulez, Luciano Berio và nhiều người khác. Những thành viên của nhóm thính giả phản đối nhạc không giọng điệu có lẽ lập luận rằng việc các nhà soạn nhạc sử dụng toán học (dù là có cân nhắc kỹ lưỡng) đều không giúp gì cho chất lượng của âm nhạc cả. Tuy nhiên, bất chấp quan điểm thế nào về âm nhạc không giọng điệu, cũng không thể phủ nhận một thực tế là sự thử nghiệm "toán học" của Schroenberg và thậm chí còn hơn thế nữa của Webern đã toang cánh cửa cho thứ Âm nhạc tiên phong mới khá thú vị và là cảm hứng cho trào lưu *serialism*[1]. Cuộc cách mạng này trong âm nhạc đã thay thế tất cả các quy tắc và quy ước truyền thống bằng một loạt cấu trúc của các nốt chi phối toàn bộ tác phẩm. Âm nhạc đầy hấp dẫn của các nhà soạn nhạc như Olivier Mesiaen và Milton Babbitt đã bắt nguồn từ những thay đổi triệt để đó.

Âm nhạc là một hình thái nghệ thuật có liên quan chỉ với những khái niệm rất cơ bản của lý thuyết nhóm. Tuy nhiên, sự phát triển của bản thân lý thuyết nhóm đã không dừng lại ở đầu thế kỷ 20. Thực ra, một chứng minh của lý thuyết nhóm mới được hoàn tất vào tháng 8 năm 2004, trên một số phương diện, là một chứng minh phức tạp nhất trong lịch sử toán học.

---

[1] *Một phương pháp hay kỹ thuật soạn nhạc trong đó có sử dụng các dãy (seri) nối tiếp các yếu tố âm nhạc.*

CUỘC "CHIẾN TRANH 30 NĂM" HAY SỰ THUẦN HÓA ÁC QUỶ

Những nỗ lực khoa học thường là cuộc tìm kiếm những viên gạch cơ bản nhất. Đối với cấu trúc của vật chất thì cuộc săn tìm nhiều thế kỷ này đã dẫn tới sự phát hiện ra các phân tử và nguyên tử, sau đó là các proton và neutron, rồi sau đó nữa là các hạt cơ bản của mô hình chuẩn (quark, electron, neutrino, muon và tau), và cuối cũng là gợi ý về các dây. Trong khoảng bao la rộng lớn của không gian, giờ đây các nhà thiên văn cũng đang tìm kiếm những ngôi sao và các đám sao đầu tiên đã được tạo nên trong vũ trụ - đó là những cấu kiện tạo nên các thiên hà khổng lồ hôm nay. Trong lý thuyết nhóm sự săn tìm là để phân loại tất cả các nhóm đơn (tức là nhóm không có những nhóm con chuẩn tắc không tầm thường) mà từ đó có thể tạo dựng nên tất cả các nhóm khác. Như chúng ta đã thấy trong Chương 7, sự phân loại có tính cột mốc của các nhóm Lie đơn đã được Wilhelm Killing và Elie Cartan thực hiện vào cuối thế kỷ 19. Nhóm Lie là nhóm các biến đổi liên tục (như phép quay trong không gian ba chiều) đã được Sophus Lie định nghĩa vào năm 1874. Do bản chất của chúng, các nhóm Lie có một số vô hạn các phần tử (ví dụ, có một số vô hạn các góc quay khả dĩ). Nhưng người ta chỉ cần định rõ một số hữu hạn các tham số đặc trưng hoàn toàn cho nhóm Lie bất kỳ là đủ. Ví dụ, các phần tử của nhóm quay vòng tròn trên một mặt phẳng, thường ký hiệu là SO(2) hay U(1), được xác định hoàn toàn bằng cách chỉ rõ một tham số - đó là góc quay. Do đó, chiều của nhóm này là 1. Nhóm các phép quay một quả cầu trong không gian ba chiều có thể được đặc trưng bởi ba tham số: hai góc xác định trục quay và một góc của chính phép quay. Do đó, nhóm này, ký hiệu là SO(3), có số chiều là 3. Killing và Cartan đã tìm ra bốn họ vô hạn các nhóm Lie (theo truyền thống được ký hiệu là A_m, B_m, C_m, D_m với m = 1, 2, 3, 4,...) và năm nhóm ngoại lệ (*sporadic*) đứng riêng rẽ không nằm trong khuôn khổ của bốn họ trên. Những nhóm sporadic này thường được ký hiệu là G_2, F_4, E_6, E_7 và E_8, chúng có chiều lần lượt bằng 12, 52, 78, 133 và 248. Như chúng tôi đã mô tả trong Chương 7, các nhóm Lie đơn đóng vai trò cực kỳ quan trọng trong mô hình chuẩn và tỏ ra có thể là một công cụ thiết yếu của lý thuyết dây.

Sự phân loại các nhóm đơn hữu hạn hóa ra là một nhiệm vụ kinh hoàng hơn nhiều so với tương đương nhóm Lie của nó. Vào cuối thế kỷ 19, người ta đã biết 6 họ vô hạn và 5 nhóm đơn hữu hạn ngoại lệ. Một trong những họ này đã được định nghĩa không bởi ai khác hơn là chính Galois khi ông vật lộn với tính không giải được của phương trình bậc năm. Cần nhớ rằng trong một hoán vị chẵn của một tập hợp các đối tượng có một số chẵn các chuyển vị so với trật tự tự nhiên hoặc trật tự ban đầu (Chương 6), còn trong một hoán vị lẻ có một số lẻ các chuyển vị. Ví dụ, 1324 là một hoán vị lẻ của 1234, vì trong đó chỉ có một chuyển vị (3 đứng trước 2), nhưng 4321 là một hoán vị chẵn vì bạn có thể kiểm tra là ở đây có tới 6 chuyển vị. Ở Chương 6 chúng ta đã biết rằng tập hợp các hoán vị của n đối tượng tạo nên một nhóm có n! phần tử. Thực tế, định lý Cayley phát biểu rằng mỗi nhóm bất kỳ đều có cùng cấu trúc với một nhóm các hoán vị. Tập hợp các hoán vị chẵn của một số đối tượng bất kỳ cũng tạo nên một nhóm, đó là nhóm con của nhóm đầy đủ các hoán vị. Điều này có thể dễ dàng hiểu được: nếu một hoán vị chẵn liên quan tới một số chẵn các chuyển vị thì khi thực hiện một hoán vị chẵn thứ hai thì rõ ràng là tổng số các chuyển vị cũng vẫn sẽ là chẵn, điều đó có nghĩa là tính đóng được thỏa mãn. Nhóm các phép hoán vị chẵn được gọi là *nhóm luân phiên*. Galois đã chứng minh được rằng các nhóm luân phiên nhận được từ các hoán vị có hơn bốn đối tượng đều là các nhóm đơn, và đó chính là tính chất mà ông đã dùng để chứng minh tính không giải được bằng một công thức của phương trình bậc năm.

Họ thứ hai các nhóm đơn được các nhà toán học biết tới vào cuối thế kỷ 19 là loại mà chúng ta đã gặp trong âm giai. Cũng hệt như cách mà các số từ 0 đến 11 lập nên một nhóm đối với cộng theo modulo 12, các số từ 0 đến $n - 1$ cũng lập thành một nhóm đối với phép cộng theo modulo n đối với mọi giá trị của n. Các nhóm này được gọi là các *nhóm cyclic* và các nhóm cyclic với n là một số nguyên tố đều là nhóm đơn. Bốn họ các nhóm đơn hữu hạn còn lại là tương đương theo nhiều cách với bốn họ của các nhóm Lie. Năm 1955, nhà toán học Pháp Claude Chevalley (1909-1984) đã phát hiện ra những họ mới của các nhóm đơn. Thực tế, ông đã tìm ra rằng các nhóm Lie *sporadic* là nguồn của các họ các nhóm đơn hữu hạn. Và cuối cùng người ta đã nhận dạng ra 18 họ các nhóm đơn này.

Câu chuyện về các nhóm đơn *sporadic* đã được bắt đầu từ nhà toán học Pháp Émile Léonard Mathieu (1835-1890). Giữa năm 1860 và 1873, trong khi nghiên cứu các hình học hữu hạn, Mathieu đã phát hiện ra 5 nhóm đơn *sporadic* đầu tiên. Phải mất trọn một thế kỷ, tới tận năm 1965, nhà toán học Nam Tư Zvonimir Janko mới phát hiện ra nhóm đơn *sporadic* tiếp theo. Thực ra, sự tồn tại của nhóm này và vài nhóm đơn khác nữa đã được tiên đoán trước khi chúng được phát hiện ra. Cũng như đối xứng SU(3) tiên đoán sự tồn tại của hạt ômega trừ (Ω-), Janko đã chứng minh được rằng nếu một nhóm đơn với các tính chất nào đó phải tồn tại thì nó nhất thiết phải chứa 175 560 phần tử. Sau những tính toán hết trang này đến trang khác, sự tìm kiếm của Janko đã có kết quả và ông đã xây dựng thành công một nhóm đơn mà hiện nay gọi là nhóm J_1. Phát minh của Janko đã kết thúc một thế kỷ ngủ đông và đánh dấu sự mở đầu của cả một thập kỷ phát minh. Giữa năm 1965 và 1975 người ta đã xây dựng được không ít hơn 21 nhóm đơn *sporadic*, mang lại tổng số là 26 nhóm đơn này (ngoài ra còn có 18 họ nữa). Nhóm lớn nhất trong số 26 nhóm đơn ngoại lệ, thường được gọi là "con quỷ" chứa

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961
710 757 005 754 368 000 000 000

phần tử, một con số thật khủng! Phân tích con số này ra thừa số nguyên tố, nó có dạng

$$2^{46}\times 3^{20}\times 5^{9}\times 7^{6}\times 11^{2}\times 13^{3}\times$$
$$17\times 19\times 23\times 29\times 31\times 41\times 47\times 59\times 71$$

Sự tồn tại của nhóm con quỷ đã được tiên đoán bởi nhà toán học Đức Bernd Fischer và nhà toán học Mỹ Robert Griess (một cách độc lập) vào năm 1973 và đã được Griess xây dựng vào năm 1980. Ngoài ra, Fischer còn phát hiện ra bốn nhóm *sporadic* khác như Janko đã làm ở Australia và Đức. Ở Anh, John Conway còn phát hiện ra thêm 3 nhóm nữa.

Sự nhận dạng ra 18 họ và 26 nhóm đơn *sporadic* mới chỉ là điểm xuất phát cho một trong những dự án ấn tượng và thách thức nhất trong lịch sử toán học. Mục đích đặt ra thật rõ ràng: đó là chứng minh một cách dứt khoát sự phân loại là đã vét cạn mọi khả năng của các nhóm đơn hữu hạn. Nói cách khác là chứng minh rằng mọi nhóm đơn hữu hạn hoặc là một thành viên thuộc một trong số 18 họ hoặc là một trong số 26 nhóm đơn *sporadic*. Daniel Gorenstein, người nhận trách nhiệm dự án khủng này, sau này đã gọi nó là "cuộc chiến tranh 30 năm" vì đã có rất nhiều nỗ lực phân loại đã thành công trong 30 năm từ 1950 đến 1980.

Daniel Gorenstein (1923-1992) lớn lên ở Boston, học ở Harvard và bắt đầu quan tâm đến các nhóm hữu hạn từ khi còn là sinh viên. Trong Chiến tranh Thế giới thứ hai, ông dạy toán cho giới quân sự, như một đóng góp của ông cho cuộc chiến. Sau chiến tranh, ông trở về Harvard học sau đại học và đã nhận bằng tiến sĩ ở đây năm 1950. Sau ít năm làm việc chủ yếu trong lĩnh vực hình học đại số, ông quay sang nghiên cứu các nhóm hữu hạn vào năm 1957 và tham gia nghiên cứu sự phân loại các nhóm đơn hữu hạn vào năm học 1960-1961.

Ngoài những phát minh thực sự ra 21 nhóm đơn hữu hạn *sporadic* ra, hai sự kiện khác đã là công cụ để dàn dựng cho cuộc tấn công ào ạt vào bài toán phân loại. Một là bài giảng ở Amsterdam của nhà toán học Mỹ gốc Đức Richard Brauer (1901-1977). Trong bài giảng quan trọng này, Brauer đã đề xuất một phương pháp phân loại dựa trên sự nhận dạng các "nhân" nhỏ của các nhóm đơn mà về các tính chất chúng giống với chính nhóm mẹ. Ý tưởng của Brauer là dùng các nhân này như một bước đầu tiên để kiểm tra xem một nhóm tùy ý thực tế có thể đồng nhất với một trong những nhóm đơn đã biết hay không.

Yếu tố cực kỳ quan trọng thứ hai đối với cuộc chiến phân loại là một định lý quan trọng được chứng minh năm 1963 của hai nhà toán học Walter Feit và John Thompson thuộc Đại học Chicago. Định lý này về cơ bản phát biểu rằng mọi nhóm đơn hữu hạn (không là cyclic) đều phải có một số chẵn các phần tử. Trong khi sự đúng đắn của phát biểu này đã được nhà toán học Anh William Burnside (1852-1927) tiên đoán vào năm 1906 và được gọi là *phỏng* *đoán Burnside thứ hai*, chứng minh thực sự năm 1963 của Feit và Thompson đã chiếm trọn một số (255 trang) của tạp chí toán học *Pacific Journal of Mathematics*. Tác động của chứng minh này là hết sức to lớn. Cả các ý tưởng cũng như các phương pháp trong bài báo đó đã trở thành nền tảng cho những nỗ lực phân loại sau này. Như Gorenstein mô tả vào năm 1989 "Dưới tác động rất lớn của định lý bậc lẻ [định lý Feit-Thompson có thể phát biểu một cách tương đương là: các nhóm hữu hạn với số lẻ các phần tử là giải được] sự quan tâm tới lý thuyết nhóm hữu hạn đã được thức tỉnh. Xuyên suốt thời gian 15 năm tiếp sau, một danh sách dài các nhà toán học trẻ đầy tài năng, những người sẽ đóng vai trò chủ lực trong chứng minh phân loại, đã được thu hút vào lĩnh vực này". Được trang bị những nhận thức sâu sắc của Brauer cùng với định lý Feit-Thompson, năm 1972, Gorenstein đã phác thảo một kế hoạch 16 bước để hoàn tất chứng minh phân loại. Ông đã diễn đạt sự lạc quan thận trọng của mình: chứng minh đầy đủ sẽ có thể đạt được vào cuối thế kỷ 20.

Căn cứ vào chứng minh có sự tham gia của khoảng 100 nhà toán học, những người đã viết ra khoảng 15 ngàn trang chứng minh đăng trên 500 bài báo, đánh giá ban đầu của Gorenstein về thời gian hoàn thành chứng minh này dường như chắc chắn sẽ không vượt quá. Thực tế, nhà toán học, ở Đại học bang Ohio Ron Salomon, một trong số những người đi đầu trong nỗ lực này, đã viết vào năm 1995: "Không một nhà lý thuyết nhóm đơn hàng đầu nào, ngoài Gorenstein, vào năm 1972, tin rằng sự phân loại có thể hoàn thành trong thế kỷ này". Tuy nhiên, như thường xảy ra trong toán học, một con người có thể làm nên một sự khác biệt rất lớn. Đối với định lý phân loại, người đó là nhà toán học thuộc Caltech Michael Aschbacher. Thông qua một loạt các cuộc tấn công chói sáng, ông đã phá vỡ được một ít các khối cản trở quan trọng, đột phá được một phần lớn của chứng minh. Theo lời của Gorestein:

> Có nhiều nhà lý thuyết nhóm xuất sắc khác đã có những đóng góp đáng kể vào chứng minh định lý phân loại. Nhưng việc bước vào lĩnh vực này đầu những năm 1970 của Aschbacher đã làm thay đổi căn bản quang cảnh của lý thuyết nhóm đơn. Nhanh chóng nhận lấy vai trò lãnh đạo trong cuộc theo đuổi định lý phân loại đầy đủ, ông đã đưa toàn bộ "nhóm nghiên cứu" đi theo mình trong suốt mười năm sau đó cho tới khi chứng minh hoàn tất.

Thực tế, trước sự kinh ngạc của mọi người, chứng minh được coi là hoàn tất vào đầu năm 1983. Nhưng vì chứng minh quá dài, nên Gorenstein, Solomon, và nhà toán học Richard Lyons đã hợp sức vào năm 1982 để thực hiện dự án xem xét lại nhằm tạo ra một phiên bản ngắn hơn và mạch lạc hơn. Và rồi ít năm sau, người ta đã nhận ra một số lỗ hổng trong chứng minh chính. Và phải tới 2004, mọi thứ mới được khép lại trong một công trình gồm hai tập của Aschbacher và nhà toán học Stephen Smith thuộc Đại học Illinois. Dự án xem xét lại của Gorenstein-Lyons-Solomon cũng tiến triển rất tốt, với sáu cuốn chuyên khảo đã công bố hoặc sắp công bố. Tuy nhiên, người ta đã cần phải mất ít nhất 5 năm nữa để hoàn tất dự án đồ sộ này.

Nghiên cứu các nhóm hữu hạn trong những năm gần đây đã kết nối chặt chẽ với nhiều lĩnh vực khác của toán học, từ tôpô tới lý thuyết đồ thị. Một số người ngờ vực nhưng còn chưa khám phá một cách đầy đủ mối quan hệ tiềm tàng có thể có với lý thuyết trường lượng tử.

Galois đã đưa vào khái niệm nhóm và đã xây dựng được họ nhóm đơn hữu hạn đầu tiên với mục khá khiêm tốn là chứng minh các phương trình nào là giải được bằng một công thức và các phương trình nào thì không. Ông chắc sẽ vô cùng sung sướng nếu được nhìn thấy những thành quả mà sự bắt đầu rất khiêm nhường đó đã sản sinh ra. Ron Solomon đã mô tả rất hay về những kết quả của "cuộc chiến tranh 30 năm": "Sự bùng nổ của toán học trong thời vàng son nghiên cứu các nhóm đơn đã phát sinh những nhận thức sâu sắc đầy kinh ngạc về các cấu trúc của các nhóm hữu hạn và đã khám phá ra một số đối tượng hấp dẫn nhất trên bầu trời toán học."

IX

Khúc tưởng niệm một thiên tài lãng mạn

Nếu tính từ cổ Babylon đến giờ có nhiều ngàn nhà toán học đã từng sống thì những ai là người có ảnh hưởng nhất đây? Nhà toán học kiêm tác giả Clifford Pickover tiến hành một cuộc điều tra không chính thức nhằm trả lời chính câu hỏi đó, và ông đã đưa ra một danh sách các tên tuổi *top ten* trong cuốn sách giải trí của ông nhan đề *Những điều kỳ diệu của các con số*. Évariste Galois có tên trong bản danh sách xuất sắc đó (đứng thứ 8), thậm chí mặc dù con người lãng mạn đầy đau khổ đó đã qua đời ở tuổi 20. Vậy cái gì đã làm cho một số cá nhân, về mặt sáng tạo, cao hơn hẳn những người khác? Và làm thế nào mà tính sáng tạo tràn ngập phong phú như vậy lại có thể bộc lộ ở một độ tuổi trẻ như thế? Nếu như tôi có thể trả lời chính xác các câu hỏi đó thì chắc rằng nhiều nhà tâm lý học, nhà sinh học, nhà giáo dục và các công ty sẽ đánh giá rất cao. Nhưng vì tôi không thể, nên thay vì thế, tôi xin trình bày ngắn gọn một số ý tưởng về chủ đề này và xét xem nếu và bằng cách nào áp dụng cho Galois.

Thứ nhất, tôi xin làm rõ rằng khi dùng cụm từ tính sáng tạo phi thường là tôi muốn nói rằng đó là sự sáng tạo có tác động văn hóa to lớn – một ý tưởng hay một hành động mang lại một sự thay đổi có ý nghĩa. Những ví dụ hiển nhiên là sự xây dựng nền tảng cho phân tâm học của Sigmund Freud và sự phát biểu các định luật chuyển động của Newton.

Nhà tâm lý học Mihaly Csikszentmihalyi thuộc Đại học Chicago đã chỉ ra một cách sâu sắc rằng về chính bản chất của mình, sáng tạo không chỉ là điều gì đó chỉ diễn ra trong đầu óc ai đó. Để tuyên bố một ý tưởng hay một thành tựu nào đó là "sáng tạo" chúng ta cần phải so sánh nó với những tiêu chuẩn hiện có. Ví dụ, chúng ta có thể nói mà không cần phải dè dặt rằng thuyết tương đối rộng là một trong những lý thuyết sáng tạo nhất mọi thời đại chỉ sau khi phán xét nó trên cái nền của tất cả các lý thuyết khác về vũ trụ. Do đó, sự sáng tạo luôn liên quan tới các mối quan hệ ít nhất là giữa ba yếu tố: cá nhân sáng tạo; lĩnh vực mà trong đó hành động sáng tạo xảy ra (ví dụ, toán học hay một phần nào đó của nó; âm nhạc, văn học); và môi trường của những người đóng vai trò kiểm tra và đánh giá (ví dụ, các nhà toán học khác, những người quản lý các bảo tàng, các bạn đọc và các nhà phê bình văn học). Theo bất cứ tiêu chuẩn nào thì Galois cũng là người sáng tạo một cách đáng kinh ngạc. Những ý tưởng của con người trẻ tuổi này đã làm thay đổi toán học một cách sâu sắc. Lĩnh vực mới mà ông đã xác lập nên – lý thuyết nhóm – đã vươn rộng ra rất xa, vượt ra ngoài ranh giới của toán học thuần túy, thâm nhập cả vào thế giới của nghệ thuật thị giác, âm nhạc, vật lý, và bất cứ chỗ nào mà có thể tìm thấy đối xứng.

Như tôi đã nhận xét ở trên, hiểu sự sáng tạo vận hành như thế nào là điều rất hấp dẫn không chỉ đối với các nhà khoa học về nhận thức, các nhà thần kinh học, và các nhà giáo dục. Các công ty và tổng công ty lớn luôn tranh giành tìm ra cách để bồi dưỡng và phát triển sự sáng tạo và đổi mới đối với các nhân viên của họ. Nhiều triệu đôla đã chi mỗi năm cho các hội thảo, những nơi tĩnh tâm dành cho nghiên cứu, những buổi họp kích thích sự động não để giải quyết các vấn đề hắc búa và các khóa học đặc biệt nhằm tạo ra các Bill Gates tương lai. Nhưng liệu có thể nhận dạng được các nguồn của sáng tạo không? Hay phải chăng các ý tưởng sáng tạo đơn giản là sự lóe lên do may rủi hay là sự chộp lấy một cách thông minh các mẩu kiến thức từ các môn học khác có liên quan một cách lỏng lẻo với nhau?

NHỮNG BÍ MẬT CỦA MỘT BỘ ÓC SÁNG TẠO

Nhà thơ Anh Owen Meredith (bút danh của Edward Robert Bulwer-Lytton, bá tước Lytton) đã từng nói: "Thiên tài làm cái mà nó cần làm, còn Tài năng làm cái mà nó có thể". Đây là một câu trích dẫn thú vị vì nó tổ hợp và làm tương phản hai thuật ngữ này, hai thuật ngữ – "tài năng" và "thiên tài" – đôi khi có thể chồng chéo với sự sáng tạo nhưng không nên lẫn lộn với nó. Trong nhiều thế kỷ, chắc chắn là có nhiều họa sĩ và nhiều nhà phát minh tài năng, nhưng chỉ có rất ít (nếu có) những người có thể sánh với Leonardo da Vinci về mặt sáng tạo. Mặt khác, là sáng tạo, tức là mang lại một sự thay đổi về hình mẫu, không nhất thiết phải là một thiên tài. Đặc biệt, nhiều nghiên cứu cho thấy rằng ngoài một mức IQ nhất định, có lẽ khoảng 120, sẽ không có sự tương quan rõ rệt nào giữa trí thông minh và sự sáng tạo. Nói cách khác, sự sáng tạo thực sự có lẽ đòi hỏi một mức độ thông minh nào đó nhưng không có đảm bảo tuyệt đối rằng một người có chỉ số IQ 170 sẽ là sáng tạo hơn một người có chỉ số IQ chỉ là 120. Một trong những nguyên nhân chủ yếu tại sao không có "giải thích" cho sự sáng tạo chính xác vì thực tế rằng tất cả mọi người đều sáng tạo ở một mức độ nào đó. Khi bạn không thể mở được một cái chai và bạn lấy một chiếc khăn quấn vào để tay khỏi bị trượt tức là bạn đã có một giải pháp sáng tạo. Khi một học sinh ghi số điện thoại của bạn mình vào mu bàn tay là em đó đã đáp ứng một cách sáng tạo một nhu cầu cấp bách. Xét cho cùng, ngay cả những người sáng tạo nhất đã từng sống thì chẳng qua cũng chỉ sử dụng bộ óc con người mà thôi.

Một quan điểm khác cần nhớ là những bùng nổ sáng tạo trong những lĩnh vực khác nhau không chấp nhận một sự so sánh dễ dãi. Như nhà nghiên cứu về nhận thức và giáo dục Howard Gardner thuộc Đại học Harvard đã nhận xét: " Đột phá sáng tạo trong một lĩnh vực không thể bị mất giá một cách dễ dàng vì những đột phá trong các lĩnh vực khác; quá trình tư duy và những thành tựu khoa học của Einstein khác với của Freud và thậm chí còn khác hơn nữa với của Eliot [nhà thơ T. S. Eliot] hoặc Gandhi. Mỗi loại sáng tạo riêng biệt là một sự huyền bí riêng biệt". Dù có những dự báo này, nhưng trong một ý định gần như tuyệt vọng nhằm đạt tới đáy tận cùng của sự sáng tạo, các nhà nghiên cứu (kể cả chính Gardner) lại thường dựa trên sự nỗ lực tìm ra những nét chung trong nhiều cá nhân sáng tạo. Họ hy vọng những đặc tính đó sẽ được chia sẻ bởi những nguồn tiềm tàng tiêu biểu nhất cho sự sáng tạo xuất chúng. Những phẩm chất đã được xem xét bao gồm cả các đặc điểm sinh lý trong não, những phẩm chất đặc trưng cá nhân và những đặc tính nhận thức khác nhau (như khả năng có những liên tưởng xa xôi) và những hoàn cảnh xã hội cả trong môi trường gần gũi (như gia đình và bạn bè thân) lẫn môi trường rộng lớn hơn (như dân tộc, chính trị). Chí ít chúng ta có thể cảm nhận được mức độ các mô hình khác nhau về sự sáng tạo thông qua một thao tác đơn giản dựa trên các khái niệm của phương pháp khoa học. Phương pháp này thể hiện cách tiếp cận có tổ chức để giải thích một tập hợp các sự kiện quan sát được bằng một mô hình (mẫu). Quá trình lý tưởng hóa đó có thể tổng kết trong ba từ sau: quy nạp, diễn dịch và kiểm chứng. Nói một cách tường minh hơn, phương pháp khoa học bắt đầu bằng việc thu thập các dữ liệu thực nghiệm và quan sát. Trên cơ sở các dữ liệu đó, ta xây dựng một mô hình, một kịch bản và đôi khi là một lý thuyết hoàn chỉnh. Cuối cùng, mô hình hay lý thuyết được kiểm chứng qua các thực nghiệm và quan sát mới hoặc qua thu thập các dữ liệu mới chưa được sử dụng khi dựng nên chính mô hình.

Chúng ta có thể theo dõi một phiên bản đơn giản của triết lý tổng quát này bằng cách xem xét Galois thích hợp đến mức nào với một "khuôn mẫu" đã được nhất trí về những đặc điểm cá nhân của một bộ óc sáng tạo khi mà bản thân Galois chưa được vận dụng trong sự tạo ra "khuôn mẫu" đó. Đòi hỏi ở trên hóa ra dễ dàng được thỏa mãn: tôi không tìm thấy cái tên Galois trong bất cứ danh sách nào do các nhà nghiên cứu sự sáng tạo lập ra. Điều đầu tiên mà tôi cần lưu ý là có một lý do rất chính đáng để tôi đặt từ "khuôn mẫu" trong dấu ngoặc kép, vì một "khuôn mẫu" như vậy là thực sự không tồn tại! Ngay cả nếu có ai đó có thiên hướng di truyền về sáng tạo như một họa sĩ, chẳng hạn, nhưng nếu người đó không được đào tạo một cách thích hợp và chỉ khoe khoang về những mối quan hệ trong thế giới nghệ thuật thì có nhiều khả năng là chúng ta sẽ chẳng bao giờ nghe nói về anh/chị ta cả. Hơn thế nữa, không phải tất cả những người sáng tạo, ngay cả trong một lĩnh vực, đều giống nhau. Như Csikszentmihalyi đã nói: "Michelangelo không thích phụ nữ lắm, nhưng với Picasso thì không biết bao nhiêu là đủ". Tương tự, trong Chương 3 chúng ta đã thấy rằng Cardano làm việc hăm hở không tiếc sức trong khi đó dal Ferro, người đã có đóng góp cho lời giải của cùng một toán, thì lại ẩn dật và khiêm nhường. Tuy nhiên, như nhà tâm lý học Ellen Winner thuộc trường Boston College đã nhận xét về những đứa trẻ có năng khiếu: "Đối với những người làm cho năng khiếu đó vào được danh sách các nhà sáng tạo, thì một tập hợp nhất định các đặc điểm cá nhân tỏ ra còn quan trọng hơn rất nhiều là có chỉ số IQ cao, hay có khả năng cao trong một lĩnh vực cụ thể, thậm chí ở mức thần đồng. Những người sáng tạo có động lực mạnh mẽ, có khả năng tập trung cao, nổi trội nhất và dám chấp nhận mạo hiểm một cách độc lập". Trong khi các nhà nghiên cứu không có khả năng biết chắc được các đặc tính cá nhân có thực sự là những nguyên nhân trực tiếp của sự sáng tạo hay không, thì gần như chắc chắn là một số phẩm chất liên quan một cách chặt chẽ trong quá trình sáng tạo. Vậy những đặc điểm đó là gì? Hai nhà tâm lý học John Dacey và Kathleen Lennon đã nhấn mạnh tới sức chịu đựng tính mơ hồ - đó là khả năng tư duy, thao tác, và giữ được đầu óc cởi mở trong những tình huống mà ở đó các quy tắc còn chưa rõ ràng, không có một sự dẫn dắt nào, hoặc các hệ thống hỗ trợ (như gia đình, nhà trường, xã hội) đã sụp đổ. Thực tế, nếu không có đủ năng lực để vẫy vùng ở những nơi chưa hề có các quy tắc thì Picasso không bao giờ phát minh ra được chủ nghĩa lập thể và Galois cũng không thể phát minh ra lý thuyết nhóm. Sức chịu đựng tính mơ hồ là điều kiện cần cho sự sáng tạo.

Nhà tâm lý học Csikszentmihalyi thì tập trung vào phẩm chất quan hệ mà ông gọi là "độ phức tạp". Độ phức tạp có nghĩa là khả năng chấp nhận những khuynh hướng thường dường như là ở những cực hạn đối ngược nhau. Ví dụ, đa số mọi người đều ở đâu đó trung gian giữa những kẻ thích nổi loạn và những người có kỷ luật cao. Những cá nhân rất sáng tạo có thể thay đổi giữa hai cực hạn đó một cách không do dự. Csikszentmihalyi đã phỏng vấn hàng chục những người sáng tạo thuộc một vùng rộng lớn của các lĩnh vực từ các ngành nghệ thuật, nhân văn, khoa học tới các doanh nghiệp và chính trị. Dựa trên những cuộc phỏng vấn đó, ông đã soạn ra 10 chiều kích của độ phức tạp – mười cặp các đặc tính dường như đối lập nhau nhưng cả hai lại thường hiện diện trong những bộ óc sáng tạo. Danh sách này bao gồm:

1. Sự bùng nổ những xung động xen giữa những thời kỳ yên ả và nghỉ ngơi.
2. Rất giỏi nhưng cũng cực kỳ ngây thơ.
3. Đung đưa với biên độ lớn giữa cực kỳ có trách nhiệm và vô trách nhiệm.
4. Một cảm giác bắt rễ vào thực tại cùng với một liều lượng lớn tưởng tượng và bay bổng.
5. Các thời kỳ hướng nội và hướng ngoại luân phiên nhau.
6. Đồng thời vừa khiêm nhường vừa kiêu hãnh.
7. Người trung tính về tâm lý – không thể hiện rõ vai trò của giới tính.
8. Là người ưa nổi loạn và đả phá các thần tượng nhưng tôn trọng lĩnh vực chuyên môn và lịch sử của nó.
9. Một mặt là người đam mê nhưng mặt khác là người khách quan về công trình của mình.
10. Trải nghiệm đau khổ và thất vọng hòa trộn với niềm hân hoan và vui sướng.

Điều lý thú là nhà tâm lý học Ellen Winner đã phát hiện ra rằng các thần đồng thường bộc lộ chỉ một thái cực duy nhất trong phổ các đặc tính – họ có khuynh hướng tập trung cao độ, mạnh mẽ, và hướng nội. Tuy nhiên, cũng nên nhớ rằng những trẻ em có năng khiếu vẫn thường ở *trạng thái* hấp thụ tri thức hơn là ở *trạng thái* sáng tạo. Sự thực là đa số các thần đồng đều không trở thành đặc biệt sáng tạo khi trưởng thành có thể phản ánh (ngoài những thứ khác) một thực tế là chỉ phần nhỏ các thần đồng là có khả năng đối với sự phức tạp.

Thậm chí mặc dù bản danh sách của Csikszentmihalyi, may lắm, cũng chỉ có tính chất gợi ý, nhưng nó đã thực mô tả đúng Galois đến lạ lùng. Galois, về nhiều phương diện, là điển hình của những mâu thuẫn và phức tạp. Ví dụ, hãy lấy bức thư của ông đề ngày 25 tháng 5 gửi cho Auguste Chevalier: "Làm sao tôi có thể an ủi mình khi chỉ trong một tháng trời tôi đã mất hết nguồn hy vọng lớn nhất mà một người đàn ông có thể có?" Liệu có thể hình dung được những thay đổi tâm trạng lớn hơn thế hay không? Hoặc hãy xét sự mô tả sau trong một bức thư của Raspail viết từ nhà tù. Hành vi của Galois dao động giữa an tĩnh và hưng phấn:

> Một hôm, anh ta cứ đi đi lại lại trong sân nhà tù, vẻ suy nghĩ lung lắm, cứ như là anh đang mơ giữa ban ngày vậy. Anh có vẻ ốm yếu của một người chỉ còn dật dờ trên cõi dương thế này, người mà chỉ có tư duy là giữ cho còn sống.
>
> Mấy gã táo tợn chỗ chúng tôi hét to: "Này, mày mới hai mươi chứ mấy, mà sao nhìn cứ như một ông già vậy! Thế mày có uống được không? Sợ hả?". Thế là anh đi thẳng đối mặt với nguy hiểm, dốc cạn một hơi vào họng cả một chai đầy và ném chai vào gã đã khích bác.

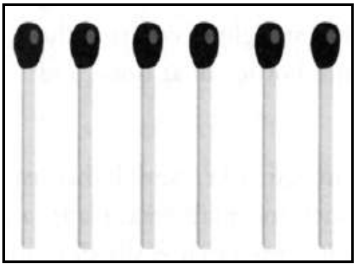
Là một người tài giỏi nhưng ngây thơ, thực tế nhưng mơ mộng, vừa nổi loạn vừa tôn trọng đối với toán học và các nhà toán học, đó là tổ hợp những đặc điểm đã được phát minh ra để mô tả chính xác Galois. Làm sao có thể đặc trưng khác cho những trải nghiệm của Galois trong kỳ thi tuyển vào trường Bách khoa, cho những cuộc trao đổi gay gắt của ông với viên hiệu trưởng trường ông, cho những va chạm đầy hoang tưởng của ông với các Viện toán học, và cho những đương đầu của ông đối với pháp luật?

Sự trung tính về tâm lý – một mặt là rất nhạy cảm và "nữ tính" hơn, nhưng mặt khác lại hay xúc phạm và gây gổ - là một đặc điểm rõ ràng khác của Galois. Hãy xét bức thư dưới đây mà ông viết từ nhà tù gửi cho dì ông là bà Céleste-Marie Guinard:

> Dì yêu quý của cháu, cháu nghe nói là dì ốm phải nằm liệt giường. Cháu cảm thấy cần cho dì biết là cháu buồn đến mức nào, và cảm giác đó còn nặng nề thêm vì cháu bị tước mất niềm vui được gặp dì bởi cháu đang bị giam giữ và không được phép gặp ai cả. Dì thật tốt đã nghĩ đến chuyện gửi quà cho cháu. Cháu rất vui là đã nhận được những thứ gợi nhớ đến sự sống trong khi mình đang ở trong một nấm mồ. Cháu hy vọng dì sẽ bình phục khi cháu ra tù. Người cháu đến thăm đầu tiên chắc chắn sẽ là dì.

Thật khó mà tin được, nhưng đó chính là người mà nhà toán học Sophie Germain đã viết về ông như sau trong bức thư bà gửi cho Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja, một người bạn và đồng nghiệp của bà: "Khi trở về nhà, anh ấy [tức Galois] vẫn tiếp tục thói quen xỉ nhục mà hương vị của nó bạn đã được nếm sau bài giảng hay nhất của bạn ở Viện Hàn lâm. Người đàn bà tội nghiệp [tức mẹ Galois] đã bỏ nhà đi, để lại cho con trai tiền bạc chỉ đủ sống."

Dacey và Lennon cũng nhận dạng được một số đặc điểm phụ mà theo quan điểm của họ có đóng góp vào khả năng chịu đựng sự mơ hồ và vào sự thôi thúc sáng tạo. Một trong số đó là *sự tự do kích thích* là điều mà chúng ta có thể gọi là khả năng tư duy vượt ngưỡng. Nói rộng ra, cái cốt lõi nhất của sự sáng tạo là khả năng phá vỡ những điều được mọi người coi là đúng và thoát ra khỏi những thiết đặt trong óc đã tồn tại từ trước. Xin nêu một ví dụ đơn giản về loại tự do kích thích này. Cho bạn 6 que diêm dài bằng nhau như trên hình 105 và yêu cầu bạn dùng các que diêm đó để dựng đúng bốn hình tam giác trong đó tất cả các cạnh của bốn tam giác đó đều bằng nhau. Hãy thử làm điều đó trong ít phút, nhưng nên lưu ý rằng lời giải đòi hỏi một cách tiếp cận không phải thông thường. Trong trường hợp bạn không thành công thì cũng đừng tuyệt vọng; rất nhiều người đã bó tay trước bài toán này. Bạn có thể xem lời giải ở Phụ lục 10. Chứng minh của Galois liên quan với các phương trình nào là giải được bằng một công thức (Chương 6) chính là sự thể hiện của tư duy vượt ngưỡng. Để trả lời cho câu hỏi về các phương trình đại số ông đã phát minh ra cả một lĩnh vực mới của toán học.



Hình 105

Có một đặc điểm khác dường như cũng được nhiều cá nhân sáng tạo chia sẻ (đặc biệt là nam giới), và điều này cũng áp dụng được cho Galois, đó là họ thường mất cha sớm. Trong số gần 100 người sáng tạo được phỏng vấn, Csikszentmihalyi phát hiện ra rằng không ít hơn ba trong số 10 người đàn ông và hai trong số 10 người đàn bà là mồ côi cha khi họ ở tuổi thiếu niên.

Vậy làm sao việc mất cha lại kích thích sự sáng tạo? Cuộc sống đã ban cho những đứa trẻ mất cha một thách thức vừa là gánh nặng vừa là cơ hội. Một mặt, có một gánh nặng tâm lý lớn là phải sống theo những kỳ vọng của người cha đã mất. Mặt khác, những người trẻ tuổi như vậy có cơ hội rất lớn để thực sự tự "phát minh" ra mình. Triết gia Pháp Jean-Paul Sartre (1905-1980) đã nhận xét trong cuốn tự truyện *Les mots* (Các từ) của mình: "Cái chết của Jean Baptiste [cha của Sartre] là một sự kiện lớn trong đời tôi; nó đã trả mẹ tôi về với các xiềng xích của bà và cho tôi tự do... Nếu cha tôi sống, ông chắc sẽ nằm đè thẳng cẳng lên tôi và chắc là sẽ đè nát tôi. Thật may là ông đã mất sớm". Tất nhiên, đó là một quan điểm quá ích kỷ. Mặc dù một số người sáng tạo, có thể kể cả Abel và Galois, đều có thể có động lực để hướng tới độc lập và sự ham hiểu biết do cái chết của cha họ, nhưng nhiều người khác lại vươn lên với sự trợ giúp mà họ nhận được từ gia đình. Ví dụ, có những trường hợp cả cha lẫn con đều được giải Nobel. Niels Bohr nhận giải về vật lý năm 1922 và con ông, Aage Bohr nhận giải này năm 1975. Một ví dụ thậm chí còn ấn tượng hơn nữa, đó là trường hợp của William Henry Bragg và con trai ông William Lawrence Bragg. "Đội" cha-con này đã cùng đoạt giải Nobel về vật lý năm 1915 khi Lawrence chỉ mới 25 tuổi.

Galois đã hoàn thành tất cả những công trình xuất sắc nhất của ông về lý thuyết nhóm trước tuổi 21, còn thiên tài Abel đã làm sửng sốt giới toán học trước khi nhà toán học nghèo khổ này tròn 26 tuổi. Chúng ta có ngạc nhiên trước điều này không? Thực sự là không. Một số các nhà toán học, các nhà thơ và các nhà soạn nhạc sáng tạo nhất đều làm ra những tác phẩm tuyệt vời nhất của họ ở tuổi còn cực trẻ. Trái lại, đa số các họa sĩ, các nhà tiểu thuyết và các triết gia lại liên tục sáng tạo và thường đạt tới đỉnh cao ở tuổi đã già. Nhà phê bình âm nhạc kiêm tiểu thuyết gia Marcia Davenport (1903-1996) đã diễn đạt rất hay thực tế đó: "Tất cả những nhà thơ lớn đều chết trẻ. Hư cấu là nghệ thuật của tuổi trung niên. Và tiểu luận là nghệ thuật của tuổi già".

Tôi đã hỏi Ngài Michael Atiyah, người nhận giải thưởng Abel năm 2004, là tại sao các nhà toán học lại có những hiểu biết rất sâu sắc khi còn ở độ tuổi rất trẻ, ông đã trả lời ngay lập tức:

> Trong toán học, nếu bạn có đầu óc nhanh nhạy, bạn có thể vượt lên "tuyến trước" của những nghiên cứu hiện đại nhất một cách rất nhanh chóng. Trong một số lĩnh vực khác, trước hết, bạn có thể phải đọc những bộ sách dày cộp. Hơn thế nữa, nếu bạn làm việc quá dài trong một lĩnh vực nào đó, bạn sẽ dần quen suy nghĩ như những người khác. Khi bạn là lính mới, bạn sẽ không bị ép buộc vào các ý tưởng của những người xung quanh bạn. Nếu bạn là trẻ thì có rất nhiều khả năng bạn thực sự là độc đáo.

Nhà tâm lý học Howard Gardner cũng đã có sự phân biệt tương tự giữa, một mặt, là các nhà toán học và các nhà khoa học và mặt khác là các nghệ sĩ:

> Điều quan trọng phải lưu ý ở đây là sự khác biệt có tính quyết định với sự sáng tạo trong khoa học và toán học. Những cá nhân trong các lĩnh vực này bắt đầu năng sản từ khi tuổi còn rất trẻ và chắc chắn có nhiều khả năng lựa chọn trong những năm tháng tuổi trẻ của họ. Tuy nhiên, không giống như nghệ thuật, những lĩnh vực này tiến bộ và tích lũy với một tốc độ rất nhanh, được kích thích bởi những phát minh của những cá nhân sáng tạo nhất; những công cụ được tạo ra trong thời gian đầu đời có thể trở nên không còn thích hợp và đắc dụng nữa.

Những bộ óc sáng tạo trong toán học thậm chí có thể phân biệt với các bộ óc sáng tạo trong các khoa học khác ở chỗ chúng không tuân theo cái mà Gardner gọi là "quy tắc mười năm". Đây là nhận xét cho rằng nhiều cá nhân sáng tạo đã có những đột phá sau mười năm làm việc trong lĩnh vực của họ. Cả Abel và Galois đều có can đảm tấn công phương trình bậc năm trong khi còn ngồi trên ghế trường phổ thông! Họ đã cho câu trả lời dứt khoát về tính giải được khi hoặc trước khi đạt tới những năm đầu của tuổi 20, sớm hơn rất nhiều so với quy tắc mười năm.

Có một phương diện khác của cá tính Galois phù hợp với tư duy ngày nay về sự sáng tạo – đó là sự bộc lộ những triệu chứng rất mạnh của bệnh hoang tưởng. Những ảo tưởng liên tục của ông về việc bị truy bức và ám ảnh bởi những kẻ tầm thường rõ ràng là đã vượt ra ngoài tình trạng bình thường. Thiên tài thường gắn liền với những rối loạn về tinh thần. Ngay từ thời cổ đại, triết gia La Mã Seneca đã viết: "không có một thiên tài vĩ đại nào từng tồn tại mà lại không có dính dáng đến chứng điên". Năm 1895, nhà tâm thần học W. L. Babcock đã công bố một bài báo nhan đề: "Về sự di truyền và khuynh hướng dễ mắc bệnh mất trí của những người thiên tài", trong đó ông đã tuyên bố rằng giống như khuynh hướng dễ chết sớm, thiên tài là một đặc tính của sự cấu tạo di truyền kém. Trên một cơ sở vững chắc hơn, những nghiên cứu hiện nay cũng ủng hộ sự gắn kết thường gặp của tính sáng tạo với bệnh học tâm thần. Ví dụ, nhà tâm lý học Arnold Ludwig đã xem xét cuộc đời của hơn một ngàn cá nhân sáng tạo và đã tìm ra rằng khoảng 28% các nhà khoa học tài năng đều cảm thấy chí ít là một số loại rối loạn tâm thần. Tỷ phần này tăng lên một cách đáng kinh ngạc đến 87% đối với các nhà thơ xuất sắc. Nhà tâm lý học Donald MacKinnon, sau này thuộc Viện Đánh giá và Nghiên cứu Tính cách thuộc Đại học

California, ở Berkeley, đã tiến hành một đánh giá trên diện rộng thông qua đo đạc các hoạt động tinh thần của nhiều nhà toán học, kiến trúc sư và các nhà văn giàu óc sáng tạo. Những phát hiện của ông cho thấy rằng những cá thể sáng tạo đều nhất quán có số điểm cao hơn về những chiều kích là chỉ dấu của những rối loạn cảm xúc như bệnh tâm thần phân lập, trầm cảm hay hoang tưởng. Kết luận rút ra từ những nghiên cứu đó và nhiều nghiên cứu tương tự khác đúng như nhà tâm lý học Dean Keith Simonton, thuộc Đại học California, đã nói: "Một liên kết thiên tài-bệnh điên có thể hơn là một huyền thoại". Tôi cũng cần lưu ý rằng, như trong trường hợp của Galois, những rối loạn hiếm khi được phát hiện thấy là cao tới mức làm suy yếu cá nhân sáng tạo. Galois và nhiều thiên tài sáng tạo khác có đủ sức mạnh bản ngã và các tài nguyên tinh thần khác để giúp chế ngự cái bệnh tâm thần đó. Tuy nhiên, bằng chứng cho một sự mặc cả kiểu Faust mà các bộ óc sáng tạo thường phải thương lượng là rất hấp dẫn. Nhà chuyên viết tiểu luận người Anh là Ngài Max Beerbohm (1872-1956) đã diễn đạt trải nghiệm của ông với hiện tượng này như sau: "Tôi biết không có một thiên tài nào mà không phải trả giá, bằng một nỗi khổ hay một khuyết tật về thể chất hoặc tinh thần nào đó, vì những cái mà Chúa đã ban cho anh ta".

Trường hợp đầy hấp dẫn của Galois có lẽ là bởi vì ông rất phù hợp với mô tả chung về một thiên tài, nhưng chúng ta vẫn còn nỗi băn khoăn là liệu có gì đó đặc biệt nổi trội trong bộ óc của ông hay không?

CÂU CHUYỆN VỀ HAI BỘ NÃO

Albert Einstein qua đời ngày 18 tháng 4 năm 1955 tại bệnh viện Princeton, ở New Jersey. Thomas S. Harvey, nhà bệnh lý học, đã thực hiện khám nghiệm tử thi và lấy ra bộ não của nhà khoa học vĩ đại. Ông đã cắt bộ não của Einstein thành 240 miếng và nhúng các miếng này vào một chất giống như chất dẻo gọi là celoidin.

Évariste Galois mất ngày 31 tháng 5 năm 1832 tại bệnh viện Cochin, Paris. Nhà bệnh lý học đã mở hộp sọ của ông và xem xét kỹ lưỡng bộ não của ông. Điều này quả thực là đáng ngạc nhiên, vì Galois bị bắn vào bụng và chết vì bệnh viêm phúc mạc.

Trong suốt hơn hai chục năm, không một ai, kể cả gia đình Einstein, biết rằng bộ não của Einstein đã được giữ trong một cái bình ở nhà của Harvey. Năm 1978, Steven Levy, sau này là phóng viên của tờ *New Jersey Monthly* đã lần tới nhà của Harvey ở Wichita, Kansas. Sau một cuộc nói chuyện dài với Levy, Harvey đã thừa nhận hiện đang giữ bộ não của Einstein. Ông ta mở một cái hộp có ghi nhãn "Costa Cider" rồi lấy ra hai cái bình Mason có chứa bộ não đã mang lại một cuộc cách mạng trong khoa học.

Từ đó, Harvey cho phép ba "nhóm" đến khảo sát bộ não đó. Nhà giải phẫu học Marian Diamond thuộc Đại học California và các đồng nghiệp của ông đã công bố một bài báo về bộ não của Einstein vào năm 1985. Họ phát hiện ra rằng tỷ số các neuron trên số các tế bào thần kinh đệm (là tác tế bào hỗ trợ và bảo vệ các neuron) trong một phần của bộ não Einstein nhỏ hơn tỷ số này của 11 bộ não bình thường. Trong khi các tác giả kết luận rằng tỷ số các tế bào thần kinh đệm trên số neuron là lớn hơn có thể chỉ ra các neuron của Einstein làm việc dữ hơn – cần nhiều năng lượng hơn – bình thường, nhưng sau này nhiều nhà nghiên cứu đã tỏ ra nghi ngờ cách giải thích đó. Bài báo thứ hai là của Britt Anderson thuộc Đại học Alabama, ở Birmingham, đã được công bố vào năm 1996. Anderson và Harvey đã chỉ ra rằng bộ não của Einstein lại nhẹ hơn một bộ não trung bình (1230g so với 1400g đối với bộ não trung bình) do đó các neuron được xếp chặt hơn trong một vùng đã cho. Cuối cùng, năm 1999, nhà tâm lý học thần kinh Sandra Witelson thuộc Đại học McMaster và các đồng nghiệp của bà đã phát hiện ra cái được hoan nghênh rầm rộ và là chìa khóa mở ra bí mật của thiên tài Einstein. Vùng đỉnh nhỏ hơn vốn được coi là được sử dụng cho các suy lý toán học được phát hiện ra là rộng hơn bình thường 15%. Ngoài ra, các rãnh não cũng được phát hiện thấy là bị mất một phần trong vùng đó. Các nhà nghiên cứu lập luận rằng sự không có các rãnh (khe) là do sự truyền thông hiệu quả hơn giữa các neuron. Mặc dù là khá thú vị, nhưng tất cả các nghiên cứu đó đều không thể coi là kết luận cuối cùng. Xét cho cùng, thậm chí mặc dù nghiên cứu của Witelson đã dùng tới 35 bộ não như một nhóm đối chứng, nhưng bà lại chỉ có một bộ não thí nghiệm là bộ não của Einstein.

Những miếng còn lại của bộ não Einstein cuối cùng đã được Harvey đưa đến nơi an nghỉ cuối cùng của nó là Khoa Bệnh lý học, Bệnh viện Princeton. Khi được hỏi tại sao ông lại quan tâm trước nhất đến bộ não (còn thân thể Einstein đã được hỏa thiêu), Harvey giải thích rằng ông cảm thấy có trách nhiệm phải giữ gìn cái chất xám quý giá đó cho hậu thế.

Và đây là biên bản khám nghiệm tử thi về bộ não của Galois:

> Tách bỏ lớp vỏ đi, hộp sọ hiện ra với hai mảnh tạo thành vành trán, được nối với nhau dưới một góc tù, mà ta thường thấy ở những đứa trẻ. Vành này có độ rộng tối đa là 0,51cm. Ở mép, nơi vành nối với xương đỉnh, ta có thể thấy một hõm sâu, phẳng và tròn, ngay sau chỗ nối giữa hai xương; những

> gò ở đỉnh rất phát triển, cách xa nhau những khoảng rộng; sự phát triển của phần này là rất đáng kể so với xương chẩm...
>
> Một khi hộp sọ đã được mở, các vách trong của xoang trán rất gần nhau; không gian còn lại nhỏ hơn 0,51cm; ở giữa vòm sọ có hai chỗ hõm tương ứng với các gò được mô tả ở trên...
>
> Bộ não này rất nặng, những nếp cuộn của nó rất lớn; các khe của nó sâu, đặc biệt ở các phần hai bên; có những chỏm ăn khớp với các hốc của sọ não; một ở trước mỗi thùy sau, hai ở đỉnh của mặt trên; chất não nói chung là mềm; các hốc của não thất là nhỏ, không chứa huyết thanh; tuyến yên lớn và chứa các hạt màu xám; tiểu não nhỏ; khối lượng của não và tiểu não cộng lại khoảng cỡ 1429gam.

Tại sao nhà bệnh lý học lại khám xét bộ não của Galois kỹ lưỡng đến thế trong khi nguyên nhân của cái chết đã quá rõ ràng? Câu đầu tiên trong biên bản có thể cho ta sự gợi ý: "Galois Évariste, thanh niên, 21 tuổi, một nhà toán học giỏi, được biết đến trước hết là trí tưởng tượng cháy bỏng, vừa mới chết được 12 tiếng do viêm phúc mạc cấp vì bị bắn ở khoảng cách 25 bước". Linh cảm của tôi là viên bác sĩ bệnh lý học này cũng bị thôi thúc bởi óc tò mò giống như Harvey khi lấy đi bộ não của Einstein. Vị bác sĩ này đã biết cả tiếng tăm của Galois với tư cách một nhà toán học và trí tưởng tượng mãnh liệt và bốc lửa của ông nên cảm thấy buộc phải xem xét kỹ lưỡng bộ não để tìm ra những manh mối tiềm tàng cho nguồn gốc của những thuộc tính đó. Cũng như trường hợp Einstein, khám nghiệm tử thi đã không phát hiện được những manh mối một cách rõ ràng. Dù sao, đây cũng là nỗ lực đáng trân trọng vì mục đích của nó là nhằm khám phá bộ óc của một con người, mà cả trong toán học lẫn chính trị, đều đứng ở trung tâm của chủ nghĩa lãng mạn cách mạng.

KHÔNG THỂ CHIA

Không giống như các khoa học khác, toán học có giá trị lâu bền. Những quan niệm của Aristotle về vũ trụ là những của lạ lịch sử thú vị đấy, nhưng chỉ thế thôi, không hơn. Trái lại, các định lý trong bộ *Cơ sở* của Euclid là đúng, là bất tử ngày hôm nay cũng như ở năm 300 trước Công nguyên vậy. Điều đó không phải nói lên toán học là ngưng trệ. Còn xa mới như vậy. Cũng như các thế hệ kính thiên văn mới mở rộng chân trời của chúng ta không hề làm mất đi giá trị của những phát hiện trước đó trong vũ trụ ở gần, toán học vẫn tiếp tục khám phá những triển vọng mới trong khi vẫn xây dựng trên những tri thức hiện có. Quan điểm này có thể thay đổi nhưng các chân lý thì không. Nhà toán học kiêm tác giả Ian Stewart đã diễn đạt thật hay thực tế này: "Thực tế, có một từ trong toán học để chỉ những kết qủa trước mà sau này thay đổi, chúng được gọi là 'sai lầm'".

Những ý tưởng của Galois, với tất cả sự chói sáng của chúng, không phải xuất hiện từ hư không. Chúng đề cập tới một bài toán mà cội rễ của nó có thể lần ngược trở lại thời Babylon cổ đại. Nhưng cuộc cách mạng mà Galois khởi xướng đã nhóm lại toàn bộ những lĩnh vực mà trước đó chẳng có liên quan gì với nhau. Có nhiều điểm rất giống với sự bùng nổ ở kỷ Cambry, khi đó xảy ra sự bùng phát đáng kinh ngạc của sự đa dạng hóa các dạng của sự sống trên Trái Đất, sự trừu tượng của lý thuyết nhóm đã mở toang những cánh cửa vào thế giới vô hạn của các chân lý. Các lĩnh vực vốn cách xa nhau như các định luật của tự nhiên và âm nhạc bất ngờ trở nên có liên quan với nhau một cách bí ẩn. Tháp Babel của những đối xứng như có phép thần đã hòa nhập thành một ngôn ngữ duy nhất.

Nhà thiết kế trang web Brenda C. Mondragon quản trị một website rất mời gọi có tên là "Các nhà thơ loạn thần kinh". Dòng đầu tiên của bà về nhà thơ Anh lãng mạn Percy Bysshe Shelley (1792-1822) như sau: "Tinh thần cách mạng và sức mạnh của tư tưởng tự do là những niềm đam mê lớn nhất trong đời của Percy Shelley". Người ta có thể dùng đúng những từ đó để mô tả về Galois. Trên một trong những trang viết mà ông để lại trên bàn trước khi đi tới cuộc đấu súng định mệnh, chúng ta tìm thấy sự pha trộn cuồng nhiệt của những công thức toán học viết nguệch ngoạc đan bện với những ý tưởng cách mạng (hình 106). Sau hai dòng về giải tích toán là từ "không thể chia" dường như áp dụng cho toán học. Tuy nhiên, tiếp ngay sau từ đó là một khẩu hiệu cách mạng "thống nhất; không thể

Hình 106

chia rẽ nền cộng hòa" và "Tự do, bình đẳng, bác ái hay là chết". Sau những tuyên bố mang tinh thần cộng hòa đó, dường như đây cũng là một phần của một dòng tư duy liên tục, lại là đến giải tích toán học. Rõ ràng, trong bộ óc của Galois, những quan điểm của ông về tính thống nhất và tính không thể chia đều có thể áp dụng tốt như nhau cho cả toán học lẫn tinh thần cách mạng. Thực vậy, lý thuyết nhóm đã đạt được chính điều đó: sự thống nhất và tính không thể phân chia của những hình mẫu ẩn dưới một phạm vi rộng lớn các lĩnh vực dường như chẳng liên quan gì với nhau.

Có hai cụm từ khác cũng bắt mắt trong những dòng viết nguệch ngoạc của Galois. Một là cụm từ "*Pas l'ombre*" chắc là muốn nói tới thành ngữ "*pas l'ombre d'une doute*" ("không có chút nghi ngờ nào"). Lại một lần nữa Galois đã bộc lộ niềm tin vững chắc vào sự đúng đắn của cả những chứng minh toán học lẫn những lý tưởng cộng hòa của mình. Cụm từ thứ hai "*une femme*" ("một người đàn bà") một gợi nhớ buồn về những hoàn cảnh tầm thường gây biết bao khó chịu và sắp sửa gây ra cái chết sớm đầy tức tưởi của ông chỉ trong ít giờ nữa.

Nhà thơ Ấn Độ nổi tiếng Rabindranath Tagore (1861-1941) đã viết: "cái chết không dập tắt ánh sáng. Nó chỉ là hành động tắt đèn vì bình minh đã tới". Điều này chắc chắn cũng đúng với trường hợp Galois. Những viễn kiến sâu sắc của ông đã báo hiệu buổi bình minh của một kỷ nguyên mới trong toán học. Ông thuộc về một nhóm tinh hoa chỉ gồm một số rất ít thiên tài bất tử.

Nhiều thế hệ các nhà toán học rất xúc động trước câu chuyện bi thảm và cái chết vô nghĩa của Galois đã tìm cho mình sự an ủi trong di sản vĩ đại của ông. Thông qua sự mãn nguyện đó họ sẽ tránh được số phận của một số thanh niên đa cảm hơn, những người cách thời của Galois vài chục năm đã đọc tuyệt phẩm *Nỗi buồn của chàng Werther* của thi hào Goethe. Cơn đau đớn lãng mạn của nhân vật chính trong tác phẩm của Goethe đã chạm đến sợi dây đàn thương cảm trong lòng của mọi người. Câu chuyện đã gây xúc động mạnh tới mức đã kích thích hàng loạt vụ tự sát của những người trẻ tuổi trên khắp châu Âu. Cũng có thể có người nghĩ rằng sự xúc động quá mạnh mẽ như thế đã biến mất từ lâu khỏi cái thế giới thực dụng này. Nhưng sự tự phát bùng lên nỗi đau buồn, cảm thương sau cái chết của công nương Diana đã chứng tỏ rằng chủ nghĩa lãng mạn còn chưa chết. Thậm chí ngày hôm nay, câu chuyện của Galois vẫn đồng thời gây ra cả đau buồn lẫn cảm hứng, và tinh thần các công trình của ông vẫn thấm đẫm phần lớn của toán học hiện đại. Tôi không thể tìm được lời nào hay hơn những dòng thơ sau đây của Emily Dickinson để mô tả sự tương phản giữa sự tan rữa của da thịt và sự bền lâu của những ý tưởng:

Cái chết là sự Đối thoại giữa
Tinh thần và Cát bụi.
"Hãy tan rữa ra", cái Chết nói – Tinh thần "Thưa ngài
Tôi còn một Lòng tin khác"-

Lời cảm tạ

Dịch phẩm "*Ngôn ngữ của đối xứng*" đã được hoàn thành với sự khích lệ và giúp đỡ tận tình của nhiều người. Dịch giả đặc biệt cám ơn ông Phạm Gia Trực – một người bạn có cùng nhiều mối quan tâm chung về văn hóa, khoa học và dịch thuật - đã có nhiều góp ý quý giá trong quá trình dịch cuốn sách này. Dịch giả cũng rất cám ơn Giáo sư Vật lý Nguyễn Toàn Thắng đã đọc kỹ bản thảo và có nhiều nhận xét xác đáng.

Hà Nội, ngày 15 tháng 7 năm 2012

Phạm Văn Thiều

PHỤ LỤC 1

Câu đố bộ bài lá

Dưới đây là một lời giải cho câu đố bộ bài lá ở trang 40. Mục đích của nó là xếp các lá bài J, Q. K, A vào một hình vuông sao cho không có hoa (cơ, rô, bích, nhép) hoặc giá trị (J, Q, K, A) nào xuất hiện hai lần trong cùng một hàng, một cột hoặc hai đường chéo chính.

PHỤ LỤC 2

Giải hệ hai phương trình tuyến tính

Ở trang 83 ta gặp hệ phương trình của người Babylon cổ

$$\tfrac{1}{4}y + x = 7$$
$$x + y = 10$$

Xin nhắc lại một cách ngắn gọn cách giải những hệ phương trình như thế này. Một phương pháp đơn giản là rút một ẩn ra từ một phương trình rồi thay vào phương trình kia. Phương pháp này sẽ quy hệ về một phương trình một ẩn. Trong phương trình trên, ta rút x từ phương trình thứ hai

$$x = 10 - y$$

rồi thay vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{y} + 10 - \mathrm{y} = 7$$

Rút gọn lại ta được

$$-\tfrac{3}{4}\mathrm{y} = -3$$

Suy ra $y = 4$

Thay giá trị trên của y vào phương trình $x = 10 - y$ ở trên, ta được $x = 10 - 4 = 6$.

Vậy chiều dài = 6 và chiều rộng = 4.

PHỤ LỤC 3

Lời giải của Diophantus

Dưới đây là lời giải của Diophantus đối với bài toán 28 trong quyển thứ nhất của bộ *Arithmetica* (được nhắc tới ở trang 92).

Chúng ta cần tìm hai số sao cho tổng của chúng và tổng các bình phương của chúng là các số đã cho. Giả sử rằng tổng bằng 20 và tổng các bình phương là 208. Diophantus không ký hiệu hai số này là x và y mà là $10 + x$ và $10 - x$ để lợi dụng điều kiện tổng của chúng bằng 20. Do đó, phương trình viết cho tổng các bình phương là:

$$(10+x)^2+(10-x)^2=208$$

Vì $(10+x)^2=100+20x+x^2$ và $(10-x)^2=100-20x+x^2$,

Thay vào phương trình đầu tiên và rút gọn, ta có phương trình $200+2x^2=208 \quad \Rightarrow \quad x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=2$ Vậy hai số cần tìm là 12 và 8.

PHỤ LỤC 4

Một phương trình Diophantus

Chúng ta cần tìm nghiệm (là số) nguyên (như 1, 2, 3, …) của phương trình (xem trang 93):

$$29x + 4 = 8y$$

Trừ hai vế của phương trình trên cho 4, ta được

$$29x = 8y - 4$$

Lấy 4 làm thừa số chung ở vế phải, ta có:

$$29x = 4(2y - 1)$$

Vì x phải là số nguyên, nên vế trái chia hết cho 29 và vế phải cũng phải như vậy (tức cũng phải chia hết cho 29). Nhưng vì 29 là số nguyên tố (chỉ chia hết cho 1 và chính nó) nên $2y - 1$ phải chia hết cho 29. Đặc biệt, ta có thể lấy:

$2y - 1 = 29$ và $x = 4$ (để phương trình được nghiệm đúng)

Cộng 1 vào hai vế của phương trình $2y - 1 = 29$ rồi chia cho 2, ta được $y = 15$. Do đó, một nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 4$, $y = 15$.

PHỤ LỤC 5

Công thức của Tartaglia

Các quy tắc để giải ba dạng của phương trình bậc ba đã được Tartaglia viết thành thơ (đã được trích ở trang 105). Dưới đây là toàn văn bài thơ đó được Ron G. Keightley dịch sang tiếng Anh như sau

In cases where the cube and the unknown
Together equal some whole number, known:
Find first two numbers diff'ring by the same;
Their product, then, as is the common fame,
Will equal one third, cubed, of your unknown;
The residue of their cube roots, when shown
And properly subtracted, next will give
Your main unknown in value, as I live!
As to the second matter of this kind,
When cube on one side lonely you shall find,
The other terms together being bound:
Two number from that one, once they are found,
Together multiplied, swift as a bird,
Give product clear and simple, of one-third
Cubed of th'unknown; by common precept, these
You take, cube rooted; add them, if you please,

T'achieve your object in their sum with ease.
The third case, now in these our little sums,
From the second is solved; for, as it comes,
In kind it is the same, or so say I!
These things I found – o, say not tardily-
In thrice five-hundred, four and thirty more,
Of this our age; the gallant proof's in store
Where City's girt by Adriactic Shore.[1]

Khi phương trình bậc ba có dạng $x^3 + px = q$ với p và q là những số bất kỳ, ví dụ như $x^3 + 6x = 20$, công thức nghiệm của Tartaglia-Cardano nhìn hơi khủng

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \quad (*)$$

Ví dụ, khi thay p = 6 và q = 20 của phương trình trong ví dụ trên, vào công thức nghiệm, ta được $x = 2$.

Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm của phương trình đã từng được Bombelli xem xét (đã được nhắc tới ở trang 121): $x^3 - 15x = 4$.

Ở đây $p = -15$, $p = 4$. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra thấy rằng khi thay hai giá trị trên của p và q vào công thức nghiệm (*), ta được

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (**)$$

Như vậy, bước trung gian ở đây có liên quan đến căn bậc hai của một số âm. Nhưng bằng cách kiểm tra đơn giản ta dễ thấy $x = 4$ chính là nghiệm của phương trình gốc. Mặc dù Bombelli đã giải được phương trình cụ thể này bằng các dùng một mẹo khá tài tình,

---

1 *Vì các thuật ngữ toán học thời đó khác xa bây giờ nên chúng tôi không dịch bài thơ này mà chỉ nêu cách giải theo ngôn ngữ ngày nay -ND*

nhưng bài toán tổng quát có liên quan với các căn bậc hai của số âm chỉ giải được bằng cách đưa vào các số phức.

Mẹo của Bombelli như sau: Viết $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + c\sqrt{-1}$, trong đó c là số cần xác định. Lập phương hai vế phương trình vừa viết, ta được $2+\sqrt{-121} = (2+c\sqrt{-1})^3$

Vì căn bậc hai của 121 là 11, nên vế trái của phương trình trên bằng $2+11\sqrt{-1}$. Vế phải có thể biến đổi bằng cách dùng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ta được $8 + 12c\sqrt{-1} - 6c^2 - c^3$. Cho vế trái và vế phải vừa tìm được bằng nhau, ta có: $1 + 11\sqrt{-1} = (8 - 6c^2) + (12c - c^3)\sqrt{-1}$

Dễ thấy phương trình này đúng với $c = 1$. Vậy ta tìm được $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$

Bằng cách tương tự, Bombelli tìm được $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$

Thay vào công thức (**) của nghiệm, ta được $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

PHỤ LỤC 6

Thách đố
của Adriaan Van Roomen

Phương trình do Adriaan van Roomen đưa ra là (xem trang 123):

$$\begin{aligned}
&x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12{,}300x^{39} + 111{,}150x^{37}\\
&\quad - 740{,}459x^{35} + 3{,}764{,}565x^{33}\\
&\quad - 14{,}945{,}040x^{31} + 469{,}557{,}800x^{29} - 117{,}679{,}100x^{27}\\
&\quad + 236{,}030{,}652x^{25} - 378{,}658{,}800x^{23} + 483{,}841{,}800x^{21}\\
&\quad - 488{,}494{,}125x^{19} + 384{,}942{,}375x^{17} - 232{,}676{,}280x^{15}\\
&\quad + 105{,}306{,}075x^{13} - 34{,}512{,}074x^{11} + 7{,}811{,}375x^{9}\\
&\quad - 1{,}138{,}500x^{7} + 95{,}634x^{5} - 3{,}795x^{3} + 45x = \mathrm{C}
\end{aligned}$$

trong đó C là một số đã biết. Đặc biệt, Roomen yêu cầu tìm nghiệm với

$$C = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

Viète lúc đó đã biết công thức của sin$n\alpha$ và cos$n\alpha$(với n là một số nguyên, và αlà một góc bất kỳ), nên ông có thể sử dụng kiến thức này. Ông đã nhận ra vế trái của phương trình trên chính là 2sin45α, khi sin45α có thể biểu diễn qua 2sinα. Do đó, vấn đề đơn giản là tìm góc α sao cho: $2\sin 45\alpha = C$, Viète đã tìm được nghiệm của phương trình Roomen có dạng $x = 2\sin\alpha$.

PHỤ LỤC 7

Các tính chất của nghiệm phương trình bậc hai

Phương trình bậc hai tổng quát nhất có dạng (xem trang 126):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Chia hai vế cho a, ta được

$$x^2 + b/ax + c/a = 0 \ (*)$$

Mặt khác, nếu ta ký hiệu hai nghiệm là x_1 và x_2, thì phương trình trên có thể viết dưới dạng

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

vì tích trên bằng 0 khi $x = x_1$, hoặc $x = x_2$. Khai triển vế trái của phương trình trên, ta được

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Đối chiếu với phương trình (**), ta có:

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

$$x_1x_2 = c/a$$

Giờ ta hãy xét biểu thức

$$\frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]$$

Vì
$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$
$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

dễ dàng thấy rằng

$$\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\pm(x_1-x_2)$$

Do đó, ta có

$$\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right]=\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm(x_1-x_2)\right]$$

Nghĩa là đẳng thức trên bằng x_1 (khi ta chọn dấu "+") và bằng x_2 (khi ta chọn dấu "–").

PHỤ LỤC 8

Cây phả hệ nhà Galois

Về phía cha của Évariste tôi chỉ phát hiện được những người sau, bắt đầu từ ông của Évariste:

Jacques Olivier Galois (ông nội của Évariste)
Sinh năm 1742 ở Ozouer-le-Voulgy (Sein-et-Marne)
Lấy Marie-Jeanne Deforge (bà nội của Évariste)
Mất ở Bourg-la-Reine 12/5/1806.

Ông bà nội Évariste có 6 người con:

Marie Anne Olivier Galois
Sinh 3/11/1768
Lấy Joseph Martin Blonderlot

Marie Antoinette Galois
Sinh 20/10/1770
Lấy Denis François Le Guay

Théodore Michel Galois
Sinh 14/3/1774
Lấy Victoire Antoinette Grivet

Nicolas-Gabriel Galois (cha của Évariste)
Sinh 3/12/1775
Lấy Adélaide Marie Demante (mẹ của Évariste)
Mất 2/7/1829

Marie Pauline Galois
Sinh 7/9/1778
Lấy André Robert Hyard

Jacques Antoine Raphaël Galois
Sinh 1781

Auffray (2004) có liệt kê một người con trai nữa là Jean Baptiste Olivier, nhưng tôi không tìm thấy tên ông trong các danh sách ở Bourg-la-Reine.

Nicolas-Gabriel Galois và Adélaide Marie Demante có ba người con:

Nathalie Théodore Galois
Sinh 26/12/1808
Lấy Benoit Chantelot

Évariste Galois
Sinh 25/10/1811
Mất 31/5/1832

Alfred Galois
Sinh 8/12/1814
Lấy Pauline Chantelot

Những thế hệ tiếp sau là

Nathalie (1808-)	Évariste (1811-32)	Alfred (1814-)
Pauline (1833-1901) Lấy Guinard Felix		Elisabeth (1843-55)
Nathalie (- 1877)		

Cây trực hệ về phía mẹ Évariste

Michel de Mante

Lấy Barbe de Criquebeuf

|

Pierre de Mante (1590-1670)

Lấy Anne Bréard

Có 10 con, người thứ 10 là

|

François Demante (1645-1711)

Lấy Marguerite de Gruchy

Có 14 người con, người thứ 13 là

|

Michel Demante (1692-1766)

Lấy Anne Marguerite Leclerc

Có 14 người con, người thứ 6 là

|

François Demante (1723-90)

Lấy Marie-Madeleine Martin

Có hai con, con gái chết trẻ

|

Thomas François Demante (1752-1823)

Lấy Marie Thérèse Élisabeth Durand

Adéläide Marie Demante	Antoine-Marie Demante	Céleste Marie Demante
(1788-1872)	(1789-1856)	(1840-60)
Mẹ Évariste	Lấy Anne Delaporte	Lấy Étienne Charles Guinard
Lấy Nicolas-Gabriel Galois	Có 7 con	Có 7 con
Lấy chồng lần thứ hai		
Jean François Loyer		

PHỤ LỤC 9

Câu đố 14 -15

Cấu hình ban đầu trong câu đố 14 – 15 của Samuel Loyd (xem trang 235):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

có thể được thay đổi sang cấu hình sau:

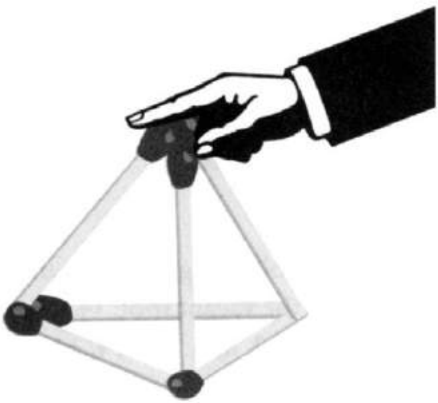
	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

bằng cách dùng 44 nước đi. Các số sau đây chỉ hình vuông nào (tuần tự) cần trượt vào ô còn trống: 14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7, 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14, 10, 6, 2, 1.

PHỤ LỤC 10

Giải bài toán que diêm

Với 6 que diêm có chiều dài bằng nhau (hình 105) chúng ta phải tạo ra 4 hình tam giác trong đó tất cả các cạnh đều bằng nhau. Một xu hướng ngây thơ là tìm cách giải bài toán này trên mặt phẳng hai chiều (tức là tất cả các que diêm đều nằm trên mặt bàn), nhưng khi đó bài toán không có lời giải. Lời giải "ngoài hộp" là dựng một hình tứ diện trong không gian ba chiều (như hình vẽ dưới đây). Làm như thế ta tự động thu được 4 tam giác có các cạnh đều bằng nhau.



MỤC LỤC

NGÔN NGỮ CỦA ĐỐI XỨNG

Mario Livio

Phạm Văn Thiều dịch

Chịu trách nhiệm xuất bản: NGUYỄN MINH NHỰT
Chịu trách nhiệm nội dung: NGUYỄN THẾ TRUẬT
Biên tập: HẢI VÂN - NGUYỄN QUANG KHẢI
Bìa: BÙI NAM
Sửa bản in: THANH VIỆT
Trình bày: VẠN HẠNH

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ
161B Lý Chính Thắng - Quận 3 - Thành phố Hồ Chí Minh
ĐT: 39316289 - 39316211 - 38465595 - 38465596 - 39350973
Fax: 84.8.8437450 - E-mail: nxbtre@hcm.vnn.vn
Website: http://www.nxbtre.com.vn

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN TRẺ TẠI HÀ NỘI
Số 21, dãy A11, khu Đầm Trấu, p. Bạch Đằng, q. Hai Bà Trưng, Hà Nội
ĐT: (04)37734544 - Fax: (04)35123395
E-mail: chinhanh@nxbtre.com.vn

Ngôn ngữ của đối xứng

Đối xứng là một công cụ chủ yếu để bắc cầu qua cái hố ngăn cách giữa khoa học và nghệ thuật, giữa tâm lý học và toán học. Đối xứng thực sự là cái gì? Nó đóng vai trò gì trong sự cảm nhận của con người? Nó có liên quan như thế nào với cảm giác thẩm mỹ của chúng ta? Trong thế giới khoa học, tại sao đối xứng lại trở thành một khái niệm then chốt trong những ý tưởng của chúng ta về vũ trụ xung quanh và trong những lý thuyết cơ bản mưu toan giải thích vũ trụ đó? Vì đối xứng trải rộng trong nhiều lĩnh vực, vậy chúng ta sẽ phải dùng "ngôn ngữ" gì và "ngữ pháp" nào để mô tả và đặc trưng cho các đối xứng cùng các thuộc tính của chúng và cái ngôn ngữ phổ quát ấy đã được phát minh ra như thế nào?

Và, vì đối xứng đã xuyên suốt nhiều lĩnh vực, từ nghệ thuật thị giác và âm nhạc tới tâm lý học và các lĩnh vực khoa học tự nhiên, nên sẽ không có gì là quá đáng nếu nói rằng ngôn ngữ này rất quan trọng.