

KHÁM PHÁ

THE GIỚI

KHOA HỌC



$\Omega$

$\lambda$

$\beta$

$\Sigma$

$\mu$

BI MẬT  
TOÁN HỌC

$\sigma$



NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG

# **BÍ MẬT TOÁN HỌC**

**Biên dịch : Tuấn Minh**  
**Nhà xuất bản Lao Động 2007**  
**Khổ 13 x 19. Số trang : 187**  
**Thực hiện ebook : hoi\_ls**  
**(www.thuvien-ebook.com)**

## LỜI MỞ ĐẦU

Bạn có biết nguồn gốc của cách đếm không?

Ý nghĩa của số 0 có phải 1 không có?

Số nguyên tố là gì?

Số chẵn và số nguyên số nào nhiều hơn?

Số thân thiết là gì

Làm sao đoán được một số có thể chia hết cho 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11

Đuôi của một cấp số nhân có bao nhiêu số 0?

Các cặp số nguyên tố sinh đôi có phải là vô cùng không?

Bạn có biết số ngược là gì không?

Tại sao các ống khói nhà máy đều được làm theo hình tháp tròn?

Tại sao những tấm thiệp năm mới giá khác nhau khi ghép lại bán lại bị ít đi một đồng?

Mức nước bình quân của hồ ao là 1,2 m. Bạn có biết điều đó có ý nghĩa gì không?

Khi tăng số điện thoại từ 7 con số đến 8 con số thì chúng ta đã tăng được bao nhiêu thuê bao?

Bạn có thể tính được các vận động viên chạy 200m ở điểm xuất phát vòng ngoài về trước điểm xuất phát vòng trong bao nhiêu không?

Từ tấm bia mộ bạn có thể tính ra được tuổi của nhà toán học không?

Khi bắt thăm thì bắt thăm trước hay sau lợi hơn?

Quân trình sát đã làm như thế nào để đo được chiều cao của các cây lớn?

Tại sao dựa vào mã vạch trên sản phẩm người ta lại có thể biết được giá của sản phẩm?

Trong một ngày đêm, kim phút và kim giờ của đồng hồ trùng nhau bao nhiêu lần?

Trên bản vẽ hàng hải, tuyến đường thẳng có phải là tuyến đường ngắn nhất hay không?

Tại sao trần nhà hát lại có hình Elip?

Cánh của máy bay có đối xứng không?

Vì sao khi tính điểm hát Karaoke phải bỏ điểm cao nhất và thấp nhất?

Dù chia thế nào vẫn còn số táo thừa, vậy tổng số có bao nhiêu quả?

Em có tính được số trận đấu của một giải bóng đá loại vòng tròn không?

Tỉ lệ tăng thể tích khi nước đóng băng lớn hơn tỉ lệ giảm thể tích khi băng tan?

Khi đánh cờ, liệu có xuất hiện cuộc cờ hoàn toà?

Em có thể trước tính được số cá trong ao không?

Thời gian di chuyển qua lại của thuyền khi nước tĩnh và. nước động có bằng nhau không?

Làm thế nào để chia đều 8 lít dầu trong thùng dầu?

Sức nâng của phao bơi lớn đến mức nào?

Quả cầu lăn từ máng nghiêng xuống theo đường nào mất ít thời gian nhất?

Làm sao tính nhanh ra một ngày bất kỳ là ngày thứ mấy?

Tại sao lại có năm nhuận và tháng nhuận?

Khi cửa hàng nhập hàng để đảm bảo chất lượng của sản phẩm có phải kiểm tra tất cả các loại hàng hoá hay không?

Găng tay sạch đảm bảo cho bác sỹ và bệnh nhân không truyền bệnh lẫn nhau nên có mấy chiếc?

Ý nghĩa của việc gieo đồng tiền xu

Đông Đông đi từ nhà đến trường, đi xe buýt số 1 hoặc số 4, nhưng tại sao Đông Đông luôn luôn cảm thấy lúc đi xe số 1 nhiều hơn nhỉ?

Có bao nhiêu cách kết hợp các đồng 1 xu, 2 xu, và 5 xu thành 1 hào?

Làm sao để 1000 chiếc đĩa vào trong 10 chiếc hộp?

Với một chiếc dây thừng có thể tính được đường kính của cây không?

Nhà thám hiểm đi theo hình vuông, tại sao lại biến thành hình tam giác?

Bạn có thể ngay lập tức biết được trong số 10 thùng bi thép thùng nào là thứ phẩm không?

Một chồng ống thép xếp thành hình tam giác, tại sao chỉ cần đếm số lượng hàng cuối cùng là có thể tính ra được tổng số lượng?

Bạn có biết nguyên lý toán học của câu nói “tam nhân đồng hành, tất hữu ngã sư”?

Không di chuyển cây ở bốn góc của ao hồ, làm thế nào để sau khi diện tích của ao hồ hình vuông tăng gấp đôi thì ao hồ vẫn là hình vuông?

Số vô nghĩa được phát hiện như thế nào?

Thế nào là số ảo?

Bạn có biết thế nào là xác suất?

Tại sao lại nói ở đâu cũng thấy thống kê?

Thế nào là vấn đề thừa khuyết?

Thế nào là mô hình toán học?

Bộ sách toán học đầu tiên ở Trung Quốc?

Bạn có biết về giải thưởng Feirzi không?

Số Ả-rập có phải là do người Ả-rập sáng tạo ra?

Ai là người đầu tiên tìm ra hệ đếm theo 60?

Tại sao người Babylon lại sử dụng hệ đếm 60 nhỉ? Về vấn đề này có hai cách lý giải hoàn toàn khác nhau?

Bạn có biết về “số 7 cô đơn” không?

Bạn có biết ý nghĩa của các chữ số La Mã X, XX, XXI, XV, V, VI.... không?

Bạn có biết “thiên can địa chi” là gì không?

Thỏ trắng nấp ở trong những cái hang nào thì cáo mới không tìm ra được?

Bạn có biết nhà toán học nào trong giới động vật không?

Bạn có biết về vòng Macbius kỳ diệu không?

Làm thế nào để nhanh chóng thu hẹp phạm vi?

Sự kỳ diệu của đường gấp khúc bông hoa là ở đâu?

Thất xảo bản được chơi như thế nào?

Cửu liên hoàn kỳ diệu ở chỗ nào?

Bạn có biết về trò chơi ru-bíc không?

Bạn có biết về trò chơi “Hoa dung đạo” của Trung Quốc không?

Bạn có biết góc nhìn một độ lớn

Bạn có thể tính toán cho rõ ràng khoản số sách lãng nhãng sau không?

Bạn có biết mẹo đoán số không?

Làm sao để lấy được vòng bạc?

Lấy đồng xu có mẹo không?

Lễ duyệt binh đã gây ra vấn đề gì?

Sói, Dê, rau bắp cải qua sông thế nào?

Trong tình huống không có bất kỳ một thiết bị đo nào trong tay, bạn có thể đoán ra khoảng cách giữa bạn và người đi trên bờ bên kia?

Sáng tạo toán học từ con nhện giăng tơ

Làm thế nào để phán đoán ai đang nói dối?

Ai là gián điệp quốc tế

Vì sao quốc vương không đủ gạo để thưởng?

Điền Kỳ đua ngựa vì sao mà thắng?

“Búa một thước, mỗi ngày lấy đi một nửa, muôn đời không hết” câu nói này có ý nghĩa gì?

Sao gọi là “điều luật cắt tóc” sai?

Bạn có biết kiến thức số học từ việc con kiến mang được vật nặng không?

Thực nghiệm ném kim thế nào để tìm ra được giá trị của P

Số pi cuối cùng bằng bao nhiêu?

Bạn có biết câu hỏi gà thỏ cùng lồng không?

“Nguyên tắc ngăn kéo” là gì?

quá trình chứng minh “Định lý Féc-ma” không?

Từ màu sắc của bản đồ đã gây ra vấn đề gì?

Đường cao tốc thông tin là gì?

Công cụ tính toán ngày xưa của con người có những loại nào?

Có phải máy tính chỉ chuyên dùng để tính toán?

Vì sao máy tính chứng minh được định lý số học?

Vì sao máy tính sử dụng hệ số nhị phân

Chuyển đổi như thế nào giữa hệ số thập phân và hệ số nhị phân?

Bạn có hiểu thế nào là hệ số bát phân, hệ số thập lục phân không?

Mã ASCII là gì?

Tại sao máy tính bị “tràn” dữ liệu trong tính toán?

Cài mật mã và giải mật mã là thế nào?

Vì sao cần học tốt số học?

Tại sao khi dòng nước chảy gợn sóng lại không bị biến dạng?

“Ngắn 3, dài 4, huyền 5” có nghĩa là gì?

# LỜI MỞ ĐẦU

Thế kỷ XX là thế kỷ của sự phát minh mạnh mẽ về khoa học kỹ thuật. Việc phát minh ra máy bay, sản xuất ô tô công nghiệp hóa với quy mô lớn và xây dựng đường cao tốc đã rút ngắn khoảng cách giữa các khu vực và tác quốc gia; việc phát minh ra Pênêxilin, tiêm chủng phổ biến các loại vắc xin phòng dịch, làm cho con người thoát khỏi những loại bệnh truyền nhiễm đã uy hiếp nhân loại hàng vạn năm nay; việc phát minh ra và phổ cập máy điều hoà, máy giặt, tủ lạnh, truyền hình... đã rất tiện lợi và cải thiện cuộc sống vật chất của con người; việc phát minh ra quang tuyến và điện thoại di động, sự xuất hiện của mạng Internet đã nhanh chóng nối liền con người trên khắp thế giới với nhau nhanh chóng; việc hoàn thành công trình “tổ gien” đã mở rộng nhận thức của con người những tầng sâu của sinh mệnh; việc xây dựng và phát triển của ngành hàng không đã đưa tầm mắt của loài người vươn tới nơi sâu thẳm của vũ trụ. Tất cả những điều đó không những đã làm thay đổi phương thức sản xuất, cơ cấu kinh tế và phương thức sinh sống của con người, nó cũng làm thay đổi nhận thức của con người đối với thế giới khách quan, xây dựng các quan điểm khoa học hoàn toàn mới. Nhờ đó, sự phát triển khoa học kỹ thuật và sản xuất trong 100 năm của thế kỷ XX đã vượt qua tổng hợp mấy nghìn năm phát triển từ khi lịch sử loài người có văn tự đến nay, nhưng đồng thời cũng gây ra một loạt những hậu quả tai hại như phá hoại môi trường sinh thái, nhiều loài sinh vật bị tuyệt chủng... Con người cuối cùng cũng đã nhận thức được, việc khai thác mang tính “cướp bóc” đối với đại tự nhiên sẽ chịu sự trừng phạt nghiêm khắc. Chỉ có sống hài hoà với tự nhiên mới có thể đạt được mục tiêu phát triển bền vững, vừa không làm hại tự nhiên và môi trường vừa không uy hiếp sự sinh tồn của nhân loại và sự phát triển của thế hệ tương lai.

Thế kỷ XXI sẽ là thế kỷ mà khoa học kỹ thuật phát triển như vũ bão và toàn cầu hoá kinh tế tri thức. Dựa trên nền tảng của công nghệ cao, công nghệ thông tin, công nghệ sinh học và công nghệ gien sẽ có sự đột phá và phát triển mới.

Chúng ta đã tiến hành thành công công cuộc đổi mới và đã đạt được những thành tựu hết sức to lớn và rực rỡ. Nhưng so sánh với thế giới và khu vực thì còn những khoảng cách rất lớn, đặc biệt là với các nước phát triển trên thế giới. Đảng và Nhà nước ta đã coi giáo dục và đào tạo, khoa học và công nghệ là chính sách hàng đầu, nhằm thực hiện mục tiêu dân giàu, nước mạnh, xã hội công bằng, dân chủ, văn minh, đi lên chủ nghĩa xã hội. Đó là ý tưởng và sự nghiệp to lớn mà mỗi người dân Việt Nam phải ra sức nỗ lực thực hiện thành công. Đặc biệt, thế hệ tương lai mới là những chủ nhân tương lai của đất nước. “Trẻ em hôm nay, Thế giới ngày mai”.

Với ý nghĩa đó, trong thanh thiếu niên, chúng ta cần hướng dẫn và giúp đỡ họ có hứng thú và chí hướng tìm tòi, học hỏi các tri thức khoa học, phổ cập những kiến thức mới nhất, bồi dưỡng tinh thần khoa học nắm vững phương pháp khoa học. Đây không chỉ là nội dung và nhiệm vụ quan trọng của giáo dục nhà trường mà toàn xã hội bao gồm giới khoa học, giới xuất bản phải hết sức quan tâm.

Sự phát triển như vũ bão của khoa học kỹ thuật hiện đại đặt ra yêu cầu rất cao đối với ngành giáo dục. Mục đích của giáo dục hiện đại là truyền thụ những tri thức và kỹ năng cần thiết cho công việc và cuộc sống, quan trọng hơn là làm cho con người có đủ các quan điểm khoa học và tinh thần khoa học, nắm vững và vận dụng các phương pháp khoa học. Để đi sâu tìm hiểu và nhận thức một cách toàn diện thế giới đã biết và chưa biết, con người cần có các tri thức khoa học rộng về nhiều phương diện.

Chính vì vậy, để tăng cường tổ chức toàn diện cung cấp những tri thức, kiến giải mới cho thanh thiếu niên, chúng tôi đã biên dịch bộ sách **Khám phá thế giới khoa học** từ nhiều nguồn tư liệu của nước ngoài mà chủ yếu là từ cuốn **Những vấn đề khoa học kỳ thú** của NXB Khoa học kỹ thuật Thiên Tân, Trung Quốc - 2004. Hy vọng rằng, với nội dung có thể gọi là phong phú chính xác, dễ hiểu, bộ sách sẽ giành được sự yêu thích của đông đảo bạn đọc.

NGƯỜI BIÊN DỊCH

## Bạn có biết nguồn gốc của cách đếm không?

Bạn có biết cách đếm 1, 2, 3.... như chúng ta hiện nay ra đời như thế nào không? Nó ra đời từ khi nào? Bởi vì thời kỳ nó ra đời đã rất lâu rồi, nên cơ bản không có cách nào khảo chứng chính xác được. Thế nhưng có một điểm có thể khẳng định, đó là : khái niệm về cách đếm và phương pháp đếm số đã ra đời và phát triển từ trước khi chữ viết ra đời. Các nhà khảo cổ đã chứng minh rằng, từ 5 vạn năm trước, con người đã sử dụng một số phương pháp đếm để thực hiện cách đếm số.

Con người ở thời kỳ nguyên thủy, hàng ngày phải đi săn bắn và hái lượm những quả dại để duy trì sự sinh tồn. Có khi họ thu hoạch được rất nhiều sau mỗi lần như vậy, thế nhưng nhiều khi cũng tay không trở về, thực phẩm mang về cũng có khi thì ăn không hết, có khi thì không đủ no. Những thay đổi về số và lượng như vậy trong cuộc sống khiến cho con người dần dần sản sinh ý thức về sự đếm. Họ muốn hiểu được sự khác biệt giữa “có” và “không”, giữa “nhiều” và “ít” và sự khác biệt giữa “một” và “nhiều”. Hơn nữa cùng với sự phát triển của xã hội, phương pháp đếm giản đơn cũng không thể không ra đời, ví dụ một bộ lạc muốn biết họ có bao nhiêu thành viên hoặc có bao nhiêu kẻ thù, ngay cả một cá nhân cũng muốn biết số dê trong chuồng có đủ hay thiếu...

Vậy con người của các dân tộc, các khu vực khác nhau đếm như thế nào? Khảo cổ học cho thấy, con người khi đếm, mặc dù không hề có liên hệ với nhau nhưng người t đều dùng phương pháp “đối ứng một - một”. Ví dụ, người Anh Diêng ở châu Mỹ tính số lượng kẻ thù họ giết được bằng cách thu thập từng cái đầu của kẻ bị giết; người nguyên thủy châu Phi thì đếm số lượng thú họ săn được bằng cách đếm số răng thú mà họ tích lũy được; có thiếu nữ ở những bộ lạc thì quen đeo thêm những chiếc vòng đồng trên cổ để tính tuổi mình. Các phương pháp này đều là dùng cái nọ để đếm cái kia “đối ứng một - một”.

Cùng với nhu cầu giao lưu của xã hội, đã xuất hiện hiện tượng dùng ngôn ngữ để biểu đạt số lượng nhất định, người ta dùng ký hiệu để ghi lại kết quả tính toán, gọi là ghi số. Hơn 3000 năm trước vào thời Thương ở Trung Quốc đã có các ký hiệu để ghi số, ví dụ số 1 dùng một vạch biểu thị, số 2 dùng hai vạch, số 3 dùng ba vạch, số 4 dùng bốn vạch... để biểu thị. Những ký hiệu này về sau dần biến thành những chữ số trong tiếng Hán. Một ví dụ khác, người ở một bộ lạc Nam Mỹ dùng “ngón tay giữa” để biểu thị số 3, họ nói “ngày thứ ba” thành “ngày ngón giữa”.

Ngày nay chúng ta sử dụng các số Ả-rập 1, 2, 3, 4.... do người Ấn Độ phát minh ra khoảng thế kỷ thứ 3 trước công nguyên, những con số này truyền đến các nước Ả-rập, người Ả-rập lại truyền tới Châu Âu. Trải qua quá trình thay đổi, cuối cùng có hình dạng như chúng ta sử dụng ngày nay.

## Ý nghĩa của số 0 có phải là không có?

Khi đi học, điều mà chúng ta học đầu tiên là những bài học về phép tính, làm quen với số 0. Và có lẽ nó là con số nhỏ nhất mà bạn biết được lúc đó. Số 0 có nghĩa là gì? Nếu như bạn dùng tay để đếm số bút trong hộp bút, 1 biểu thị có một chiếc bút, 2 là có hai chiếc bút. Vậy 0 nghĩa là chẳng có chiếc bút nào, ý nghĩa của 0 là không có. Nếu như bạn học phép tính trừ thì  $10 - 10 = 0$ , cũng tức là nó trừ hết sạch rồi, giống như có 10 quả táo mà bị một cậu bạn ăn hết, cuối cùng chẳng còn một quả nào. Xem ra thì 0 đúng là chẳng có gì.

Thông thường 0 biểu thị không có, thế nhưng ý nghĩa của nó không chỉ biểu thị sự không có, mà nó còn có những ý nghĩa khác nữa.

Trong cuộc sống thường ngày, sự nóng lạnh của thời tiết sẽ được biểu thị bằng nhiệt độ, nó sẽ thay đổi cùng với sự chuyển đổi mùa. Và ta thấy  $0^{\circ}\text{C}$  (độ C là đơn vị của nhiệt độ) thì có nghĩa là gì? Nó biểu thị nhiệt độ của môi trường khi nước đóng băng. Từ  $0^{\circ}\text{C}$  trở lên gọi là độ dương, ví dụ 17 độ dương đến 22 độ dương là nhiệt độ thích hợp nhất cho cuộc sống của chúng ta. Còn từ  $0^{\circ}\text{C}$  trở xuống gọi là độ âm, càng xuống thấp thì càng lạnh.

Lại ví dụ như số 0 và 1 sử dụng trong lĩnh vực máy tính thì cũng không còn là 0 và 1 trong các phép tính toán thông thường nữa. Nó biểu thị trạng thái cao thấp của điện áp, 1 là mức điện áp cao, 0 là mức điện áp thấp, hoặc ngược lại. Lúc này 0 không phải mang nghĩa “không có”, mà là một khái niệm trong điện tử học.

Còn có rất nhiều ví dụ khác nói lên số 0 mang rất nhiều ý nghĩa trong cuộc sống, không chỉ biểu thị sự không có trong phép tính toán. Kỳ thực, bản thân số 0 cũng chứa đầy mâu thuẫn. Ví dụ, bất kỳ số n cộng với 0 thì đều giữ nguyên giá trị ban đầu, thế nhưng rất nhiều số nhân với nhau, nhưng chỉ cần trong đó có một số 0, thì kết quả cũng chỉ là 0 mà thôi. Như vậy chúng ta có thể thấy số 0 lợi hại như thế nào. Để giải quyết những mâu thuẫn như vậy, chúng ta phải hiểu rằng những khái niệm trong số học chỉ là tương đối, không phải là bất biến, số 0 cũng như vậy.

Số 0 trong toán học là một con số rất quan trọng, sự chuyển từ 0 đến 1 thể hiện một quá trình từ “không” đến “có”, trong khi từ 1 đến 100, 1000, 10000 thì chỉ thể hiện sự nhiều lên. Mặc dù 0 biểu thị “không có”, nhưng nó lại làm nền, làm cơ sở cho “có”. Trong cuộc sống thì số 0 biểu thị một kiểu trạng thái nhiều hơn là một con số, trạng thái từ 0 trở xuống và trạng thái từ 0 trở lên là một tiêu chuẩn để chúng ta đối chiếu, ý nghĩa của nó thì từ “không có” chưa thể giải thích hết được.



## Số nguyên tố là gì?

Chúng ta đều biết, một số nguyên lớn hơn một, nếu như ngoài bản thân nó và 1 ra, nó không chia hết cho số nào khác nữa thì nó là số nguyên tố. Ví dụ như 2, 3, 5, 7, 11...

Vậy làm sao chúng ta có thể tìm ra được các số nguyên tố trong số các số nguyên dương (hay số tự nhiên dương)? Trong tập hợp các số tự nhiên, có bao nhiêu số nguyên tố? Cho đến nay, người ta vẫn chưa biết được, bởi vì quy luật của nó rất khó tìm, giống như là một đứa trẻ búng bình vậy, nó nấp phía đông, chạy phía tây, trêu tức các nhà toán học.

Có lẽ bạn cũng đã từng nghe đến phương pháp sàng lọc của nhà toán học Eratosthenes, dùng phương pháp này có thể tìm ra các số nguyên tố rất tiện lợi. Nó giống như là sàng lấy sỏi trong cát, sàng lọc lấy những số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên, bằng các số nguyên tố chính là được làm theo phương pháp này.

Thế nhưng, các nhà toán học không hề thoả mãn với việc dùng phương pháp này để tìm ra số nguyên tố, bởi vì nó có chút mò mẫm nhất định, bạn không thể biết trước được số nguyên tố sẽ “sàng” ra là số nào. Điều mà các nhà toán học cần là tìm ra quy luật của số nguyên tố, để tiện nghiên cứu về nó.

Từ trong bảng các số nguyên tố, chúng ta có thể thấy chúng được phân bố như sau : từ 1 đến 1000 có 168 số nguyên tố; từ 1000 đến 2000 có 135 số; từ 2000 đến 3000 có 127 số; từ 3000 đến 4000 có 120 số; từ 4000 đến 5000 có 119 số. Khi số các số tự nhiên càng lớn thì tỉ lệ phân bố các số nguyên tố càng thưa.

Số nguyên tố đã “hoá trang” cho mình rồi lẫn khuất trong các số tự nhiên, khiến cho chúng ta rất khó nhìn ra được. Ví dụ, 101, 401, 601, 701 đều là số nguyên tố, nhưng 301 và 901 thì lại không phải. Có người thử tính như thế này :  $1^2 + 1 + 41 = 43$ ,  $2^2 + 2 + 41 = 47$ ,  $3^2 + 3 + 41 = 53$ ,...,  $39^2 + 39 + 41 = 1601$ . Có 39 số từ 43 cho đến 1601 đều là số nguyên tố, thế nhưng tiếp sau đó :  $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41 \times 41$  thì lại là một hợp số.

Nhà toán học người Pháp Ferma từng nghiên cứu lâu dài về số nguyên tố, ông từng đưa ra một suy đoán thế này : số  $(2^{2n} + 1)$  (với  $n$  là số nguyên) thì nhất định là số nguyên tố. Ferma đã thử 5 “số Ferma” đầu thì đều là số nguyên tố, nhưng đến số “Ferma” thứ sáu tại là hợp số, hơn nữa từ số “Ferma thứ 6” trở đi, không thể phát hiện thấy số nguyên tố nào nữa, toàn là hợp số. Xem ra, số nguyên tố đã cố tình trêu đùa Ferma.

Năm 1644, nhà toán học người Pháp Mason đã đưa ra “số Mason”, hình thức của nó là  $(2p - 1)$ . Khi ông còn sống, ông tìm ra 11p để cho  $(2p - 1)$  là số nguyên tố, người ta tiến hành kiểm chứng đối với 8p, chúng đều là số nguyên tố. 250 năm sau, năm 1903, các nhà toán học tìm ra số Mason thứ 9 không phải là số nguyên tố mà là hợp số. Mặc dù Mason cũng không thực sự tìm ra quy luật của số nguyên tố, nhưng dùng phương pháp của ông, người ta tìm được nhiều số nguyên tố hơn. Trong đó, số nguyên tố Mason thứ 33 được tìm ra nhờ máy tính điện tử, nó có 378632 số hạng, là số nguyên tố lớn nhất mà loài người tìm được đến nay.



## Số chẵn và số nguyên số nào nhiều hơn?

Đọc câu hỏi này, có lẽ bạn chẳng cần phải suy nghĩ nhiều mà trả lời ngay rằng số nguyên nhiều hơn số chẵn, cái bộ phận thì làm sao có thể lớn hơn cái toàn thể. Số chẵn là các số nguyên có thể chia hết cho 2, nó chỉ là một bộ phận trong tập hợp các số tự nhiên, ngoài số chẵn ra, số tự nhiên còn bao gồm số lẻ. Xem ra như vậy thì số chẵn sẽ không thể nhiều hơn số tự nhiên được.

Tuy nhiên, thực chất của vấn đề là muốn hỏi mối quan hệ lớn nhỏ giữa hai tập hợp số tự số chẵn. Tập hợp xét về mặt toán học là tên gọi chung của những cá thể cùng loại. Chúng ta gom mọi số tự nhiên lại thì gọi là tập hợp các số tự nhiên, mọi số chẵn thì gọi là tập hợp số chẵn. Vậy làm sao so sánh được sự lớn nhỏ của hai tập hợp? Đối với những tập hợp hữu hạn thì số lượng các phần tử trong tập hợp sẽ quyết định độ lớn nhỏ của tập hợp đó, ví dụ tập hợp học sinh của một trường sẽ lớn hơn tập hợp học sinh của một lớp. Chính thế luôn lớn hơn 1 bộ phận của nó. Thế nhưng đối với tập hợp vô hạn thì có như vậy không?

Số lượng các phần tử trong tập hợp vô hạn là vô hạn, không thể đếm hết được. Ví dụ tập hợp số tự nhiên, tập hợp số chẵn... là những tập hợp vô hạn. Với những tập hợp vô hạn, chúng ta không thể sử dụng các phương pháp tính toán đối với tập hợp hữu hạn để so sánh lớn nhỏ. Người ta cho rằng, nếu giữa hai tập hợp vô hạn có thể tìm được mối quan hệ đối ứng 1 - 1 (tức là ứng với mỗi phần tử ở tập hợp này, ta có thể tìm được một phần tử ở tập hợp kia) thì chúng ta nói hai tập hợp đó bằng nhau. Đó chính là “lý luận về độ lớn” đối với tập hợp vô hạn.

Với 2 tập hợp số tự nhiên và số chẵn, chúng ta có thể lập ra quan hệ đối ứng như sau :

Số nguyên : ... -n ... -3 -2 -1 0 1 2 3...m ...

Số chẵn : ... -2n... -6 -4 -2 0 2 4 6...2m ...

Bạn thấy rằng, bất kỳ một số k nào trong tập hợp số nguyên ta cũng tìm được một số 2k tương ứng trong tập hợp số chẵn. Như vậy ta có mối quan hệ đối ứng 1-1 giữa hai tập hợp này.

Như vậy theo nguyên tắc so sánh độ lớn giữa hai tập hợp vô hạn, hai tập hợp số nguyên và số chẵn là bằng nhau. Kết luận này có vẻ khó hiểu đối với thói quen của chúng ta, thế nhưng quả thật nó là như vậy.

Kỳ thực không chỉ có tập hợp số nguyên và tập hợp số chẵn là bằng nhau mà có nhiều tập hợp số khác nữa cũng bằng nhau.

## Số thân thiết là gì

Giữa bạn bè với nhau có tình hữu nghị và bạn có biết rằng giữa các con số với nhau cũng có “sự thân thiết”. Một nhà toán học từng nói : “Ai là bạn tốt của tôi thì chúng tôi sẽ giống như hai con số “220 và 284”. Vậy tại sao 220 và 284 lại tương trưng cho những người bạn thân thiết?

Thì ra, 220 ngoài bản thân nó ra, nó còn có 11 ước số là 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55 và 110. Tổng của 11 ước số này vừa đúng bằng 284. Cũng vậy, 284 ngoài bản thân nó, nó còn 5 ước số khác là : 1, 2, 4, 71, 142, tổng của chúng cũng vừa đúng bằng 220. Cụ thể,  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$  và  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ .

Hai số này, trong anh có tôi, trong tôi có anh, gắn bó thân thiết, không tách rời nhau. Các nhà toán học cổ Hy Lạp gọi những cặp số có tính chất như vậy là “số thân thiết”.

220 và 284 là cặp “số thân thiết” nhỏ nhất. Thế kỷ 17 toán học Pháp Fecma tìm ra cặp “số thân thiết” thứ hai là : 17296 và 18416. Cùng thời điểm ấy, một nhà toán học Pháp khác tìm ra cặp số thứ ba là : 9363544 và 9437056. Điều khiến người ta kinh ngạc nhất là nhà toán học Thụy Sĩ nổi tiếng Ô-le vào năm 1750 đã công bố một lúc 60 cặp số thân thiết. Giới toán học được một phen kinh hoàng, họ cho rằng “Ô-le đã tìm ra hết cả rồi”.

Nhưng không ngờ, một thế kỷ sau, một thanh niên nước Ý mới 16 tuổi tên là Baconi đã công bố một cặp số thân thiết vào năm 1866, nó chỉ lớn hơn 220 và 284 một chút, đó là cặp số 1184 và 1210. Những nhà toán học lớn trước đó đã tìm ra chúng, để cho cặp số chẳng mấy lớn này dễ dàng qua mặt.

Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các nhà toán học bằng máy tính đã kiểm tra tất cả các số trong phạm vi 1.000.000, tổng cộng tìm được 42 cặp số thân thiết.

Hiện nay, lượng cặp số thân thiết được tìm thấy đã vượt quá con số 1000. Thế nhưng liệu có phải số thân thiết là nhiều vô hạn? Chúng phân bố có quy luật không? Những vấn đề với nay vẫn còn bỏ ngỏ.

## Làm sao đoán được một số có thể chia hết cho 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11

Phán đoán một số có thể chia hết cho một số khác tức là xem xem hai số sau khi chia cho nhau có phải không còn dư không. Số dư bằng không tức là hai số chia hết cho nhau. Nếu như số chia là những số tự nhiên tương đối đơn giản như : 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11.....thì liệu có phương pháp nào để nhanh chóng phán đoán ra kết quả chia không còn dư hay không? Ở đây tôi chỉ cho bạn một phương pháp :

(1) Phán đoán một số có chia hết cho 2 không tức là phán đoán tính chẵn lẻ của số đó. Nếu như chữ số hàng đơn vị của số đó là : 0, 2, 4, 6, 8 thì chúng chia hết cho 2. Nếu là 1, 3, 5, 7, 9 thì không thể chia hết cho 2. Ví dụ : số 28569 là số lẻ, không thể chia hết cho 2.

(2) Nếu như chữ số hàng đơn vị của một số là 0 hoặc 5 thì nó chia hết cho 5. Nếu như hai số cuối của số đó (hàng đơn vị và hàng chục) là 00, 25, 50 hoặc 75 thì nó chia hết cho 25. Ví dụ : Số 17975 chia hết cho 25.

(3) Cách để suy đoán một số chia hết cho 3 là, tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Cũng vậy, nếu tổng các chữ số của nó chia hết cho 9, thì số đó chia hết cho 9. Ví dụ : Số 174534 có các tổng chữ số của nó là :  $1 + 7 + 4 + 5 + 3 + 4 = 24$ , chia hết cho 3 nhưng không thể chia hết cho 9.

(4) Nguyên tắc suy đoán một số chia hết cho 4 là, tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục chia hết cho 4. Một số chia hết cho 8 là tổng của chữ số hàng đơn vị cộng hai lần chữ số hàng chục cộng bốn lần chữ số hàng trăm chia hết cho 8. Ví dụ : Số 1390276 có  $7 \times 2 + 6 = 20$  chia hết cho 4, nhưng  $2 \times 4 + 7 \times 2 + 6 = 28$  không thể chia hết cho 4 vì vậy số này không chia hết cho 8.

(5) Để biết một số có chia hết cho 11 không, nguyên tắc suy đoán là, số chênh lệch giữa tổng các chữ số ở vị trí lẻ (tính từ phải sang trái) và tổng các chữ số ở vị trí chẵn của nó chia hết cho 11. Ví dụ : Số 882629 có tổng các chữ số hàng lẻ là  $9 + 6 + 8 = 23$ , tổng các chữ số hàng chẵn là :  $2 + 2 + 8 = 12$ . Độ chênh lệch giữa 23 và 12 là 11, vậy số 882629

(6) Để phán đoán một số có chia hết cho 7 hay không thì tương đối phức tạp, trước tiên ghi xuống thứ tự các số 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2,... Sau đó lần lượt nhân các chữ số của số cần đoán (bắt đầu từ hàng đơn vị) với các chữ số đối ứng như liệt kê ở trên, sau đó cộng lại, nếu như tổng đó chia hết cho 7 thì số đó chia hết cho 7. Ví dụ số 5125764, ta có  $4 \times 1 + 6 \times 3 + 7 \times 2 - 5 - 2 \times 3 - 1 \times 2 + 5 = 28$ , chia hết cho 7, vậy số này chia hết cho 7.

Trên đây chúng tôi đã giới thiệu các nguyên tắc tìm ra các số chia hết cho 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11. Vậy làm sao có thể suy đoán được một số có thể chia hết cho 6 hay không? Quy luật rất đơn giản, nếu như nó có thể đồng thời chia hết cho 2 và 3 thì nó sẽ chia hết cho 6.

## Đuôi của một cấp số nhân có bao nhiêu số 0?

Bạn có thể nói cho tôi biết đuôi của phép nhân  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 1999 \times 2000$  có bao nhiêu số 0 hay không? (các số 0 ở giữa không tính).

Nếu như cứ nhân lần lượt từ 1 cho đến 2000 thì con số này quá lớn, chúng ta sẽ khó có thể tính ra với cách tính thông thường như vậy. Ngay cả dùng máy tính cũng không được vì các chữ số ở máy tính là có hạn, một số lớn như vậy sẽ vượt quá giới hạn tính toán của nó. Vậy phải làm sao đây?

Xem ra thì biện pháp phải tìm chính xác đặc điểm trong dãy số đó mà thôi.

Trước tiên chúng ta hãy xem  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ , cuối của số này chỉ có một số 0. Quan sát kỹ hơn một chút ta thấy, trong nhóm số này chỉ có tích của 2 và 5 là làm xuất hiện số 0 mà thôi.

Có người sẽ hỏi rằng  $4 \times 25 = 100$  chẳng phải làm xuất hiện 2 số 0 hay sao? Đúng vậy, thế nhưng  $4 \times 25 = 2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2$ . Như vậy có thể thấy rằng chính  $2 \times 5$  là thủ phạm.

Chúng ta hãy sử dụng những phân tích trên để áp dụng giải quyết bài toán xem sao. Trong biểu thức nhân trên ta thấy số nhân tử 2 nhiều hơn số nhân tử 5, vì vậy ta suy đoán vấn đề mấu chốt là ở số lượng số 5 trong dãy số.

Dưới đây chúng ta thử xem trong dãy số trên có bao nhiêu nhân tử 5.

Trước tiên hãy xét số 5 đơn nhất, ta có 2000 chia cho 5 bằng 400. Lại tiếp tục với số  $5^2 (= 25)$ , 2000 chia cho  $5^2$  bằng 80. Với  $5^3 = 125$  và  $5^4 = 625$ , kết quả lần lượt là 16

và 3. Như vậy chúng ta có thể lập tức đoán được trong dãy tích số rất dài này, tổng cộng đuôi của nó có  $: 400 + 80 + 16 + 3 = 499$  con số 0.

# Các cặp số nguyên tố sinh đôi có phải là vô cùng không?

Hai đứa trẻ sinh từ một bào thai, người ta gọi là anh em sinh đôi. Bạn có biết không, số nguyên tố cũng có anh em sinh đôi. Các nhà toán học gọi hai số nguyên tố hơn kém nhau hai đơn vị là “ số nguyên tố sinh đôi”, hoặc “số nguyên tố song sinh”.

Vậy số nguyên tố sinh đôi có bao nhiêu cặp? Ví dụ : 3 và 5, 5 và 7, 11 và 13, 17 và 19, 29 và 31.....đều là các cặp số nguyên tố sinh đôi, lớn hơn nữa còn có cặp 101 và 103, 10016957 và 10016959. Các nhà toán học thống kê trong phạm vi 1.000 có 35 cặp số sinh đôi, trong phạm vi 10.000 có 205 cặp, trong phạm vi 100.000.000 có 440312 cặp. Xem ra thì các cặp số nguyên tố sinh đôi quả là không ít.

Vậy số lượng các cặp số nguyên tố sinh đôi liệu có nhiều vô cùng không? Vấn đề này đã thu hút rất nhiều người nghiên cứu, nhưng đến nay cũng chưa có kết luận cuối cùng.

Ngay từ thế đầu thế kỷ 20 nhà toán học người Đức Landao đã suy đoán rằng, số lượng số nguyên tố sinh đôi là nhiều vô cùng, thực tế cũng đã ủng hộ lời suy đoán của Landao, thế nhưng vẫn không chứng minh được về mặt toán học. Về sau một nhà toán học đã nghĩ ra một “tuyệt chiêu “. Ông lấy tổng của các số nghịch đảo của các cặp số nguyên tố sinh đôi, đặt tổng này là B, vậy  $B = (1/3 + 1/5) + (1/5 + 1/7) + (1/11 + 1/13) + \dots$  nhà toán học nghĩ rằng, nếu như có thể chứng minh được B lớn hơn bất kỳ số nào thì cũng đồng nghĩa với việc chứng minh được rằng, các cặp số nguyên tố sinh đôi là vô cùng. Phương pháp nhà toán học rất tuyệt, thế nhưng đáng tiếc rằng B được chứng minh là một số hữu hạn.

“Có nhiều vô cùng các cặp số nguyên tố sinh đôi”, giả thiết này cho đến nay vẫn là một bí mật, hơn nữa ngay cả quy luật phân bố của các cặp số nguyên tố này toán học cũng chưa tìm ra.

Ngoài số nguyên tố sinh đôi còn có số nguyên tố sinh 3, nếu như 3 số nguyên tố A, B, C, trong đó B lớn hơn A hai đơn vị, C lại lớn hơn B bốn đơn vị thì ta gọi 3 số nguyên tố đó là số nguyên tố sinh 3. Ví dụ : 5, 7, 11; 11, 13, 17 ; 17, 19, 23 ; 101, 103, 107 đều là các cặp số nguyên tố sinh 3.

Số nguyên tố sinh ba liệu có phải là nhiều vô cùng hay không? Điều này còn cần sự nghiên cứu hơn nữa của các nhà toán học.

## Bạn có biết số ngược là gì không?

Thông thường đọc số chúng ta đều đọc số từ trái sang phải. Nếu như đọc từ phải sang trái chúng ta sẽ được một số mới. Ví dụ : Số 1281 nếu đọc từ phải sang trái sẽ được số 1821. Chúng ta gọi số 1821 là số phản trật tự hay số ngược của số 1281. Có những số, ví dụ như 72127 thì số ngược của nó chính là bản thân nó. Lại ví dụ số 2222 thì số ngược của nó cũng chính là nó. Trừ những tình huống đặc thù, thông thường một số và số ngược của nó không nhất định giống nhau. Thế nhưng số lượng các số hạng của chúng nhất định phải như nhau, Ví dụ số 4321 và số 1234 đều có 4 số hạng. Có một số có 4 số hạng rất kỳ diệu, sau khi nhân với 9 thì kết quả chính là số ngược của nó. Bạn có biết làm thế nào để tìm số này không?

Trước tiên hàng ngàn của số 4 chữ số này chỉ có thể là 1 bởi vì nếu nó lớn hơn 1 thì sau khi nhân với 9 nó có nhiều số hạng hơn. Vì vậy, dạng của số này sẽ là 1abc. Chúng ta có thể lập ra đẳng thức sau :

$$1abc \times 9 = 9ba1$$

Trong đó, 9ba1 là số ngược của 1abc, vì vậy  $c = 9$ . Số lúc đầu bây giờ là 1ab9, như vậy đẳng thức trên có thể chuyển thành :

$$(1 \times 10^3 + a \times 10^2 + b \times 10 + 9) \times 9 = 9 \times 10^3 + b \times 10^2 + a \times 10 + 1, \text{ rút gọn ta được : } 89a + 8 = b.$$

Bởi vì a, b chỉ có thể là các số trong phạm vi từ 0 đến 9, vì vậy a chỉ có thể là 0 tương ứng với b bằng 8.

Vì vậy số có bốn số hạng này là số 1089.

Nếu như bạn có hứng thú bạn có thể thử xem liệu có số ba chữ số nào hoặc số năm chữ số nào có đủ điều kiện như trên không.

Trong thực tế cuộc sống số ngược có rất nhiều ứng dụng. Ví dụ như trong việc lập các mật mã. Nếu như chúng ta cần phát đi một thông tin số, trong quá trình mã hoá có thể sử dụng nguyên tắc số ngược để giữ bí mật thông tin. Tất nhiên việc mã hoá trong thực tế sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng nguyên tắc số ngược cũng tạo ra nền tảng của khoa học mã hoá số liệu.

## Tại sao các ống khói nhà máy đều được làm theo hình tháp tròn?

Khi chúng ta vào các nhà máy, khu mỏ chúng ta có thể trông thấy rất nhiều ống khói, các ống khói này đều được làm theo hình trụ tròn nhưng không phải trên dưới hình trụ tròn đều to như nhau mà phía trên nhỏ hơn một chút và phía dưới sẽ to hơn một chút. Trong toán học người ta gọi hình như vậy là hình nón cụt. Vậy tại sao các ống khói đều được làm thành hình nón cụt mà không phải là hình vuông hay hình trụ? Câu hỏi này không biết đã bao giờ bạn để ý đến hay chưa?

Chúng ta cũng biết rằng, những ống khói tốt thì phải hút ra được nhiều bụi. Xét về mặt lí thuyết thì lẽ ra đường kính miệng ống khói phải làm to mới phải nhưng trên thực tế do những hạn chế của nguyên liệu làm ống khói nên chúng ta không thể làm đường kính miệng ống khói quá lớn được. Bởi thế mà con người đã nghĩ cách để làm ra những cái ống khói có miệng lớn bằng một lượng nguyên liệu nhất định.

Như vậy tại thời điểm nguyên liệu hiếm hoi như vậy thì làm ống khói theo kiểu nào để đạt được hiệu quả hút bụi cao nhất cũng tức là làm sao cho diện tích miệng ống khói phải to nhất. Trước đây khi nghiên cứu việc “Tại sao bình nước nóng phải làm hình trụ tròn?” chúng ta cũng đã từng tìm hiểu mối quan hệ giữa chu vi và diện tích qua đó mà biết được rằng với những diện tích nhất định thì chu vi của hình tròn là nhỏ nhất, chu vi hình tam giác là lớn nhất, chu vi hình vuông là trung bình, ngược lại với những chu vi nhất định thì diện tích hình tròn có phải lớn nhất hay không thì phải xem xét thật kỹ.

Đây chính là đáp án của câu hỏi này. Khi lượng nguyên liệu cố định không thay đổi và phải dùng lượng nguyên liệu này để làm thành hình trụ tròn, hình tam giác và hình vuông có chiều cao như nhau, do diện tích hình tròn lớn hơn so với diện tích của hình tam giác và hình vuông thế nên lượng khói thải qua ống khói hình trụ tròn sẽ lớn nhất. Bởi thế các ống khói lớn đều được làm thành hình trụ tròn. Sở dĩ phía trên của hình trụ tròn nhỏ hơn và phía dưới của hình trụ tròn lớn hơn là bởi nó có 3 ưu điểm sau đây: Thứ nhất hình trụ tròn kiểu này rất vững chắc, ống khói hình nón cụt vững chắc hơn hình trụ tròn bởi vì ống khói cao như vậy phần dưới của ống khói sẽ chịu lực rất lớn nên cần phải làm to hơn. Thứ hai, bởi vì ống khói vươn cao nên nửa trên của nó sẽ chịu sức gió rất lớn, sau khi làm thành hình nón cụt phía trên hơi nhỏ lại một chút sẽ làm giảm bớt ảnh hưởng do sức gió gây ra đối với ống khói. Thứ ba ống khói được làm thành hình nón cụt sẽ thuận tiện hơn trong việc làm sạch những mảng bám bên trên tường và trong ống khói.

Những gì chúng ta nói ở trên là nói về ống khói trong các nhà máy, nếu trong nhà bạn cũng muốn lắp một cái ống khói thì không phải cân nhắc nhiều như vậy bởi vì lượng khói thải qua các ống khói gia đình rất nhỏ nên làm thành hình tam giác hay hình vuông thì đều không có ảnh hưởng gì cả nhất là khi xây ống khói hình vuông lại thuận tiện biết bao.



# Tại sao những tấm thiệp năm mới giá khác nhau khi ghép lại bán lại bị ít đi một đồng?

Khi chuẩn bị sang năm i, Đại Minh - một người bán hàng rong quyết định bán thiệp chúc mừng năm mới trong khuôn viên trường. Thiệp năm mới loại A thì 1 đồng 2 tấm, loại B thì 1 đồng 3 tấm.

Buổi sáng Đại Minh phải vất vả lắm mới bán hết được 30 tấm thiệp loại A và 30 tấm thiệp loại B tất cả được 25 đồng. Buổi chiều, anh ta lại xếp lên xe hàng 30 tấm thiệp loại A và 30 tấm thiệp loại B. Anh nghĩ có thể phối hợp cả hai loại thiệp vào sẽ bán chạy hơn. Vốn là giá loại A là 1 đồng 2 tấm, loại B là 2 đồng 3 tấm nên anh ta tính là 2 đồng 5 tấm. Chẳng mấy chốc 60 tấm thiệp đã bán hết veo nhưng Đại Minh vừa đếm tiền đã ngạc nhiên bởi chỉ được có 24 đồng. Tại sao lại ít hơn một đồng so với buổi sáng? Đại Minh nghĩ mãi mà không ra.

Về nhà Đại Minh bèn đem chuyện này ra kể lại với cậu em Tiểu Minh, hiện đang là học sinh cấp 2. Thế là Tiểu Minh liền viết công thức toán học và giải thích cho Đại Minh tại sao khi gộp số thiệp vào bán thì lại bị bớt mất một đồng tiền.

Chúng ta hay giả thiết thiệp loại A 1 đồng a tấm, vậy giá mỗi tấm sẽ là  $1/a$ , thiệp loại B 1 đồng b tấm, mỗi tấm sẽ là  $1/b$ . Như vậy giá bình quân của mỗi tấm thiệp sẽ là  $1/2 (1/a + 1/b)$  đồng.

Nếu như cộng cả hai loại thiệp vào mà bán theo một giá thì khi đó  $(a+b)$  tấm thiệp sẽ bán được 2 đồng. Vậy giá trung bình của mỗi tấm thiệp sẽ là  $2/(a+b)$ . Như vậy giá bán riêng từng loại và giá bán chung hai loại phải bằng nhau như sau :

$$1/2 + (1/a + 1/b) = 2/a + b$$

$$\text{Tương đương } (a + b)/2ab = 2/a + b (*)$$

$$\text{Đơn giản hoá đi ta được : } (a + b)^2 = 4$$

$$\text{Tương đương với } (a - b)^2 = 0$$

Từ đó có thể thấy trong đẳng thức này chỉ có thể  $a = b$  tức là khi giá của thiệp loại A và thiệp loại B bằng nhau. Khi a khác b có thể chứng minh đẳng thức bên phải sẽ lớn hơn đẳng thức bên trái (trong \*). Điều đó có nghĩa là nếu gộp lại bán thì số tiền thu được sẽ bị bớt đi.

Trong câu hỏi này  $a = 2$ ,  $b = 3$ , a khác b, bởi thế mà khi Đại Minh gộp hai loại thiệp lại để bán thì bị thiệt mất 1 đồng. Sau khi nghe cậu em Tiểu Minh giải thích, Đại Minh mới hiểu ra rằng học toán giỏi lợi biết bao nhiêu.

## Mức nước bình quân của hồ ao là 1,2 m. Bạn có biết điều đó có ý nghĩa gì không?

Sau trời mưa, mặt ao hồ rất xanh, Tiểu Minh muốn cùng các bạn ra hồ bơi. Bên hồ có treo một tấm biển, bên trên viết : “Mức nước bình quân 1,2m”. Tiểu Minh cao 1,7m nên cậu nghĩ “Mình đứng dưới hồ vẫn còn cao hơn mặt nước 50 phân nữa nên không thể có chuyện gì được, chúng mình bơi đi thôi”. Nói xong Tiểu Minh nhảy xuống hồ và bơi đi. Thực ra như vậy là vô cùng nguy hiểm, bạn có biết tại sao không?

Trước tiên, chúng ta cần phải làm rõ “mức nước” và “mức nước bình quân” là hai khái niệm hoàn toàn khác nhau. “Mức nước” chỉ độ sâu của nước tại một nơi trong hồ còn “mức nước bình quân” là chỉ độ sâu trung bình của các nơi trong hồ. Khái niệm “Mức nước bình quân” có phạm vi rộng hơn so với “Mức nước”, nó không chỉ chỉ độ sâu ở một chỗ mà là một cách nói hết sức chung chung.

Vậy giá trị bình quân là gì? Chúng ta thử đưa ra một dãy số rồi đem tổng của chúng chia cho số lượng các chữ số đó, kết quả này chính là giá trị bình quân của dãy số. Ví dụ như giá trị bình quân của 3 con số 1,2 m; 2,0 m và 0,4 m sẽ là  $(1,2 + 2,0 + 0,4)/3 = 1,2$  m. Giá trị bình quân là kết quả do vận dụng toán học tổng hợp mà có được chứ không phải là một giá trị cụ thể nào đó bởi vậy nó có thể lớn hơn một vài số trong dãy số, cũng có thể nhỏ hơn một vài con số trong dãy số và cũng có thể bằng.

Ở đây Tiểu Minh chưa hiểu thế nào là mức nước trung bình. Cậu cho rằng trong hồ chỗ nào độ sâu cũng là 1,2 m, thực ra trong hồ độ nông sâu của các nơi là không như nhau, có nơi nước sâu hơn và cũng có nơi nước nông hơn chỉ có điều là bình quân của những chỗ sâu và những chỗ nông đó là 1,2 m mà thôi. Tiểu Minh cao 1,7m nhưng nếu cậu đến chỗ có độ sâu 2,0 m e rằng có thể sẽ bị chết đuối.

Khái niệm giá trị trung bình là loại khái niệm mà chúng ta thường gặp trong cuộc sống hàng ngày. Chúng ta thường hay nhắc đến chiều cao trung bình của cơ thể, thu nhập trung bình, tuổi thọ trung bình... Đây đều là kết quả bình quân của một dãy số. Trong toán học người ta gọi là số trung bình. Cũng có nhiều trường hợp mà người ta không cần biết giá trị cụ thể mà chỉ cần biết giá trị trung bình là được.

# Khi tăng số điện thoại từ 7 con số đến 8 con số thì chúng ta đã tăng được bao nhiêu thuê bao?

Cùng với việc sử dụng điện thoại một cách phổ cập, con số của số điện thoại cũng ngày một tăng lên. Ví dụ như một trường học hay một cơ quan, mạng điện thoại nội bộ thường là có từ 3 đến 4 con số là đã đáp ứng được nhu cầu sử dụng rồi. Thông thường điện thoại cố định của một gia đình đều là 7 đến 8 con số, còn số điện thoại di động là 11 con số. Bởi vì điện thoại di động có tính năng đường dài cho nên số của nó mới dài như vậy.

Ngày nay ở các thành phố lớn như Bắc Kinh, Thượng Hải, Thiên Tân, Quảng Châu, số điện thoại của cư dân đều từ 7 đến 8 chữ số. Bạn có thể nói cho tôi biết khi số điện thoại tăng thêm một chữ số thì sẽ có thêm bao nhiêu người sử dụng hay không?

Đây là một số điện thoại có 8 chữ số :

8 9 6 0 2 3 4 1

Đơn vị thứ nhất Đơn vị thứ hai Đơn vị thứ 7 Đơn vị thứ 8

Số điện thoại được tạo thành từ những số từ 0 đến 9. Tám vị trí điền 8 con số của số điện thoại sẽ là 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 hoặc 9 nhưng trong đó con số thứ nhất (còn gọi là con số đầu tiên không thể bằng 0) bởi thế nên vị trí thứ nhất chỉ có thể điền một con số từ 1 đến 9, như vậy sẽ có 9 sự chọn lựa khác nhau. Từ vị trí thứ hai cho đến vị trí cuối cùng chúng ta không còn phải suy nghĩ đến yếu tố như của vị trí thứ nhất nữa. Bảy vị trí này có thể điền một số bất kì từ 0 đến 9 và có thể cho phép các con số này lặp lại. Như vậy mỗi vị trí đều có 10 sự chọn lựa. Vậy tổng cộng 8 vị trí này có bao nhiêu cách chọn lựa?

Chúng ta hãy thử tính toán xem :

Vị trí thứ nhất 9 cách chọn lựa, vị trí thứ hai có 10 cách chọn lựa, vị trí thứ ba 10 cách chọn lựa... và vị trí cuối cùng cũng 10 cách chọn lựa. Ta có :

$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^7$ . Cũng với cách lí luận như vậy số điện thoại có 7 con số sẽ có  $9 \times 10^6$  cách chọn lựa khác nhau. Điều này có nghĩa là có  $9 \times 10^6$  số điện thoại có 7 con số.

Số khách hàng sử dụng điện thoại có 8 con số là  $9 \times 10^7$ , số khách hàng sử dụng điện thoại có 7 con số là  $9 \times 10^6$ . Như vậy chênh lệch giữa hai con số này chẳng phải chính là số người dùng tăng thêm hay sao.

Lấy  $9 \times 10^7 - 9 \times 10^6 = 8.1 \times 10^7 = 81.000.000$ . Điều này có nghĩa là khi điện thoại từ 7 con số tăng lên 8 con số thì sẽ tăng thêm 81 triệu khách hàng.

Những trên thực tế lại không phải như vậy. Có những số điện thoại được bắt đầu bằng những con số đặc biệt và được dùng vào mục đích đặc biệt, không thể sử dụng cho những khách hàng đơn thuần được. Ví dụ như 110 là số điện thoại của Công an bắt cướp, 119 là số điện thoại của Công an cứu hỏa, 114 là để hỏi số điện thoại, 168 là dịch vụ đáp thông tin... Tuy những số điện thoại kiểu này không nhiều, chỉ dùng có 3 con số nhưng cũng khiến cho những số điện thoại khác bắt đầu bằng những con số này cũng không sử dụng được. Lấy ví dụ số 110. Khi số điện thoại là 7 chữ số, những số điện thoại bắt đầu bằng 110 sẽ có  $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$  vì con số 110 đặc biệt này mà không sử dụng được. Khi số điện thoại tăng lên làm 8 con số thì sẽ có  $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000$  số điện thoại bắt đầu bằng số 110 không sử dụng được vì cùng một nguyên nhân như trên. Bởi thế mà số điện thoại sau khi tăng thêm một chữ số trên thực tế lượng thuê bao cũng không tăng được 81 triệu.

## **Bạn có thể tính được các vận động viên chạy 200m ở điểm xuất phát vòng ngoài về trước điểm xuất phát vòng trong bao nhiêu không?**

Nếu như bạn đã từng tham gia vào giải chạy 200 m điền kinh bạn nhất định sẽ biết điểm xuất phát không nằm trên cùng một đường thẳng trong khi đó thì đích lại nằm trên một đường thẳng. Tại sao lại như vậy? Bạn có thể nói rằng điều đó là đương nhiên bởi vì trên đường chạy 200 m có một khúc quanh. Nếu như điểm xuất phát và điểm đích đều giống nhau vậy thì vận động viên chạy ở vòng ngoài chẳng phải bị thiệt hại sao? Đó chính là nguyên nhân. Các vận động viên muốn cạnh tranh công bằng, các vận động viên đều phải chạy đủ 200 m trên đường chạy. Do có khúc quanh nên đường chạy ngoài bao giờ cũng dài hơn đường chạy trong một chút nhưng để đánh giá được ai nhanh ai chậm vào phút cuối, để dễ dàng tính được thời gian đến đích nên người ta mới phải làm điểm xuất phát khác nhau như vậy. Vậy thì điểm xuất phát của vòng chạy ngoài sẽ vượt trước điểm xuất phát vòng chạy trong bao nhiêu đây?

Để trả lời cho câu hỏi này trước hết chúng ta phải hiểu rõ khái niệm thế nào là số “p” trong hình học. Vậy p là gì? Đó chính là tỉ lệ giữa chu vi và đường kính của đường tròn và tỉ lệ này là cố định không đổi, nó không hề biến đổi theo kích thước lớn nhỏ của đường tròn (những số như vậy được gọi là đại lượng bất biến). Giá trị của Pi xấp xỉ 3,14. Điều này cũng có nghĩa là chu vi của đường tròn thì bằng 3,14 lần đường kính của nó. Vì đường kính lại bằng 2 lần bán kính do vậy chu vi của nó chính là  $3,14 \times 2 = 6,28$  lần bán kính. Nếu bán kính tăng thêm 1 m thì chu vi của đường tròn sẽ tương ứng tăng thêm 6,28 m. Đường chạy hình tròn của sân vận động thường là mỗi đường chạy có chiều rộng 1,2 m vì vậy theo công thức chu vi bằng  $2 \times \text{bán kính} \times \text{Pi}$  thì đường chạy vòng ngoài sẽ dài hơn đường chạy vòng trong  $2 \times 1,2 \times 3,14 = 7,54$  m. Đường chạy 200 m không phải tất cả đều là đường vòng mà khi bắt đầu mới có một đoạn đường vòng sau đó sẽ vào đoạn đường thẳng. Tại đoạn đường vòng bán kính đường tròn của vòng trong cùng là 36 m. Nếu xét đến vận động viên chạy ở đường chạy thứ nhất đứng tại điểm xuất phát cách đường chạy trong 0,3 m thì chiều dài của đoạn đường cong sẽ là :  $(36 + 0,3) \times 3,14 = 114$  m (Tại sao lại lấy bán kính nhân với p chứ không lấy đường kính? Bởi vì khúc cong đó chỉ là một nửa đường tròn). Phần đường chạy thẳng sẽ là 86 m.

Bây giờ bạn đã hiểu đặc điểm của đường chạy 200 m rồi chứ? Vậy bạn hãy thử tính xem đường chạy ngoài vượt trước đường chạy trong bao nhiêu? Bởi vì chênh lệch giữa bán kính của đường chạy ngoài và đường chạy trong là 1,2 m nên mỗi điểm xuất phát của mỗi vòng bên ngoài xuất phát của vòng bên trong khoảng  $1,2 \times 3,14 = 3,77$  m.

Giả thiết trong giải chạy cự li 200 m có 6 đường chạy thì vận động viên ở vòng ngoài cùng sẽ đứng trước  $3,77 \times 5 = 18,85$  m so với vận động viên ở vòng trong cùng. Chỉ với cách này mới đảm bảo cho mỗi vận động viên đều chạy đủ 200 m, để người vòng trong không được lợi hơn và người vòng ngoài cũng không bị thiệt.

Bây giờ chúng ta đã có thể hiểu được khi người ta đo đường chạy trước mỗi đại hội thể thao chỉ cần đo đủ 200 m chiều dài của đường chạy trong cùng, sau khi xác định được điểm xuất phát rồi dựa vào đó mà dịch chuyển điểm xuất phát của mỗi đường chạy ngoài 3,77 m chứ không cần đo lần lượt từng đường chạy cho đủ 200 m.

## Từ tấm bia mộ bạn có thể tính ra được tuổi của nhà toán học không?

Thời Hi Lạp cổ có một nhà toán học, ông tên là Deaufando. Tuổi tác của ông không hề được viết trên bất kì một tài liệu nào, ngay cả những sự tích liên quan đến thân thế của ông lại càng không ai biết đến. Thế nhưng ở trên bia mộ của ông (Bia mộ là vật mà dùng để khắc tên người chết sau khi họ qua đời) lại có những thông tin liên quan đến cuộc đời ông. Tấm bia mộ này rất đặc biệt, giống như một câu đố về toán học

Chúng ta hãy cùng xem trên tấm bia mộ đó viết những gì?

1. Người qua đường! Đây này là nơi yên nghỉ của Deaufando. Những câu đố trên bia mộ có thể giúp bạn biết được tuổi thọ của ông là bao nhiêu.
2. Một phần sáu ( $1/6$ ) cuộc đời ông là những năm ấu thơ đầy hạnh phúc.
3. Tiếp tục sống một phần mười hai cuộc đời ( $1/12$ ), trên má bắt đầu xuất hiện những sợi lông tơ.
4. Deaufando lấy vợ nhưng vẫn chưa có con cứ như vậy sống thêm một phần bảy cuộc đời ( $1/7$ ).
5. Lại thêm 5 năm nữa, ông đã có con đầu lòng nên cảm thấy rất hạnh phúc.
6. Thế nhưng số phận đã khiến cho những ngày huy hoàng hạnh phúc của đứa con ở trên trần thế chỉ bằng được một nửa so với cha nó.
7. Từ sau khi con trai chết; ông lão sống thêm 4 năm đầy đau khổ sau đó cũng già từ trần thế.

Như vậy bạn có đoán được Deaufando sống được bao nhiêu tuổi không?

Nếu như bạn chỉ tìm đáp án từ những từ ngữ giống như câu đố có trên tấm bia mộ đó thì quả thật rất khó. Thế nhưng căn cứ vào những từ ngữ đó để lập ra phương trình đại số thì câu hỏi sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Chúng ta hãy giả thiết số tuổi của Deaufando là  $X$  thì ph trình này sẽ như sau :

$$X = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$$

Từ đó chúng ta giải ra được  $X = 84$ , điều này cũng có nghĩa là Deaufando tổng cộng sống 84 tuổi.

Vậy ông đã lấy vợ năm bao nhiêu tuổi? Căn cứ vào ý 2 và ý 3 có thể biết được ông kết hôn năm  $84/6 + 84/12 = 14 + 7 = 21$  tuổi.

Sau khi Deaufando lấy vợ lại trải qua  $x/7$  năm và 5 năm nữa mới có con. Khi đó tuổi của ông là  $21 + 84/7 + 5 = 21 + 12 + 5 = 38$  tuổi. Nhưng thật bất hạnh là con trai lại qua đời trước bố. Bốn năm sau khi con trai ông chết, ông già 84 tuổi này cũng kết thúc cuộc đời. Bởi vậy khi con trai chết tuổi của Deaufando là  $84 - 4 = 80$  tuổi.

Xem ra sử dụng phương trình đại số trong việc giải thích các vấn đề mới thuận tiện làm sao. Nếu không như vậy thì đến nay tuổi của Deaufando vẫn là một bí mật.

# Khi bắt thăm thì bắt thăm trước hay sau lợi hơn?

Dương Dương là lớp trưởng, trong trường chuẩn bị tổ chức cuộc thi kéo co nên mời lớp trưởng các lớp bắt thăm để chia nhóm. Tiểu Văn cán sự môn thể dục đề nghị nên bắt thăm trước bởi cậu cho rằng bắt thăm trước cơ hội sẽ nhiều hơn. Nhưng Dương Dương lại có ý kiến là n bắt thăm sau vì bắt thăm sau có thể tính toán được. Cán sự phụ trách học tập Tiểu Huệ thì cho rằng, bắt thăm trước hay sau là như nhau. Vì thế Dương Dương không biết phải làm thế nào. Theo bạn thì các bạn ấy nên làm thế nào?

Thực ra Tiểu Huệ nói rất đúng, bắt thăm trước và bắt thăm sau chẳng có gì khác nhau cả. Hãy xem ví dụ sau đây là sẽ rõ ngay :

Giả sử Dương Dương, Tiểu Văn và Tiểu Huệ cùng bắt thăm để chọn ra ai sẽ là người được tham gia buổi văn nghệ. Trong ba người chỉ có thể chọn một người đi, thứ tự bắt thăm là Dương Dương, Tiểu Văn sau đó là Tiểu Huệ. Trong ba lá thăm chỉ có một lá trúng kí hiệu là D, hai lá không trúng còn lại thì kí hiệu là # và \*. Chúng ta hãy nhìn hình vẽ sau đây khả năng có thể xảy ra của Dương Dương, Tiểu Văn và Tiểu Huệ :

Dương Dương   Tiểu Văn   Tiểu Huệ

Lần thứ nhất   D   #   \*

Lần thứ hai   D   \*   #

Lần thứ ba   #   D   \*

Lần thứ tư   \*   D   #

Lần thứ năm   #   \*   #

Lần thứ sáu   \*   #   D

Vì chỉ có 3 người và rút ba lá thăm, Dương Dương rút đầu tiên, có thể rút 1 lá bất kì trong số 3 lá thăm, Dương Dương có 3 khả năng chọn lựa. Sau khi Dương Dương rút xong thì đến lượt Tiểu Văn, chỉ còn có 2 lá thăm, Tiểu Văn lại rút một lá thăm bất kì trong số 2 lá thăm nên có hai sự chọn lựa. Một lá thăm còn thừa lại sau cùng chính là của Tiểu Huệ, vì Tiểu Huệ chọn cuối cùng nên không còn cơ hội chọn lựa nữa mà chỉ còn lá thăm cuối cùng. Cả 3 người bắt thăm thì tổng cộng có  $3 \times 2 \times 1 = 6$  khả năng. Bởi vì cả ba người đều bắt thăm bất kì nên tất cả có 6 kết quả khác nhau.

Trong 6 cách này chúng ta cũng có thể thấy được Dương Dương bắt trúng thăm 2 lần, chiếm 1/3 số lần bắt thăm, Tiểu Văn bắt thăm ở giữa cũng tương tự như vậy bắt trúng thăm 2 lần, chiếm 1/3 số lần bắt thăm, cuối cùng là Tiểu Huệ cũng bắt trúng thăm 2 lần và cũng bằng 1/3 số lần bắt thăm. Có thể thấy, việc ai bắt thăm trước, ai bắt thăm sau không có quan hệ gì cả, tỉ lệ bắt trúng thăm là như nhau. Dương Dương tuy bắt trước nhưng cũng không có lợi, Tiểu Huệ bắt cuối cùng nhưng cũng không bị thiệt thòi gì. Như vậy Tiểu Huệ đã nói đúng, bắt trước bắt sau chẳng khác gì nhau cả.

Trong toán học, khả năng bắt trúng thăm đó người ta gọi là "Tỉ lệ tương đối". Trong câu chuyện bắt thăm này, bắt thăm trước bắt thăm sau thì tỉ lệ tương đối đều như nhau và bằng 1/3. Thực ra không cần tranh giành ai bắt trước ai bắt sau bởi thế biện pháp bắt thăm để giải quyết vấn đề là biện pháp rất công bằng, đến các cuộc thi đấu thể dục thể thao quốc tế lớn người ta cũng sử dụng phương pháp bắt thăm để chia bảng thi đấu.



# Quân trình sát đã làm như thế nào để đo được chiều cao của các cây lớn?

Trong một cuộc chiến tranh có một phân đội nhận được mệnh lệnh bắc một cây cầu qua khe núi nhưng phía đầu bên kia lại có quân địch trấn giữ. Để trình sát địa điểm nơi phải bắc cầu, viên chỉ huy phân đội đã phái đi một tổ trình sát. Họ đi vào khu rừng rậm gần đấy, chọn ra một cây gỗ lớn rồi tiến hành đo chiều dài và đường kính của nó và tính ra số gỗ cần dùng để làm cây cầu.

Trong khi không làm thế nào để leo lên ngọn cây, trực tiếp đo chiều cao của cây gỗ, bạn có biết các chiến sĩ trình sát đã làm thế nào để đo được độ cao của cây đó không?

Các chiến sĩ đã dùng một thanh gỗ mà đo được chiều cao của cái cây. Trước tiên phải chuẩn bị một thanh gỗ cao hơn một chút so với chiều cao của người chiến sĩ trình sát, sau đó đóng thẳng xuống nơi cách cây gỗ cần đo một đoạn, bản thân người trình sát đó lùi dọc theo đoạn  $DD'$  từ chỗ thanh gỗ, lùi đến chỗ A sao cho mắt người chiến sỹ đó có thể nhìn thấy đỉnh cây và đầu thanh gỗ B' nằm trên một đường thẳng. Sau đó giữ nguyên vị trí điểm đầu không đổi, đưa mắt nhìn thẳng theo đoạn thẳng  $A'C$ , xác định được tia nhìn của mình chia thành 2 điểm thanh gỗ và điểm giao với thân cây là C và C'. Đánh dấu 2 điểm này. Như vậy công việc đo đạc đã gần xong

Căn cứ vào mối liên quan giữa hình tam giác  $A'B'C'$  và  $ABC$  (trong hai hình tam giác này, góc tương ứng là bằng nhau). Từ tỉ lệ thức :

$BC/B'C' = AC/AC'$  suy ra  $BC = B'C' \times AC/AC'$  trong đó  $B'C'$ ,  $AC$ ,  $AC'$  là những khoảng cách có thể đo trực tiếp được từ đó tính được đoạn BC sau đó cộng với chiều dài CD họ sẽ tính được đoạn BD. Đây chính là chiều cao của cây gỗ đó.

Để tính ra được số cây gỗ ở trong rừng, tổ trưởng tổ trình sát đã cử người đi đo diện tích của khu rừng rậm đó sau đó anh đếm số cây trong một khoảng đất có diện tích 50 x 50 mét vuông, sau đó sử dụng phép nhân đơn giản là có thể giải quyết được câu hỏi này rồi.

Bộ đội đã căn cứ vào những tư liệu mà quân trình sát thu thập được để quyết định bắc cầu ở vị trí nào và nên bắc kiềng cầu như thế nào. Nhờ đó cây cầu đã hoàn tất đúng thời hạn và bộ đội cũng hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình.



# Tại sao dựa vào mã vạch trên sản phẩm người ta lại có thể biết được giá của sản phẩm?

Bạn có biết mã vạch là gì không? Nếu như bạn đã từng đi mua đồ ở những siêu thị lớn bạn sẽ biết bởi trên đều có in hình chữ nhật có nhiều sọc đen trắng. Đó chính là mã vạch. Khi thanh toán nhân viên thu ngân dùng một thiết bị đặc biệt quét lên trên mã vạch của sản phẩm, những thông tin như tên, giá của sản phẩm đều được đọc trên máy tính, thật là vừa đơn giản lại vừa nhanh, tiện lợi biết bao. Không biết đã bao giờ bạn quan tâm xem tại sao trong mã vạch lại chứa thông tin về giá cả của sản phẩm chưa?

Mã vạch là những đường sọc được tạo thành từ màu trắng và màu đen nhưng trong đó chiều dài và chiều rộng của các đường sọc không giống nhau, có đường rộng, có đường hẹp lại có đường hơi dài một chút. Bạn hãy thử quan sát thật kỹ mã vạch của một vài sản phẩm khác nhau xem. Tuy mới nhìn thấy chúng có vẻ giống nhau nhưng thật ra chúng hoàn toàn khác biệt mà mắt thật của chúng ta không nhìn thấy được. Kỳ thực sự biến đổi về độ dài ngắn, to nhỏ và màu sắc của mã vạch là để nói lên những thông tin của sản phẩm. Cũng giống như trước đây chúng ta sử dụng chữ số biểu thị tên và giá của sản phẩm (Ví dụ C91 chỉ bút máy và giá của bút máy là 0.50 đồng). Nhưng ngày nay do sự phát triển của máy tính nên con người chuyển sang dùng mã vạch để biểu thị tất cả, xét về mặt bản chất là như nhau chỉ có điều cách thức thay đổi mà thôi.

Sự xuất hiện của mã vạch và sự phát triển của ngành khoa học máy tính có quan hệ rất mật thiết với nhau. Đây là một kỹ thuật mới ra đời nhờ sự phổ cập của máy tính và nó có tên gọi là kỹ thuật mã vạch. Những thông tin mã vạch thể hiện chỉ dùng máy tính mới đọc ra được. Thiết bị mà nhân viên thu ngân dùng để quét mã vạch chính là thiết bị đọc điện quang, còn gọi là bút quang. Khi ánh sáng chiếu lên mã vạch, đường sọc đen trắng sẽ sinh ra sự tương phản rõ rệt từ đó chuyển hoá thành dòng điện lớn nhỏ khác nhau. Độ to nhỏ của các đường sọc sẽ ảnh hưởng đến thời gian xuất hiện dài ngắn. Máy tính sẽ căn cứ vào sự khác nhau tín hiệu để tìm ra những con số được lưu trong máy từ đó được thông tin về sản phẩm. Điều kỳ diệu là khi quét mã vạch, quét từ phải sang trái và từ trái sang phải đều được, những thông tin do máy đọc ra đều như nhau. Sự xuất hiện của mã vạch đã nâng cao hiệu quả công việc đồng thời quá trình truyền thông tin cũng chuẩn xác, không xảy ra sự cố.

Bạn hãy thử nhìn kỹ một vạch, bạn sẽ phát hiện ra bên dưới dãy mã vạch đó còn có một dãy kí hiệu số. Trên thực tế đây cũng là một bộ phận của thành viên mã vạch, mục đích của dãy số là khi thiết bị quét mã vạch có vấn đề thì còn có thể sử dụng được các kí hiệu số đấy. Chúng cũng là những thông tin ghi chép về sản phẩm.

Mã vạch có thể được in trực tiếp ngay trên bao bì của sản phẩm và ngày nay nó cũng không chỉ giới hạn ở màu đen và trắng nữa nhưng nhất định đó phải là hai màu tương phản rõ rệt mới được. Kỹ thuật mã vạch được áp dụng rộng rãi trong đời sống của chúng ta, hầu như tất cả các quyển sách, tranh ảnh xuất bản ra đều phải có in mã vạch, đến ngành công nghiệp ô tô cũng có mã vạch riêng của mình.

# **Trong một ngày đêm, kim phút và kim giờ của đồng hồ trùng nhau bao nhiêu lần?**

Câu hỏi này nghe có vẻ rất đơn giản bởi vì kim phút mỗi tiếng quay được một vòng, cứ quay được một vòng thì kim phút lại trùng kim giờ một lần, một ngày đêm có 24 tiếng như vậy kim phút và kim giờ sẽ gặp nhau 24 lần.

Nếu chỉ nghe qua chúng ta thấy giải thích như vậy là rất có cơ sở, có nghĩa là lấy một chiếc đồng hồ sau đó lấy tay nhắc kim phút thử vài vòng thì kết quả cũng đúng như vậy. Tuy nhiên chỉ thử vài vòng thôi chưa đủ, nên bạn kiên nhẫn thử 12 vòng thì bạn sẽ phát hiện ra số lần mà kim phút và kim giờ gặp nhau không phải là 12 lần mà là 11 lần. Tại sao lại như vậy?

Đây chính là đáp án của câu hỏi. Tuy kim phút chạy mỗi vòng đều trùng với kim giờ một lần nhưng khi kim phút chạy thì kim giờ cũng không hề đứng yên, kim phút cứ chạy được 12 vòng thì bản thân kim giờ cũng chạy được 1 vòng. Bởi thế đối với kim giờ mà nói kim phút chỉ xoay quanh kim giờ có 10 tiếng.

Một ngày đêm có 24 tiếng, khi kim phút chạy được 24 vòng thì kim giờ chạy được 2 vòng bởi thế kim phút chỉ xoay quanh kim giờ có 20 vòng. Bởi vậy một ngày kim phút và kim giờ trùng nhau 20 lần.

# Trên bản vẽ hàng hải, tuyến đường thẳng có phải là tuyến đường ngắn nhất hay không?

Không biết bạn đã từng tham gia vào ngành hàng hải hay đã xem các bản vẽ hàng hải hay chưa? Đó chính là một loại bản đồ mà các nhà hàng hải thường sử dụng, trên bản đồ có vẽ rất nhiều các đường dọc, ngang. Đường dọc gọi là kinh tuyến, đường ngang gọi là vĩ tuyến. Kinh và vĩ tuyến đều có tọa độ. Các cảng ở trên trái đất đều dùng kinh tuyến và vĩ tuyến để biểu thị.

Nếu như tàu của chúng ta đi từ mũi Hảo Vọng của cực Nam châu Phi đến phía Nam của Australia, nhìn trên bản đồ hàng hải, hai nơi này gần như nằm trên cùng một vĩ tuyến, mực nước cũng gần như nhau. Thầy giáo tôi trước đây từng nói : trên một bề mặt đoạn đường giữa hai điểm liên tiếp là ngắn nhất. Xem ra nếu như chúng ta căn cứ vào đường vĩ tuyến trên bản đồ hàng hải thì sẽ đi được từ mũi Hảo Vọng đến phía Nam của Australia. Nhưng thực tế không phải như vậy bởi vì con tàu không đi dọc theo con đường thẳng này mà đi theo đường vòng. Như thế chẳng phải càng đi nhiều đường càng xa hay sao. Vậy tại sao tàu thủy lại đi theo đường vòng như vậy?

Thực ra nguyên nhân rất đơn giản, bởi vì bạn đã bỏ qua một vấn đề đó là trái đất có hình cầu chứ không phải là mặt phẳng. Những kết luận chúng ta có được trên mặt phẳng không thể áp dụng đối với mặt cầu được. Như vậy khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm trên mặt cầu sẽ là thế nào?

Chúng ta hãy thử coi trái đất như một quả dưa hấu, trên quả dưa khắc hai điểm bất kì và coi đó là hai cảng, qua hai điểm cắt một nhát dao nhưng như vậy rất khó tính toán bởi vì có rất nhiều cách cắt quả dưa đó, rút cục chúng ta chọn cách nào đây? Nhưng yêu cầu của tôi lại là nhát cắt qua hai điểm đó phải chia quả dưa ra thành hai nửa bằng nhau thì bạn sẽ biết phải cắt như thế nào rồi chứ? Nhát cắt này không chỉ phải chạy qua hai điểm đã xác định mà còn chạy qua tâm của quả dưa, xác định một mặt phẳng duy nhất chạy qua 3 điểm không nằm trên cùng một đường thẳng, vì vậy sẽ chỉ có một cách cắt này mà thôi.

Trong toán học người ta gọi đường tròn qua tâm hình cầu là đường tròn lớn, bạn cắt quả dưa chính là đã cắt ra đường tròn lớn đó. Giữa hai điểm trên đường tròn lớn đó có hai vòng cung, vòng cung ngắn hơn chính là khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm đó, khoảng cách này cũng chính là khoảng cách ngắn nhất giữa hai cảng. Tàu muốn đi ngắn nhất phải đi theo con đường vòng này.

Đường xích đạo của trái đất chính là đường tròn lớn, nếu như hai cảng này lại nằm trên chính đường xích đạo thì con tàu chỉ cần đi dọc theo đường vĩ tuyến trên bản đồ hàng hải là có thể đến được. Nhưng đối với những cảng không cùng nằm trên đường xích đạo thì chúng ta không thể áp dụng khoảng cách trên đường thẳng giữa hai điểm của bản đồ hàng hải được. Cách thông thường là phải đi theo vòng cung ngắn nhất của đường tròn lớn chạy qua hai điểm.

Không chỉ có riêng tàu thủy, máy bay bay trong không trung cũng là bay theo đường vòng cung của hình tròn lớn. Ví dụ như máy bay từ Bắc Kinh đến Chicagô, Mỹ sẽ bay từ Bắc Kinh bay thẳng hướng Đông Bắc, sau đó bay đến Alaska trọn vẹn một vòng cung lớn.

Có thể bạn sẽ thắc mắc tại sao bản đồ hàng hải tuy không thể phản ánh một cách chân thực quả địa cầu mà chúng ta lại vẫn sử dụng nó. Bởi làm thế sẽ định hướng tàu bè đi lại một cách đơn giản. Nếu như tàu bè đi theo những con đường trên bản đồ hàng hải, tuy phải đi dài hơn một chút nhưng sẽ không phải thay đổi tuyến đường thường xuyên để đảm bảo đi được vòng cung ngắn nhất của đường tròn lớn.

## Tại sao trần nhà hát lại có hình Elip?

Có những lúc bạn ngồi trong nhà hát để thưởng thức âm nhạc tuyệt diệu, không biết có khi nào bạn để ý đến hình dạng kiến trúc của nhà hát hay không? Thông thường trần của nhà hát không hề bằng phẳng mà là hình mặt cầu hay hình Elip. Tại sao lại như vậy bạn có biết hay không?

Trước tiên chúng ta hãy cùng nghiên cứu xem hình Elip là hình như thế nào? Hình Elip có trục tương đối dài được gọi là trục đối xứng. Giả sử chúng ta giữ chặt trục này sau đó cho Elip chuyển động quay quanh trục như vậy chẳng phải là đã tạo được một hình Elip hay sao? Hình Elip này cũng giống như quả bóng mà người ta sử dụng trong môn bóng bầu dục vậy.

Hình Elip có hai giao điểm là  $F_1$  và  $F_2$ , nếu như  $F_1$  và  $F_2$  ngày một tiến gần nhau thì bạn hãy thử suy nghĩ xem hình bầu dục sẽ thay đổi như thế nào? Nếu như hai giao điểm trùng nhau khi đó hình Elip sẽ tròn dần và cuối cùng biến thành một hình tròn, hai giao điểm trùng nhau khi này sẽ trở thành tâm đường tròn.

Giao điểm  $F_1$  của hình Elip có tính chất rất đặc biệt. Nếu như tại  $F_1$  ta đặt một ngọn đèn, ánh sáng đèn sẽ phản xạ qua bề mặt của hình Elip và tập trung tại giao điểm  $F_2$  và ngược lại ánh sáng phát ra từ điểm  $F_2$  cũng tập trung tại điểm  $F_1$  làm cho hai điểm này sáng bừng lên giống như ở vị trí của hai giao điểm này cũng có đèn vậy.

Âm thanh cũng như vậy, khi diễn viên đứng hát tại một giao điểm, âm thanh mà anh ta phát ra cũng phản xạ qua bề mặt của hình Elip cuối cùng cũng tập trung tại giao điểm kia làm cho khán giả ngồi ở đó cũng nghe thấy rất rõ. Hiện tượng này làm cho nhà hát giống như là có hai sân khấu vậy. Thính giả ngồi ở hai bên đều có thể đồng thời nghe được buổi biểu diễn.

Thời cổ đại người Hi Lạp thông thái ngay từ ban đầu đã hiểu được tính chất toán học của hình Elip và ứng dụng vào trong cuộc sống. Từ những hình vẽ còn được giữ gìn cho đến ngày nay chúng ta có thể nhận thấy trần nhà hát của họ cũng được đắp thành hình Elip, tường trong của trần nhà hát nhẵn bóng vô cùng, gần như liền thành một khối với bức tường. Làm như vậy không những có thể làm nhà hát lớn hơn mà còn có thể lợi dụng tính chất của hình Elip để xử lí hiệu quả âm thanh trong nhà hát.

Lần sau khi bạn đi nghe nhạc ở nhà hát hay viện ca kịch thì khi nghe nhạc hãy nhớ để ý quan sát trần nhà hát ở đó xem có giống như bài viết này nói đến hay không nhé.

# Cánh của máy bay có đối xứng không?

Từ nhỏ chúng ta đã thích xem những chiếc máy bay trên bầu trời, với tiếng động cơ ầm ĩ, chúng bay khỏi tầm mắt của chúng ta, biến thành chấm nhỏ trên bầu trời. Chiếc máy bay nào cũng mang một đôi cánh, vậy chúng có đối xứng nhau hay không?

Có thể bạn cũng chưa biết thế nào là hình đối xứng. Hãy xem những chú bướm thật là đẹp, hai bên cánh của chúng hoàn toàn giống nhau, khi chúng xếp lại sau lưng, lại biến thành một; dạng hình mà kích thước, vị trí, đường nét hai bên giống nhau này là hình đối xứng; vậy nên thân bướm chính là trục đối xứng, nếu nhìn từ trục đối xứng này sang hai bên thì hai bên hình vừa là đối nhau vừa là tương xứng. Dưới góc độ Toán học ta gọi nó là hình đối xứng qua trục, nếu quay quanh trục đối xứng  $180^0$  thì hình hai bên phải trùng khít với nhau. Hình đối xứng có rất nhiều, ví dụ như hình tròn, hoa tuyết, lá phong, mặt người, cả công trình kiến trúc như Thiên An Môn (Trung Quốc), rất nhiều hành tinh... không thể kể hết.

Ngoài hình đối xứng qua trục ra, ta còn có hình đối xứng qua tâm, nó không có dạng đối xứng qua một trục mà thể hiện tính đối xứng qua một tâm điểm. Ví dụ như hình vẽ dưới đây xem ra không phải hình đối xứng, thế nhưng nếu ta cho nó xoay  $180^0$  trên mặt phẳng quanh tâm điểm, sẽ được một hình mới trùng hợp với hình cũ. Trên phương diện Toán học thì có rất nhiều đường cong là đối xứng tâm.

Trong cuộc sống chúng ta dùng đến rất nhiều hình đối xứng qua trục. Dễ thấy nhất là mặt người và tứ chi, là điển hình của đối xứng trục, trục đối xứng chính là cột sống của chúng ta. Phần lớn các công trình xây dựng của Trung Quốc cũng là hình đối xứng trục, như cửa đền chùa, lầu gác... hình dạng đối xứng này làm ta có cảm giác rất hài hoà, tạo hiệu quả thăng bằng, vững chắc, thật là phóng khoáng đẹp mắt.

Hai cánh của máy bay cũng là hình đối xứng trục, thân của nó là trục đối xứng, Vì sao cánh máy bay phải làm đối xứng nhau? Chỉ để đẹp mắt thôi sao? Đương nhiên là không phải, khi máy bay bay trên bầu trời, phải chịu sự tác động của luồng không khí, cách máy bay đối xứng đảm bảo cho máy bay nhận lực tác động của không khí ở hai bên bằng nhau, mới có thể giữ được thăng bằng.

Ngoài những hình chúng ta nhìn thấy đống trong cuộc sống ra, còn rất nhiều hình đối xứng mà ta không thể nhìn thấy bên ngoài, như cấu tạo của phân tử muối ăn và thạch cao cũng là hình đối xứng.

# Vì sao khi tính điểm hát Karaoke phải bỏ điểm cao nhất và thấp nhất?

Khi hát Karaoke tính điểm, điểm số hiện ra bao giờ cũng theo quy tắc là loại đi số điểm cao nhất và thấp nhất, sau đó lấy bình quân của các điểm còn lại sẽ ra số điểm cuối cùng. Không biết các em đã bao giờ nghĩ xem vì sao phải loại đi số điểm cao nhất và thấp nhất chưa?

Ví dụ, một bạn hát hết một bài xong, ban giám khảo có sáu người cho điểm đánh giá là 9,00; 9,50; 9,55; 9,60; 9,75; 9,90 (điểm 10 là cao nhất). Sau khi loại đi điểm cao nhất 9,90 và điểm thấp nhất 9,00, lấy bình quân của 4 số điểm còn lại thì bạn nhỏ này đạt số điểm là  $(9,50 + 9,55 + 9,60 + 9,75)/4 = 9,60$ .

Vì sao phải loại đi điểm cao nhất và điểm thấp nhất? Đây là sự loại bỏ số dị thường. Số dị thường là chỉ điểm số quá cao hoặc quá thấp, thường là do sự sơ xuất của giám khảo hoặc cảm tình đặc biệt, thậm chí là có ý xấu hoặc ý tốt gây ra. Để giảm bớt sự ảnh hưởng của điểm dị thường đến tính chính xác của kết quả việc loại bỏ điểm cao nhất và thấp nhất là hợp lí.

Trong toán học, c những lúc số giữa lại phản ánh chính xác tính bình quân hơn cả số trung bình. Số giữa là số nào? Ta xem ví dụ ở trên, trong 6 con số lần lượt sắp xếp ở trên số trung bình của con số thứ 3 và thứ 4 là số giữa, tức là  $(9,55 + 9,60)/2 = 9,575$ . Nếu số giám khảo là 5 người, vậy lấy 5 số đầu tiên, thì số giữa là 9,55. Vậy nên, số giữa cũng như tên gọi của nó là chữ số nằm ở giữa. Nếu số chữ số là lẻ, thì số giữa là số nằm ở giữa; nếu số chữ số là chẵn, thì số giữa là giá trị bình quân của hai số ở giữa.

Chẳng hạn có 10 người tham gia một cuộc thi, nhưng 2 người bỏ thi nên bị 0 điểm, số điểm của 10 người là 0, 0, 65, 69, 70, 72, 78, 81, 85 và 89. Số điểm bình quân sẽ là  $(0 + 0 + 65 + 69 + 70 + 72 + 78 + 81 + 85 + 89)/10 = 60,9$ . Về lí mà nói người được 65 điểm, số điểm hơn mức trung bình này được coi là điểm khá. Nhưng thực ra không phải vậy, nếu loại đi 2 người bỏ thi, người này lại ở vị trí thấp nhất. Lúc này, số trung bình đã không phản ánh đúng trình độ bình quân.

Thế nhưng, điểm 0 của hai người bỏ thi lại không thể không tính, cho nên lúc này chỉ có cách lấy số giữa là tương đối hợp lí. Số giữa của 10 điểm trên là  $(70 + 72)/2 = 71$ . Số điểm này mới là đại diện của “trình độ trung bình”.

Đương nhiên, số trung bình cũng có ưu điểm, nó tính đến tác dụng của mỗi con số; mà phương pháp loại đi điểm cao nhất và thấp nhất chính là lợi dụng ưu điểm của cả số trung bình và số giữa; vừa loại bỏ số dị thường, lại phát huy được tác dụng của đại đa số điểm đánh giá, là phương pháp tương đối hợp lí.

## Dù chia thế nào vẫn còn số táo thừa, vậy tổng số có bao nhiêu quả?

Cơ quan của mẹ Tiểu Cường tổ chức đi chơi xuân, thế là mọi người lũ lượt mang táo đến để chia cho mọi người ăn trên đường đi. Thế nhưng, mọi người đều không ngờ số táo này dù chia thế nào cũng không đều.

Vì sao vậy? Vì khi chia táo đã nảy sinh một vấn đề. Mọi người ban đầu định chia 10 quả vào một túi nhưng chia như thế thì có 1 túi chỉ có 9 quả, nếu chia 9 quả 1 túi, thì túi cuối cùng chỉ có 8 quả; nếu chia 8 quả 1 túi, kết quả là thừa 7 quả; chia 7 quả 1 túi, thừa 6 quả; chia 6 quả 1 túi lại thừa 5 quả... Chuyện này là thế nào vậy? Bất kể chia thế nào cũng không đều? Việc chia táo này làm mọi người rất đau đầu, sau cùng mẹ của Tiểu Cường nhận túi táo bị thiếu 1 quả, việc này mới xem như giải quyết xong.

Khi mẹ về nhà kể lại việc chia táo kỳ lạ này, cậu bé Tiểu Cường thông minh ham học liền suy nghĩ tìm lời giải.

Số táo này tổng cộng có bao nhiêu quả đây? Vì sao con số này lại kỳ lạ như vậy? Các em xem, nó chia cho 10 thì dư 9, chia 9 thì dư 8, chia 8 thì dư 7,... chia 3 dư 2, chia 2 dư 1. Đây là số gì vậy?

Mới đầu có vẻ rất khó, Tiểu Cường nghĩ rất lâu, đột nhiên cậu tìm ra cách giải.

Ví dụ số táo này có  $x$  quả, trực tiếp tìm  $x$  ngay thì rất khó, thế nhưng nếu đem  $x$  cộng thêm 1, dùng  $x + 1$  chia cho 10, 9, 8,..., 3, 2 thì sẽ thế nào? A ha!  $x + 1$  sẽ chia hết cho những số 10, 9, 8, ..., 3, 2. Vậy là vấn đề đã sáng tỏ, một số mà chia hết cho 10, 9, 8,..., 3, 2 thì chẳng phải là bội số chung nhỏ nhất của chúng sao!

Bội số chung nhỏ nhất của 10, 9, 8,... 3, 2 là :

$$5 \times 8 \times 7 \times 9 = 2520$$

Nếu như  $x + 1 = 2520$  thì  $x = 2519$ , cho nên tổng số táo là 2519 quả.

Tiểu Cường sau khi tìm ra con số này đã rất vui mừng. Nhưng cậu lại nghĩ rằng số táo này cũng chưa chắc đã chỉ có như vậy, bởi vì 2520 là bội số chung nhỏ nhất của 10, 9, 8, ... 3, 2 ; con số đó cũng có thể là bội số nào đó của 2520 như 5040 hay 7560... Như vậy, tổng số táo cũng có thể là 5039 hoặc 7559 quả.



# Em có tính được số trận đấu của một giải bóng đá loại vòng tròn không?

Những người yêu thích thể thao, xem đấu bóng có lẽ đều hiểu phương thức đấu bóng thường dùng; ví dụ như đấu loại trực tiếp đấu vòng tròn. Vậy chúng có nghĩa là gì?

Đấu loại trực tiếp là 2 đội thi đấu với nhau, đội thắng sẽ tiếp tục vào vòng trong, còn đội kia bị loại ngay. Phương pháp này rất phù hợp với những trường hợp thời gian ngắn mà số đội tham gia l nhiều. Thế nhưng có một khuyết điểm là nếu muốn giành vị trí quán quân thì không được thua một trận nào; hơn nữa nếu hai đội mạnh gặp nhau quá sớm thì có thể nảy sinh việc đội á quân và các vị trí khác không tương xứng với trình độ thực tế. Vì vậy, trong trường hợp các đội tham gia không nhiều người ta không bao giờ áp dụng phương pháp loại trực tiếp mà sử dụng đấu loại vòng tròn.

Đấu loại vòng tròn tức là một đội sẽ lần lượt thi đấu với các đội còn lại, còn đấu loại vòng tròn đơn là hai đội sẽ chỉ gặp nhau một lần. Ví dụ, tại một trường học nào đó tổng cộng có 15 lớp tham gia giải bóng đá, mỗi lớp một đội; nếu áp dụng đấu loại vòng tròn thì mỗi đội sẽ lần lượt đấu 1 trận với 14 đội kia; như vậy, tất cả sẽ thi đấu  $14 \times 15 = 210$  trận. Còn áp dụng đấu vòng tròn đơn sẽ là  $(14 \times 15)/2 = 105$  trận. Vì 2 đội chỉ gặp nhau một lần, mà trong đấu vòng tròn thì 2 đội sẽ gặp nhau 2 lần nên ta chia cho 2.

Nói chung, giả thiết có một số đội bóng đấu vòng tròn đơn thì số trận đấu sẽ là mỗi đội sẽ đấu với  $n-1$  đội còn lại;  $n$  đội sẽ đấu  $n \times (n-1)$  trận, vì đấu vòng tròn đơn nên cuối cùng phải chia cho 2. Đây là công thức phổ biến tính số trận trong đấu vòng tròn đơn, chỉ cần các em nhớ công thức là có thể sắp xếp các trận đấu.

Chúng ta hãy xét ví dụ giải Bóng đá Vô địch Thế giới, nếu có 32 đội tham gia, áp dụng đấu vòng tròn đơn thì sẽ tiến hành tổng cộng

$$(32 \times 31)/2 = 496 \text{ trận đấu.}$$

Thế nhưng trên thực tế không phải áp dụng phương thức đấu vòng tròn đơn từ đầu đến cuối, như vậy sẽ mất rất nhiều thời gian. Nếu giải Bóng đá Thế giới phải thi đấu 496 trận thì cầu thủ không c sức mà người hâm mộ cũng không theo dõi nổi. Vậy nên bao giờ cũng áp dụng đồng thời đấu loại trực tiếp và đấu vòng tròn đơn theo bảng.

Ví dụ, chia 32 đội thành 8 bảng, áp dụng đấu vòng tròn đơn ở mỗi bảng [ $8(4 \times 3)/2 = 48$  trận] để quyết định đội nhất và nhì của mỗi bảng, tổng cộng ta chọn được 16 đội. Tiếp theo, 16 đội sẽ áp dụng đấu loại trực tiếp, tức là tiến hành 8 trận đấu, chọn ra 8 đội mạnh; sau đó lại có 4 trận loại trực tiếp chọn ra 4 đội và 2 trận đấu loại trực tiếp, chọn ra 2 đội. Cuối cùng 2 đội mạnh nhất sẽ quyết đấu 1 trận giành vị trí nhất, nhì; đội ba, tư cũng đấu 1 trận. Tổng số trận đấu như vậy sẽ là  $48 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 64$  trận.

# Tỉ lệ tăng thể tích khi nước đóng băng lớn hơn tỉ lệ giảm thể tích khi băng tan?

Đọc câu hỏi này có lẽ các em sẽ nghi hoặc, tỉ lệ tăng thể tích khi nước đóng băng và tỉ lệ giảm thể tích khi băng tan là như nhau chứ, không thể không bằng nhau được!

Thế nhưng đúng là có chuyện hai tỉ lệ này không bằng nhau đấy. Giả thiết sau khi nước đóng băng tỉ lệ thể tích tăng lên  $1/11$ , vậy khi băng tan thành nước, thể tích sẽ giảm bao nhiêu đây?

Có người cho rằng vẫn là  $1/11$ , nhưng cũng có người cho là  $1/12$ , các em nói xem, ai đúng ai sai?

Đáng lẽ khi nước đóng băng và khi băng tan không có sự thay đổi về mặt thể tích. Nhưng đáp án lại không phải là  $1/11$  mà là  $1/12$ .

Ta hãy làm một phép tính nhỏ, giả sử thể tích của nước là  $11\text{m}^3$ , sau khi đóng băng tỉ lệ thể tích tăng  $1/11$ , tức là  $11 \times 1/11 = 1$ , nói cách khác là tăng thêm  $1\text{m}^3$ , thể tích của băng sẽ là  $12\text{m}^3$ . Vậy khi băng tan sẽ khôi phục thể tích ban đầu của nước, tỉ lệ thể tích sẽ giảm đi bao nhiêu đây? Ta có  $(12 - 11)/12 = 1/12$ . Tức là thể tích băng giảm  $1/12$  thì mới về thể tích ban đầu.

Vì sao lại có hiện tượng hai tỉ lệ trên không bằng nhau như vậy? Nguyên nhân là vật tham gia của 2 phân số trong phép tính trước sau không giống nhau; phân số thứ nhất là chỉ thể tích tăng lên của nước khi đóng băng, phân số thứ hai là chỉ thể tích băng giảm khi băng tan thành nước.

Có thể thấy 2 phân số này không phải chỉ một phần của cùng sự vật, mà là 2 sự vật là băng và nước, đương nhiên chúng sẽ không giống nhau.

Đây đúng là vấn đề rất thú vị, xem ra đối với phân số nhất định phải xét đến đơn vị của phân số, chứ không thể chỉ xem giá trị của phân số.

## Khi đánh cờ, liệu có xuất hiện cuộc cờ hoàn toà?

Nhất định em đã từng chơi cờ! Vậy trong khi đánh cờ, trong hàng triệu triệu ván cờ có bao giờ xuất hiện những thế cờ giống nhau từ đầu đến cuối không? Chúng ta thử phân tích từ góc độ Toán học xem sao.

Trước tiên hãy lấy cờ vây làm ví dụ. Trên bàn cờ vây có tất cả 361 vị trí, vì vậy trên lí thuyết, quân cờ đầu tiên có 361 cách đặt (quân cờ này có thể đặt một trong 361 vị trí bất kì). Nếu xét rằng trước đó đã đặt 4 quân thì vẫn còn  $361 - 4 = 357$  cách đặt. Vì quân cờ đầu tiên không đặt ở rìa ngoài cùng nên trong thực tế vị trí có thể đặt không nhiều như vậy. Ta cứ tính rằng quân cờ đầu tiên có 50 cách đặt. Cho nên, vị trí có thể đặt của quân cờ thứ hai chắc chắn không chỉ là 50. Sẽ là  $357 - 2 = 355$ , ta cũng lại giả thiết rằng quân cờ thứ hai có 50 cách đặt, theo cách đó, mỗi quân cờ đều có 50 cách đặt. 50 là số ước đoán bình quân.

Như vậy sự biến hóa trong cách đặt của hai loại quân cờ trắng đen là  $50 \times 50 = 2500$  cách. Đây mới chỉ là những biến hoá trong thế cờ thứ nhất. Nếu như hai bên cờ trắng đen mỗi bên hạ 50 quân, mà ta đã giả định mỗi quân có 50 cách đặt, vậy thì tổng số biến hoá của cuộc cờ này là  $2500 \times 2500 \times \dots \times 2500$ , tất cả có 50 lần 2500 nhân với nhau, tức là  $2500^{50} = 50^{100}$ .

Con số có khoảng 170 chữ số, ta dùng đơn vị đếm hàng triệu trăm triệu cũng không thể đếm được. Thật là một con số quá lớn! Chúng ta lấy một ví dụ xem con số này cuối cùng lớn bao nhiêu. Ví dụ bình thường khi ta đếm, với tốc độ bình thường đếm từ 1 đến 100 cần 50 giây. Những số từ 100 trở lên, vì chữ số tăng thêm nên thời gian đếm càng nhiều, đếm 1000 cần 500 giây, đến 1 trăm triệu cần 14000 giờ. Một ngày có 24 giờ, đếm liên tục không ăn không ngủ cũng phải mất 500 ngày. Một người 100 tuổi, từ lúc đã bắt đầu đếm, đếm đến 100 tuổi, cũng chỉ có 36525 ngày, vẫn chưa đếm đến 10 tỷ, mà cũng chỉ là 11 chữ số! Vậy mà số có 170 chữ số còn lớn hơn nó  $10^{159}$ . Một con số lớn như vậy, xem ra khả năng ván cờ vây có thể cờ hoàn toàn giống nhau là không thể xảy ra.

Tiếp theo, ta hãy xét cờ tướng của Trung Quốc. Thế của cờ tướng xem ra có vẻ ít hơn, nhất là khi mới khai cuộc, biến hoá của thế cờ cũng không nhiều. Thế nhưng càng đánh về sau biến hoá càng nhiều, một quân xe có trước sau phải trái hơn 10 cách đi, cho nên nước tiếp theo có 10 đến 20 cách biến hoá là hoàn toàn có thể. Nếu mỗi bên đi 30 nước, thì sự biến hoá sẽ có 1060 cách. Con số có 61 chữ số này thì một người 100 tuổi đếm cả đời cũng không hết.

Tổng hợp những phân tích trên ta rút ra kết luận : trong chơi cờ, khả năng xảy ra thế cờ giống nhau từ đầu đến cuối là vô cùng nhỏ.

## Em có thể ước tính được số cá trong ao không?

Ước tính là tính toán một cách khái quát. Có những lúc ta không thể tính toán một cách chính xác số lượng sự vật giống như là tính số cá đang bơi trong ao, sản lượng thóc trên đồng, số dân của một quốc gia... Khi đó phải sử dụng ước tính để tìm ra con số tương đối.

Thế nhưng tuy ước tính không phải cách tính chuẩn xác nhưng cũng phải tìm phương pháp sao cho con số ước tính sát với con số thực tế nhất.

Chúng ta ước tính sản lượng thóc trên 1 mẫu ruộng, phương pháp thường dùng là thu hoạch phần thóc trên 1 sào ruộng (1 mẫu = 10 sào), tính sản lượng của nó rồi nhân với 10 thì sẽ tìm ra sản lượng của 1 mẫu ruộng. Có khi để giảm thiểu sai số (sai số là giá trị chênh lệch giữa giá trị ước tính được và giá trị thực tế, vì là ước tính nên không tránh khỏi có sai số, chỉ có điều là giảm bớt sai số một cách hợp lý), người ta thu hoạch đồng đều số thóc trên những mảnh đất khác nhau, sau khi tính sản lượng thì tìm được giá trị bình quân của chúng; sau đó lại lấy giá trị bình quân nhân với 10 thì sẽ ước tính được sản lượng 1 mẫu. Phương pháp này có hiệu quả hơn so với phương pháp đầu, bởi vì có thể lúa không được trồng một cách đồng đều; chỗ thì thưa chỗ thì dày. Phép tính bình quân này chính là đã tính đến vấn đề này.

Vậy cũng dùng phương pháp này có tính được số cá ở trong ao không? Câu trả lời là không, bởi vì cá ở trong ao di chuyển không ngừng, hơn nữa số cá những chỗ khác nhau là không giống nhau mà cũng không thể bắt tất cả cá trong ao lên để đếm được. Như vậy chúng ta nên làm như thế nào?

Có một cách rất hay. Trước hết hãy bắt một số cá bất kì trong ao, ví dụ 100 con sau đó đánh dấu lên mình chúng rồi thả xuống ao. Một thời gian sau có thể nhận thấy số cá đã bị đánh dấu ấy đã di chuyển đến khắp mọi nơi trong ao, phân tán đều trong bầy cá. Lúc này chúng ta lại bắt thêm một số cá nữa, ví dụ 50 con, xem trong đó có bao nhiêu con đã được đánh dấu, có thể sẽ có 2 con là có kí hiệu trên mình. Vậy là trong số 50 con thì chỉ có 2 con là có kí hiệu, chiếm  $\frac{2}{50}$ , trong ao lại có 100 con có kí hiệu, do đó số cá sẽ là  $100 \div (\frac{2}{50}) = 2500$ . Con số này chính là số chúng ta ước tính được.

Cũng như vậy để giảm bớt sai số chúng ta cũng có thể bắt cá chia làm nhiều thời điểm khác nhau, địa điểm khác nhau, đếm ra số cá đánh dấu trong đó rồi tính tỉ lệ của chúng sau đó tìm ra giá trị bình quân của các tỉ lệ này và lấy 100 chia cho giá trị bình quân này sẽ ước tính được tổng số cá trong ao.

Tuy rằng, làm như vậy thì phức tạp một chút nhưng kết quả tính được chính xác hơn so với cách bên trên.

## Thời gian di chuyển qua lại của thuyền khi nước tĩnh và. nước động có bằng nhau không?

Với tốc độ không đổi, thời gian khi thuyền máy di chuyển qua lại một lần trong nước tĩnh và trong nước động có như nhau không? Về vấn đề này, có người trả lời : “Thời gian di chuyển của hai lần này là như nhau. Bởi vì, khi nước chảy, thuyền lúc đi bị ngược dòng, tốc độ bị giảm; khi quay lại thì xuôi dòng, tốc độ sẽ tăng, vì vậy thời gian lâu khi thuyền ngược dòng và thời gian nhanh khi thuyền xuôi dòng sẽ bù trừ cho nhau, như vậy chẳng phải là bằng với thời gian khi thuyền đi và về trên mặt nước tĩnh hay sao?

Nếu chúng ta không tính toán một cách kỹ càng, mà chỉ dựa vào kiến thức phổ thông và sự suy đoán thì ta sẽ có đáp án như trên. Thế nhưng đáp án chính xác lại không phải vậy. Chúng ta tính toán một chút là có thể

Giả thiết, độ dài một chiều của mặt nước là 50 dặm, vận tốc của thuyền là 20 dặm/giờ.

Cũng với lộ trình như thế, khi nước chảy xiết, giả sử vận tốc của dòng nước là 5 dặm/1 giờ đồng hồ, vận tốc của thuyền máy vẫn là 20 dặm/ 1 giờ đồng hồ, vậy thì khi thuyền đi ngược dòng nước, thời gian cần tiêu hao là  $5 \div (20 \div 5) = 3,3$  giờ đồng hồ, khi thuận chiều dòng nước thời gian cần để thuyền máy đi hết quãng đường là  $5 \div (20 + 5) = 2$  giờ đồng hồ.

Như vậy khi vận tốc dòng nước là 5 dặm/ 1 giờ đồng hồ, thời gian mà thuyền máy cần để cả đi và về là  $3,3 + 2 = 5,3$  giờ đồng hồ.

Từ kết quả tính toán nói trên cho thấy : khi nước chảy với một vận tốc nhất định, với một chiếc thuyền máy có tốc độ nhất định thì thời gian cần để thuyền đi và về phải nhiều hơn thời gian khi thuyền cùng đi một đoạn đường như vậy trong nước lặng.

Hơn nữa qua tính toán cũng cho thấy nếu dòng nước chảy càng mạnh dù thời gian mà thuyền cần để đi và về càng nhiều.

## Làm thế nào để chia đều 8 lít dầu trong thùng dầu?

Có một câu đố như thế này : chúng tôi có một thùng dầu chứa 8 lít dầu, ngoài ra còn có hai bình nhỏ nữa, một bình chứa được 5 lít dầu, một bình chứa được 3 lít dầu; nếu phải dùng hai chiếc bình này để chia đều thùng dầu 8 lít thành hai phần 4 lít thì nên làm như thế nào?

Bạn có thể thử làm trước rồi hãy xem đáp án nhé.

Các bước chia đều 8 lít dầu như sau :

(1) Trước tiên đổ 3 lít dầu từ thùng dầu vào chiếc bình nhỏ;

(2) Sau đó đổ 3 lít dầu từ chiếc bình nhỏ vào chiếc bình lớn;

(3) Tiếp đó lại đổ 3 lít dầu từ thùng dầu vào chiếc bình nhỏ;

(4) Lại đổ dầu ở trong bình nhỏ vào đầy chiếc lớn. Do chiếc bình lớn chỉ chứa được 5 lít dầu nên trong bình nhỏ lúc này còn lại 1 lít dầu.

(5) Đổ 5 lít dầu ở bình lớn vào lại thùng dầu, lúc này trong thùng dầu có tổng cộng 7 lít dầu;

(6) Đổ 1 lít dầu ở trong bình nhỏ vào bình lớn;

(7) Tiếp đó lại lần thứ 3 đổ 3 lít dầu từ thùng dầu vào đầy chiếc bình nhỏ, lúc này trong thùng dầu còn 4 lít dầu;

(8) Đổ 3 lít dầu ở bình nhỏ vào lại bình lớn, cộng với 1 lít dầu đang có trong bình lớn thì vừa đúng 4 lít dầu.

Như vậy thông qua ước nói trên, 8 lít dầu đã được chia đều. Không biết đáp án của bạn có giống như vậy không?

Nếu không có đáp án, bạn hãy xem các bước nói trên, và hãy thử giải đáp câu hỏi sau :

Có một thùng chứa đầy 10 lít dầu, ngoài ra có 2 chiếc bình, một chiếc bình chứa vừa đúng được 3 lít dầu, một thùng khác chứa được 7 lít dầu. Xin hỏi làm thế nào để chia đều 10 lít dầu thành 2 phần 5 lít dầu bằng hai chiếc bình nói trên?

Đáp án của câu hỏi này cũng tương tự như cách làm ở trên, bạn hãy làm giống như các bước nói trên sẽ nhanh chóng có được đáp án chính xác. Có lẽ bạn cho rằng cách làm như vậy là một sự trùng hợp tình cờ, thực ra không phải như vậy mà ở đây có chứa đựng nguyên lý toán học của nó.

Số lít dầu mà hai chiếc bình chứa được là 5 và 3, đây là hai số hữ chất, các số hữ chất có tính chất như thế này : sau nhiều lần tính toán cộng, trừ sẽ có được kết quả là 1, nếu lại lặp lại nhiều lần nữa thì có thể có được bất kỳ số chẵn nào.

Ví dụ như  $3 + 3 - 5 = 1$ , mà  $4(3 + 3 - 5) = 3 \times 8 - 5 \times 4 = 4$ , đây chính là số mà chúng ta cần. Điều này có nghĩa là sau mấy lần đổ đi đổ lại, chúng ta nhất định có được 1 lít dầu, như vậy theo lý thuyết chúng ta lặp đi lặp lại 4 lần thao tác như trên thì sẽ được 4 lít dầu mà chúng ta cần. Nhưng trên thực tế chúng ta không cần phải làm tới 4 lần, bởi vì có 1 chiếc bình 3 lít dầu mà  $3 + 1 = 4$ , cho nên chúng ta sẽ nhanh chóng chia đều được 8 lít dầu.

## Sức nâng của phao bơi lớn đến mức nào?

Hầu hết ai đã từng đi bơi cũng biết tới phao bơi, khi bạn vui chơi nô đùa trong nước với chiếc phao bơi đầy màu sắc, bạn có từng nghĩ rằng, sức nâng của phao bơi lớn đến mức nào, tại sao nó lại có thể giúp một người nổi trên mặt nước?

Vậy sức nâng của phao bơi được tính toán như thế nào? Các kiến thức toán học cho chúng ta biết rằng, lấy thể tích của phao bơi sau khi được bơm căng nhân với mật độ của nước rồi trừ đi độ nặng của chính phao bơi, ta sẽ có được kết quả về sức nâng của phao bơi.

Về mật độ của nước thường được tính bằng đơn vị  $1 \text{ kg/ } 1\text{m}^3$ , cũng có nghĩa là mật độ của nước trong mỗi một  $\text{cm}^3$  là 1g. Sau đây chúng ta cùng xem thể tích của phao bơi được tính như thế nào?

Trước tiên hãy bơm căng hơi cho phao bơi, sau đó dùng thước có khắc vạch độ để đo 3 loại số liệu dưới đây : (1) độ rộng  $w$  của hình vòng, được biểu thị như hình vẽ, đây là độ rộng của vòng phao bơi sau khi được bơm căng hơi, chú ý là khi đo phải để thước qua đường trục trung tâm của phao bơi thì kết quả đo được mới tương đối chuẩn xác. (2) độ cao  $h$  của phao bơi : đặt phao bơi nằm trên mặt đất để đo độ cao của nó. (3) đường kính trong  $r$  của phao bơi sau khi bơm hơi.

Sau khi đo được 3 số liệu nói trên, thể tích của phao bơi sẽ được tính theo ng thức sau :

$$V = 1/2 (p)^2 \times w \times h \times (r + 1/2w)$$

Trong đó,  $p = 3,14$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $r$  lần lượt là độ rộng vòng, độ cao và độ dài đường kính trong của phao bơi.

Chúng ta hãy lấy một ví dụ cụ thể để tính toán. Có một loại phao bơi bằng nhựa khi chưa bơm hơi có đường kính tròn của mép ngoài cùng là 75 cm, sau khi bơm căng hơi đo được độ rộng là  $w = 17 \text{ cm}$ , độ cao  $h = 13 \text{ cm}$ , đường kính trong của hình vòng là  $r = 15,5 \text{ cm}$ , phao nặng 170g. Thay các số liệu này vào công thức tính ta có :

$$V = 1/2 \times 3,14^2 \times 17 \times 13 \times (15,5 + 17/2) = 26148 \text{ cm}^3$$

Như vậy sức nâng của chiếc phao bơi này khoảng chừng 254,5 Newton.

Do khi người ở trong nước cũng chịu sức nâng của nước, cộng thêm sức nâng của phao bơi nên hoàn toàn có thể nổi người trên mặt nước, vì vậy phao bơi còn có tên gọi là phao cứu sinh.



# Quả cầu lăn từ máng nghiêng xuống theo đường nào mất ít thời gian nhất?

Muốn để một quả cầu kim loại lăn theo máng nghiêng trơn từ điểm cao A xuống điểm B nên làm máng nghiêng thành hình gì để thời gian quả cầu rơi là ít nhất?

Câu hỏi này nghe qua có vẻ chẳng khó chút nào, khoảng cách đường thẳng giữa hai điểm ngắn nhất thì chỉ cần làm máng nghiêng thành hình thẳng, đường đi của quả cầu ngắn nhất thì cũng sẽ mất ít thời gian nhất? Nhưng thời gian để quả cầu rơi không chỉ có quan hệ tới đoạn đường cầu sẽ đi, mà còn có liên quan vận tốc của quả cầu. Đường đi thẳng của máng nghiêng là ngắn nhất nhưng nó không giúp cho quả cầu rơi với thời gian nhanh nhất.

Vậy nếu xét tới yếu tố tốc độ rơi của quả cầu, có thể làm máng nghiêng thành hình cung tròn. Như vậy đường đi của quả cầu khi rơi từ điểm A xuống sẽ tương đối dốc, tốc độ chắc chắn sẽ nhanh hơn máng thẳng. Quả thực là như vậy, đoạn cong của hình cung tròn khi rơi từ điểm A xuống sẽ có tốc độ khá nhanh nhưng sau khi đến điểm C, đoạn đường CB sẽ tương đối bằng phẳng cho nên ở nửa đoạn trước quả cầu mặc dù chạy nhanh nhưng đến nửa đoạn sau lại chạy chậm, thời gian mà quả cầu cần khi đến B vẫn chưa chắc nhanh hơn thời gian mà quả cầu lăn theo máng thẳng?

Vậy rốt cuộc nên làm chiếc máng theo hình dạng gì? Nhà vật lý học kiêm nhà thiên văn học người Italy Galilê đã từng cho rằng nên làm chiếc máng thành hình cung tròn. Nhưng 50 năm sau, anh em nhà toán học người Thụy Sĩ Bernoulli sau khi tính toán chính xác tỷ mỉ đã chứng minh không nên làm như vậy, chiếc máng này nên làm thành hình vòng cung cong gấp thành đường võng, chiếc máng hình dưới cùng như trong hình vẽ chính là hình vòng cung đường võng. Vì thế đường võng được gọi là “đường đi xuống với tốc độ nhanh nhất”.

Thế nào là đường võng? Chúng ta lấy một hình vòng tròn (ví dụ như một cái bánh xe, một vòng chun...), trên vòng tròn đó đánh dấu một điểm (lấy phần đánh dấu điểm đó, hoặc đánh dấu bằng một sợi dây buộc nhỏ), để cho động một vòng trên mặt đất, lúc này đường mà điểm đánh dấu đi qua chính là đường võng, là một đường gấp khúc gần với cung tròn.

Phương pháp tính đường võng của anh em Bernoulli sau này phát triển thành một ngành toán học mới là biến phân học, có tác dụng to lớn trong lịch sử toán học.

## Làm sao tính nhanh ra một ngày bất kỳ là ngày thứ mấy?

Nếu tôi chọn ra một ngày bất kỳ trong quá khứ hoặc tương lai, cho bạn biết ngày, tháng, năm của hôm đó thì bạn có thể nhanh chóng tính ra xem ngày hôm đó là thứ mấy được không?

Có thể bạn cho rằng phải tìm trong lịch vạn niên, nhưng nếu dùng lịch vạn niên thì không thể gọi là tính nhanh nữa rồi. Chúng tôi sẽ cung cấp cho bạn một công thức tính nhanh mà không cần phải dùng tới lịch vạn niên.

$$S = X + [(X-1)/4] - [(X-1)/100] + [(X-1)/400] + C$$

Trong công thức này, X là số năm theo dương lịch, ví dụ năm 2004, năm 2005; C là số ngày tính từ ngày đầu tiên của năm đó tới ngày hôm đó (bao gồm cả ngày hôm đó). Phép chia trong ba dấu móc phải lấy kết quả chẵn tức là nếu chia ra có phần dư thì chúng ta sẽ bỏ qua mà chỉ lấy phần chẵn, ví dụ 501,5 thì lấy chẵn là 501. Sau khi có được kết quả S, lấy S chia cho 7, số dư của kết quả tìm được chính là thứ mấy mà chúng ta cần tìm, nếu dư 1 thì là nhật, dư 2 là thứ 2,..... dư 7 là thứ 7.

Công thức này cũng khá đơn giản, dưới đây chúng ta thử tính xem ngày 1 tháng 6 năm 2000 là thứ mấy nhé? Theo công thức trên chúng ta cùng tính giá trị S:

$$S = 2000 + [(2000-1)/4] - [(2000-1)/100] + [(2000-1)/400] + 153$$

$$= 2000 + 499 - 19 + 4 + 153$$

$$= 2637$$

$$S \div 7 = 2637 \div 7 = 376 \text{ dư ra } 5$$

Vì thế ngày mùng 1 tháng 6 năm 2000 là ngày thứ 5.

Các bạn thấy chưa, tính như vậy rất là đơn giản phải không! Nhưng khi tính chúng ta phải lưu ý tới năm nhuận, ví dụ năm 2000 là năm nhuận, tháng 2 của năm nhuận có 29 ngày chứ không phải là 28 ngày như năm thường, vì thế khi tính toán chúng ta không được quên điều này.

Bây giờ bạn có thể theo công thức nói trên tính xem ngày sinh nhật của bạn là thứ mấy nhé!

## Tại sao lại có năm nhuận và tháng nhuận?

Lấy ví dụ năm 2000, tháng 2 năm 2000 có 29 ngày, nếu như bạn giở lịch ra xem sẽ thấy tháng 2 năm 1999 chỉ có 28 ngày rồi năm 1998 cũng chỉ có 28 ngày. Chúng ta gọi những năm mà tháng 2 chỉ có 28 ngày là năm thường còn năm mà tháng 2 có 29 ngày là năm nhuận.

Vậy tại sao phải chia ra năm thường và năm nhuận?

Theo thiên văn học gọi thời gian mà trái đất quay quanh mặt trời từ điểm xuân phân trở về điểm xuân phân là chu kỳ 1 năm, độ dài của nó không phải là 365 ngày mà chính xác là 365,2422 ngày, vậy số thừa ra của mỗi năm thì làm thế nào? Trước đây người ta lấy 365,25 là chu kỳ 1 năm, thì mỗi năm dài thêm 11 phút 14 giây. Xem ra sai số như vậy không lớn lắm nhưng tích lũy lại thì không nhỏ chút nào, tính từ năm 46 trước công nguyên tới thế kỷ 16 thì chênh ra tới 10 ngày, kết quả là ngày xuân phân là ngày 21 tháng 3 phải sớm thành ngày 11 tháng 3. Vì thế người ta đành phải quy định ngày 5 tháng 10 của năm 1582 thành ngày 15 tháng 10 để bù lại 10 ngày bị mất.

Để tránh sau này lại xuất hiện tích lũy sai số, người ta quy định như sau, tất cả những năm dương lịch chia hết cho 4 là năm nhuận; những năm chẵn trăm thì phải chia hết cho 400 mới là năm nhuận. Ví dụ như năm 1996 là năm nhuận, năm 2000 chia hết cho 400 thì cũng là năm nhuận, nhưng năm 2200 không phải là năm nhuận.

Năm nhuận là năm dương lịch nhưng tháng nhuận lại là hiện tượng của năm âm lịch. Ví dụ năm 1998 có tháng 5 nhuận, năm này có 2 tháng 5, vậy là tại sao nhỉ?

Chúng ta đều biết, chỉ có một số nước như Việt Nam, Trung Quốc là có tính năm âm lịch, ví dụ như ngày 4 tháng 2 lập xuân, ngày 22 tháng 12 là ngày đông chí... ; âm lịch phản ánh sự biến đổi tròn khuyết của mặt trăng (cũng như sự lên xuống của nước biển) và thời tiết nóng lạnh. Âm lịch quy định tháng đủ có 30 ngày, tháng thiếu là 29 ngày. Bởi thời gian một chu kỳ thay đổi của mặt trăng là 29,5306 ngày, như vậy giá trị trung bình của vài tháng sẽ gần với thời gian một chu kỳ biến đổi của mặt trăng. Vì vậy người ta quy định năm thường có 12 tháng cả năm là 364 hoặc 365 ngày; bình quân chênh lệch với năm dương lịch là 10 ngày 21 tiếng, để sửa đổi sai số này người ta quy định cứ 3 năm có một năm nhuận, 5 năm lại tái nhuận, 19 năm 7 nhuận để kết hợp được cả năm và tháng. Năm nhuận của âm lịch có 13 tháng, cả năm là 384 ngày. Chính sự sắp xếp như vậy mới tạo ra sự chênh lệch các ngày của mỗi tháng không quá lớn. Vì thế tháng nhuận của âm lịch thực chất là năm nhuận của năm âm lịch, nó được đặt ra để phù hợp với dương lịch.

Do việc ghi năm âm lịch về cơ bản không được cố định như dương lịch hơn nữa cách tính toán rất phức tạp, số ngày chênh lệch giữa năm thường và năm nhuận khá lớn nên dùng dương lịch sẽ phổ biến và thuận tiện hơn nhiều so với âm lịch.

# Khi cửa hàng nhập hàng để đảm bảo chất lượng của sản phẩm có phải kiểm tra tất cả các loại hàng hoá hay không?

Khi chúng ta đi mua hàng đều mong muốn mua được hàng hoá có chất lượng tốt, chẳng hạn chúng ta đều phải xem các loại giấy tờ chứng minh chất lượng sản phẩm, hạn sử dụng cửa sản phẩm, ngày sản xuất... Thực chất khi cửa hàng nhập hàng về cũng rất chú trọng tới chất lượng của hàng hoá. để duy trì uy tín của bản thân cửa hàng họ nhất định cũng rất nghiêm khắc trong khâu chất lượng này. Vậy khi cửa hàng một lúc phải nhập một số lượng lớn hàng hoá thì có phải kiểm tra từng sản phẩm một hay không? Họ làm thế nào để làm tốt việc kiểm tra chất lượng này?

Nói chung, nhà sản xuất sản phẩm cũng muốn đảm bảo uy tín cho bản thân nên tất cả các sản phẩm đều có dán tem sản phẩm đảm bảo chất lượng xuất xưởng, có giấy chứng minh chất lượng và các giấy tờ bảo hành, chế độ hậu mãi. Nhân viên đi nhập hàng không những phải xem xét cẩn thận các giấy tờ này mà còn phải kiểm tra trực tiếp các sản phẩm nhập về.

Lấy ví dụ một cửa hàng nhập một lô hàng bóng đèn điện từ một nhà sản xuất, sách hướng dẫn sử dụng. sản phẩm của nhà sản xuất đảm bảo lô bóng đèn này có tuổi thọ sử dụng trung bình ít nhất là 2000 giờ đồng hồ, sai số tiêu chuẩn là 200 giờ đồng hồ. Cửa hàng khi kiểm tra hàng sẽ lấy ra bất kỳ 10 chiếc bóng đèn để kiểm tra xem chất lượng của lô bóng đèn này có đúng như nhà sản xuất nói hay không.

Giả sử tuổi thọ kiểm tra của 10 chiếc bóng đèn này là như sau : 2250, 1580, 1790, 3020, 1850, 2360, 1430, 2050, 1960, 1690 (giờ đồng hồ)

Lấy giá trị trung bình của 10 số nói trên, ta được là 1998 giờ đồng hồ. Vậy là ít hơn 2000 giờ đồng hồ, nhưng nằm trong phạm vi sai số tiêu chuẩn 200 giờ đồng hồ, điều này phải chăng cho thấy chất lượng của lô sản phẩm này không được như nhà sản xuất đảm bảo, vì thế cửa hàng không nên nhập lô hàng này về?

Thực ra cửa hàng nên nhập lô hàng này. Phía nhà sản xuất đảm bảo 2000 giờ đồng hồ là giá trị trung bình cho tuổi thọ sử dụng của tất cả số bóng đèn, còn cửa hàng chỉ lấy ra 10 chiếc để kiểm tra, kết quả kiểm tra này mang tính ngẫu nhiên nên không thể hoàn toàn thể hiện được tổng thể chất lượng của tất cả lô hàng bóng đèn. Do sai số tiêu chuẩn là 200 giờ đồng hồ mà sự chênh lệch giữa 1998 và 2000 là trong phạm vi 200 giờ đồng hồ cho nên cửa hàng có thể nhập lô hàng này.

Trong toán học dùng phương pháp thống kê để kiểm tra chất lượng của một lượng lớn sản phẩm. tức là chỉ khảo sát kết quả kiểm tra của một số sản phẩm, ví dụ như kiểm tra 10 chiếc bóng đèn trong ví dụ vừa này, từ đó để khảo sát chất lượng hay độ đảm bảo của toàn bộ lô hàng. Cửa hàng cũng có thể lấy thêm 10 chiếc bóng khác; làm lại việc kiểm tra với 10 chiếc bóng này để có được kết quả trung bình. Nếu kết quả kiểm tra nhiều lần đều nằm trong phạm vi sai số tiêu chuẩn thì có thể cho rằng lô hàng này là đảm bảo chất lượng.

Nếu nhà sản xuất sản phẩm có chất lượng thực sự, thì tuyệt đại đa số các bóng đèn đều phải có tuổi thọ xấp xỉ với tuổi thọ trung bình, những chiếc có tuổi thọ sử dụng chênh lệch quá lớn với tuổi thọ trung bình chỉ chiếm rất ít. Đường gập khúc thống kê thể hiện ở dạng ở giữa cao, hai bên thấp thì bất kỳ lấy như thế nào thì tuổi thọ sử dụng bình quân của 10 chiếc bóng đèn đều phải xấp xỉ 2000 giờ đồng hồ.

Ngược lại, nếu nhà sản xuất tạo ra sản phẩm giả mạo thì tỷ lệ đạt yêu cầu khi kiểm tra không thể cao như nhà sản xuất đã nêu ra. Nếu nhiều lần kiểm tra đều thấy tuổi thọ trung bình của bóng đèn đều chênh lệch quá 200 giờ đồng hồ so với 2000 giờ đồng hồ thì nên từ chối nhập lô hàng.

# **Găng tay sạch đảm bảo cho bác sỹ và bệnh nhân không truyền bệnh lẫn nhau nên có mấy chiếc?**

Trong một bệnh viện ở một nơi xa xôi có 3 vị bác sỹ : Kings, Smith và Robertson. Khi tù trưởng của bộ lạc bị nghi là mắc phải một căn bệnh rất dễ truyền nhiễm, ông ta yêu cầu ba vị bác sỹ mỗi người phải kiểm tra cho ông ta một lần.

Khi kiểm tra bệnh nhân, các bác sỹ nhất thiết phải đeo găng tay cao su. Nếu bác sỹ bị nhiễm căn bệnh kỳ quái này thì vi khuẩn sẽ truyền nhiễm vào bên trong của găng tay mà ông ta đeo; nếu tù trưởng mắc phải căn bệnh này thì sẽ truyền nhiễm vào bên ngoài găng tay mà bác sỹ kiểm tra cho ông ta đã đeo. Trước khi kiểm tra, cô y tá Kerina nói với họ rằng chỉ còn có 2 đôi găng tay đã được khử trùng, một đôi màu xanh lam, một đôi màu trắng. Vậy ba vị bác sỹ phải đeo găng tay như thế nào để họ hoặc tù trưởng đều không có khả năng bị nhiễm bệnh?

Trong lúc các vị bác sỹ đang không biết làm thế nào thì cô y tá Kerina đã chỉ cho họ thấy một biện pháp hay.

Ông Smith sẽ kiểm tra cho tù trưởng trước, ông ta đeo cả hai đôi găng tay, trước tiên đeo đôi màu trắng, sau đó đeo đôi màu xanh lam; đôi màu trắng (bên trong) có khả năng bị nhiễm khuẩn bởi ông bác sỹ còn đôi màu xanh (bên ngoài) có khả năng bị nhiễm khuẩn bởi ông tù trưởng. Tiếp đó, bác sỹ Kings đeo đôi màu xanh, tức là tay của ông ta tiếp xúc với mặt không bị nhiễm khuẩn (mặt bên trong găng tay màu xanh). Còn vị bác sỹ Robertson làm việc, ông ta dùng máy lật mặt trong của găng tay màu trắng ra sau đó đeo đôi găng tay này vào, vì thế tay ông ta tiếp xúc với bên ngoài của đôi găng tay màu trắng, sau đó lại đeo thêm đôi găng tay màu xanh ra ngoài đôi găng tay màu trắng nhưng găng tay màu xanh không lật ngược lại nên phần bên ngoài của đôi găng tay màu xanh vẫn ở bên ngoài.

Trong cả ba tình huống ba vị bác sỹ khám bệnh, phần tiếp xúc với ông tù trưởng vẫn chỉ là phần ngoài đôi găng tay màu xanh, trừ phi bản thân ông ta có bệnh còn nếu không ông ta không thể bị truyền nhiễm bệnh tật bởi các bác sỹ, các bác sỹ cũng không thể bị nhiễm bệnh bởi ông tù trưởng.

Sau này, mọi người đưa vấn đề này rộng ra, nếu có mấy người bác sỹ kiểm tra bệnh cho bệnh nhân tên K, để đảm bảo giữa họ và bệnh nhân không bị bất kỳ sự nhiễm khuẩn nào thì ít nhất phải dùng mấy đôi găng tay? Những nghiên cứu về vấn đề này rất có giá trị.

Vấn đề găng tay sạch được nhà toán học nổi tiếng Martin Jadera đưa ra đầu tiên, sau khi ông đưa vấn đề này ra lập tức có rất nhiều phản ứng. Mọi người đưa ra các biện pháp khác nhau, nhiều cuộc tranh luận cũng đã nổ ra, và cho đến ngày nay, vấn đề này nói chung vẫn chưa có được cách giải quyết mỹ mãn.

## Ý nghĩa của việc gieo đồng tiền xu

Bạn đã từng chơi trò gieo đồng tiền xu bao giờ chưa? Khi có một vấn đề gì không biết giải quyết như thế nào, người ta thường tung đồng tiền xu để dựa vào quyết định của ông trời. Nếu bạn tỷ mỉ ghi lại kết quả mỗi lần tung đồng tiền xu, sau rất nhiều lần, bạn sẽ thấy số lần đồng tiền xu xuất hiện mặt phải lên trên và mặt trái lên trên đều gần như nhau, tại sao lại như vậy?

Chúng ta gọi một lần tung đồng xu là một lần thí nghiệm, trước khi tung gieo đồng xu, chúng ta không biết kết quả sẽ như thế nào, nhưng chúng ta có thể dùng toán học để giả thiết tất cả các kết quả có thể xuất hiện, sau đó tổng kết kết quả xem xem có tính quy luật hay không.

Giả sử “dương” thể hiện mặt phải đồng xu hướng lên trên, “âm” thể hiện mặt trái đồng xu hướng lên trên. P (dương) thể hiện khả năng mặt phải đồng xu hướng lên trên (toán học gọi là xác suất), P (âm) thể hiện khả năng mặt trái đồng xu hướng lên trên.

Khi làm một lần, thí nghiệm :  $P(\text{dương}) = P(\text{âm}) = 0,5$  bởi vì một lần tung đồng xu chỉ có hai khả năng, mặt phải hướng lên trên hoặc mặt trái hướng lên trên, mỗi cái chiếm  $1/2$ .

Làm thí nghiệm 2 lần, có thể xuất hiện 4 khả năng, lần lượt là (dương, dương), (dương, âm), (âm, dương), (âm, âm). Vậy thì  $P(\text{dương} = 2 \text{ lần}) = 0,25$  cho thấy khả năng mặt phải xuất hiện hai lần là  $1/4 = 0,25$ , tổng cộng có 4 kiểu tổ hợp.  $P(\text{dương} - 1 \text{ lần}) = 0,5$  khả năng mặt phải chỉ xuất hiện một lần là  $2/4 = 0,5$ .  $P(\text{dương} = 0 \text{ lần}) = 0,25$  tức (âm, âm) ở trường hợp này, mặt phải không xuất hiện lần nào.

Từ các số liệu trên cho thấy việc tung đồng xu 2 lần thì khả năng lớn nhất mà mỗi mặt đồng xu xuất hiện 1 lần là 0,5 còn những tình huống khác chỉ có 0,25. Tương tự như vậy, nếu làm thí nghiệm 10.000 lần, khả năng mặt phải xuất hiện 4800 lần đến 5200 lần là 99,54%, cũng tức là gần xấp xỉ 100% rồi, mặt phải xuất hiện khoảng 5000 lần, như vậy cơ hội mặt trái xuất hiện cũng gần như vậy.

Khi thí nghiệm đến 10.000 lần, chúng ta có thể có được quy luật tổng kết là, sau nhiều lần tung đồng xu, số lần xuất hiện mặt phải và mặt trái về cơ bản là như nhau.

Những bạn nhỏ thích bóng đá đều biết rằng trước khi thi đấu trọng tài có đồng xu để quyết định xem đội bóng nào chọn sân bên nào và giao bóng trước, vậy với một đội bóng tham dự nhiều lần thi đấu thì số lần chọn mặt trước và mặt sau đồng tiền xu cũng gần như nhau, do đó cách tung đồng xu sẽ rất công bằng sau nhiều lần sử dụng.



## **Đông Đông đi từ nhà đến trường, đi xe buýt số 1 hoặc số 4, nhưng tại sao Đông Đông luôn luôn cảm thấy lúc đi xe số 1 nhiều hơn nhỉ?**

Hằng ngày Đông Đông đi từ nhà đến trường có hai con đường xe buýt từ cổng nhà đến trước cổng trường học là số 1 hoặc số 4. Số xe buýt của hai con đường này là như nhau, đoạn đường từ nhà Đông Đông đến trường học cũng bằng nhau, hơn nữa đều cứ cách 15 phút là có một chuyến xe. Đông Đông hầu như ngày nào cũng đi xe buýt đi học, thời gian lên cũng không cố định, nhìn thấy xe buýt nào đến thì nhảy lên xe đó. Đáng lý ra cơ hội cậu bé đi hai xe buýt là như nhau tức là muốn nói số lần đi hai loại xe buýt này cũng gần gần như nhau nếu không nói là hoàn toàn như nhau.

Nhưng trong thực tế thì không phải như vậy, Đông Đông luôn cảm thấy lúc đi xe buýt số 1 nhiều hơn. Sau này, Đông Đông mới ghi lại số lần đi xe buýt, sau một tháng ghi chép phát hiện ra rằng số lần đi xe buýt số 1 chiếm tới 80%, số lần đi xe buýt số 4 chỉ chiếm 20% tổng số. Điều này thật là kỳ lạ, tình hình vận chuyển của hai tuyến xe buýt đều như nhau, làm sao lại xuất hiện điều này được

Đông Đông không biết lý giải thế nào nên đi hỏi thầy giáo. Thì ra cứ mỗi chiếc xe buýt số 4 đi qua thì cách 12 phút sau mới có 1 chiếc xe buýt tuyến số 1 đến, mà cứ mỗi chiếc xe buýt số 1 đi qua thì cách 3 phút sau lại có 1 chiếc xe buýt tuyến số 4. Bây giờ thầy giáo chia số thời gian Đông Đông đợi xe thành rất nhiều đoạn 15 phút, thế thì nếu Đông Đông trong bất kỳ phút nào trong vòng 12 phút đầu Đông Đông đến bến xe thì nhất định sẽ đi tuyến xe số 1; chỉ có trong vòng 3 phút sau nếu cậu ta đến bến xe mới đi xe số 4. Như vậy, cơ hội trong 12 phút đầu đến bến xe chính là  $12/15 = 80\%$  còn cơ hội đến bến xe trong 3 phút sau chỉ có  $3/15 = 20\%$ . Đây chính là nguyên nhân vì sao số lần cậu đi xe buýt tuyến số 1 lại nhiều gấp 4 lần số lần cậu đi xe buýt tuyến số 4.

Sau khi được thầy giáo giảng giải, Đông Đông mới vỡ lẽ ra, không phải nguyên nhân nào khác mà chính là vì sự khác biệt giữa thời gian khoảng cách đợi xe giữa tuyến số 4 - số 1 - số 4. Đông Đông lại nghĩ tiếp, nếu khoảng cách đợi xe giữa tuyến số 1 - số 4 - số 1 lần lượt là 12 phút, 3 phút thì cậu sẽ có 80% cơ hội đi xe buýt số 4 mà không phải tuyến xe số 1. Vậy nếu thời gian cách nhau giữa hai tuyến là như nhau tức mỗi cái chiếm 50% thì chẳng phải sẽ không cảm thấy số lần của xe tuyến nào nhiều hơn sao?

Đông Đông rất thích quan sát sự vật, rất ham hiểu biết và phát hiện vấn đề. Sự việc mà cậu thắc mắc lần này trong toán học gọi là xác suất. Xác suất là một chi ngành trong toán học chuyên nghiên cứu tần suất xảy ra các sự kiện một cách ngẫu nhiên, là một ngành khoa học vô cùng thú vị.



# Có bao nhiêu cách kết hợp các đồng 1 xu, 2 xu, và 5 xu thành 1 hào?

Vấn đề này xem chừng không khó, chúng ta có thể thử dùng các đồng 1 xu, 2 xu và 5 xu kết hợp lại xem nhé :

- (1) Tất cả đều dùng đồng 1 xu : cứ 10 đồng 1 xu kết hợp được thành 1 hào, đây là 1 cách;
- (2) Dùng đồng 1 xu và đồng 2 xu : có thể dùng 1 đồng, 2 đồng, 3 đồng, 4 đồng và 5 đồng 2 xu, vì thế tổng cộng có 5 cách;
- (3) Dùng 1 đồng 5 xu, còn lại 5 xu dùng 1 xu, 2 xu : có thể dùng 5 đồng 1 xu; 1 đồng 2 xu, 3 đồng 1 xu; 2 đồng 2 xu, 1 đồng 1 xu, tổng cộng có 3 cách;
- (4) Tất cả đều dùng đồng 5 xu : 2 đồng 5 xu là sẽ thành 1 hào, như vậy là có 1 cách.

Vì thế khi dùng các đồng 1 xu, 2 xu, 5 xu để kết hợp thành 1 hào tổng cộng sẽ có  $1 + 5 + 3 + 1 = 10$  cách. Nếu bạn muốn dùng đồng 1 xu, 2 xu, 5 xu, 1 hào, 2 hào, 5 hào kết hợp thành 1 đồng thì sẽ có bao nhiêu cách? Nếu như cứ tính toán như lúc trước thì không dễ dàng chút nào, vậy có cách tính nào đơn giản hơn không nhỉ?

Chắc chắn là có, nhà toán học Thụy Sĩ Euler đã đưa ra một phương pháp phổ biến, gọi là “toán pháp mẫu hàm”.

Cách làm này như sau: lấy việc kết hợp thành 1 hào làm ví dụ:

Dùng 1 xu kết hợp thành 1 hào, nhiều nhất phải dùng 10 xu ta có công thức liệt kê là  $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10})$ .

Dùng 2 xu kết hợp thành 1 hào, nhiều nhất phải dùng 5 đồng xu, ta có  $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$ .

Dùng đồng 5 xu kết hợp thành 1 hào, nhiều nhất phải

dùng 2 đồng, ta có  $(1 + x^5 + x^{10})$ .

Lấy ba phép tính trên nhân với nhau, ta có kết quả là giá trị hệ số  $x^{10}$ . Bạn hãy thử tính xem, hệ số của  $x^{10}$  chính là 10, vì thế có 10 cách.

Vậy thì với cách kết hợp các đồng xu thành đồng 1 đồng thì có bao nhiêu cách? Chúng ta dùng công thức liệt kê “toán pháp mẫu hàm” :

$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})$  công thức liệt kê của 1 xu

$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100})$  công thức liệt kê của 2 xu

$(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{100})$  công thức liệt kê của 5 xu

$(1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{100})$  1 hào = 10 xu

$(1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{100})$  2 hào = 20 xu

$(1 + x^{50} + x^{100})$  5 hào = 50 xu

Nhân triển khai dạng thức ta được hệ số của  $x^{100}$  (100 xu tương đương với 1 đồng), chính là đáp án của câu đố.

Có thể bạn cho rằng giải như vậy cũng rất là phiền phức. Đúng là như vậy, tính bằng tay để tính ra hệ số của  $x^{100}$  cũng rất khó khăn, nhưng Euler đã đưa ra được cho chúng ta một công thức chung, không cần mọi người phải tính toán máy móc nữa. Hơn nữa từ khi có công cụ máy tính thì những công thức tính toán phức tạp đến thế nào cũng đều trở nên dễ dàng rồi.

## Làm sao để 1000 chiếc đĩa vào trong 10 chiếc hộp?

Có một người muốn để 1000 chiếc đĩa vào trong 10 chiếc hộp. Anh ta chia những chiếc đĩa vào trong hộp rất giỏi, bất kể bạn muốn mượn bao nhiêu chiếc (đương nhiên không thể vượt quá 1000 chiếc), anh ta luôn luôn chỉ cần lấy vài chiếc hộp đưa cho bạn là được chứ không bao giờ cần phải mở hộp ra để đếm, mà số đĩa trong những chiếc hộp đó vừa khít với số lượng mà bạn muốn mượn. Bạn có biết anh ta sắp xếp những chiếc đĩa vào trong hộp như thế nào không?

Anh chàng này rất thông minh, anh ta đánh dấu 10 chiếc hộp lần lượt từ số (1) đến số (10), sau đó trong 10 chiếc hộp này lần lượt theo thứ tự để vào 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 489 chiếc đĩa, như vậy 1000 chiếc đĩa vừa đủ đặt vào 10 chiếc hộp. Bởi vì  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 489 = 1000$ .

Nếu bạn muốn mượn 1 chiếc, anh ta chỉ cần lấy hộp số 1 là được. Nếu bạn muốn mượn số lượng đĩa ít hơn 4 chiếc, anh ta sẽ chọn lấy giữa hộp số 1 và hộp số 2, ví dụ bạn mượn 2 chiếc, anh ta lấy cho bạn hộp số 2, mượn 3 chiếc, anh ta lấy ra hộp số 1 và số 2. Nếu bạn mượn số lượng ít hơn 8 chiếc, anh ta chỉ cần tính toán giữa hộp số 1 đến hộp số 3 rồi lấy ra được đúng số đĩa bạn cần mượn. Ví dụ bạn mượn 6 chiếc đĩa, anh ta lấy cho bạn hộp số 2 và 3, vì  $2 + 4 = 6$ ; bạn mượn 7 chiếc đĩa, anh ta lấy hộp số 1, số 2, số 3, vì  $1 + 2 + 4 = 7$ . Cứ suy lần lượt như vậy, nếu bạn cần số lượng đĩa ít hơn con số 512 chiếc, chỉ cần tính toán giữa các hộp số 1 đến số 9 là được, không tin bạn cứ thử tính mà xem.

Điều này quả là kỳ diệu. Tại sao dãy số liệt kê này lại có tính chất tuyệt vời như vậy nhỉ? Bởi vì mỗi một số tự nhiên đều có thể dùng các số trong dãy 1, 2, 4, 8, 16, 32... để biểu thị. Ví dụ :  $1 = 1$ ,  $2 = 2$ ,  $3 = 1 + 2$ ,  $4 = 4$ ,  $5 = 1 + 4$ ,  $6 = 2 + 4$ ,  $7 = 1 + 2 + 4$ ,  $8 = 8$ ,  $9 = 1 + 8$ ,  $10 = 2 + 8$ ,  $11 = 1 + 2 + 8$ ,... hơn nữa, chắc bạn cũng thấy rằng, dãy số này có tính quy luật đó là cứ hai số liền kề nhau thì số sau gấp hai lần số trước, chẳng hạn như 8 và 16, 64 và 128, 128 và 256.

Bạn cũng có lẽ sẽ thắc mắc : trong hộp số 10 có 489 chiếc đĩa, vậy là không phải gấp đôi của 256 trong hộp thứ 9? Bởi vì trong đề bài chỉ đề cập tới 1000 chiếc đĩa, cho nên trong hộp số 10 chỉ có thể là 489 chiếc mà không phải là 512 chiếc. Nếu theo như quy luật sắp xếp của tổ hợp số này thì hộp số 10 nên là 512 chiếc, nhưng nếu vậy thì tổng số lại là 1032 chiếc đĩa rồi.

Do số lượng yêu cầu là 1000 chiếc đĩa, chứ không phải là 1032 chiếc, nên đáp án chính xác của đề bài này không chỉ có một, nếu trong hộp số 9 bạn để vào 245 chiếc thì hộp số 10 sẽ đựng 500 chiếc, còn những hộp khác không thay đổi, đây cũng là một đáp án chính xác. Nếu tổng số lượng đĩa là 1032 chiếc thì chỉ có một đáp án duy nhất mà thôi.

## Với một chiếc dây thừng có thể tính được đường kính của cây không?

Tỷ lệ chu vi  $p$  (Pi) được nhà toán học người Trung Quốc Tổ Xung Chi tính ra đầu tiên, sớm hơn người phương Tây khoảng 1000 năm. Có được khái niệm tỷ lệ chu vi, chúng ta biết được nó là tỷ lệ so sánh giữa độ dài đường tròn với đường kính, vì vậy có thể dùng số Pi để tính ra giá trị của độ dài chu vi hoặc bán kính. Nhưng vào thời cổ đại khi số Pi chưa ra đời thì người ta làm thế nào để đo đường kính của cây, của ao hồ đây?

Thực ra, ngay từ xa xưa người dân lao động đã biết được nguyên lý “đường kính một chu vi ba”. Câu này có nghĩa là độ dài của chu vi bằng khoảng 3 lần độ dài của đường kính. Nếu độ dài của đường kính là 1 thì chu vi của đường tròn sẽ là 3.

Khi đó do nhu cầu sản xuất nhiều lúc phải đo đường kính của những vật thể hình trụ tròn như cây cối, ao hồ..., có lúc không thể trực tiếp dùng thước đo được. Bởi vì đo đường kính của cây thì phải xuyên qua tâm của thân cây; mà muốn đo đường kính của một cái ao thì về cơ bản là không có chiếc thước nào dài như vậy. Về sau người ta nghĩ tới cách dùng dây thừng để đo, sau đó dùng thước để đo từng đoạn một của dây thừng để có được kết quả.

Tổ tiên của chúng ta đã dùng một biện pháp vô cùng đơn giản mà đầy tính khả thi, họ dùng một chiếc dây thừng vòng 1 vòng quanh vật thể, từ đó lập tức tính được đường kính của cây. Bởi vì độ dài mà dây thừng vòng một vòng quanh cây chính là độ dài của chu vi đường tròn; lấy độ dài chia cho 3, tính theo công thức “đường kính một chu vi ba” chính là độ dài của đường kính. Cách làm của người cổ đại xa xưa quả thực là rất thông minh.

Ngày nay, chúng ta còn có nhiều cách hơn nữa để có thể trực tiếp hoặc gián tiếp đo được đường kính của vật tròn. Ví dụ như trong công xưởng dùng các dụng cụ đo như thước kẹp, thước đo góc để đo được đường kính của vật thể tròn; đường kính của trái đất cũng có thể dùng cách chụp ảnh không gian để đo được. Cho nên con người càng ngày càng có nhiều cách để đo được đường kính vật thể tròn, hơn nữa kết quả đo được cũng ngày càng chính xác.

## Nhà thám hiểm đi theo hình vuông, tại sao lại biến thành hình tam giác?

Một nhà thám hiểm nói rằng có một lần ông ta đi về phía nam 2000m, lại đi về phía đông 2000m, rồi đi về phía bắc 2000m, kết quả là ông ta lại trở về đúng chỗ cũ. Lúc đầu, mọi người đều không tin, cho rằng ông ta nhất định là phải đến phía đông của nơi xuất phát hơn nữa phải cách điểm xuất phát 2000m. Nhưng khi nhà thám hiểm giải thích, mọi người mới biết điều ông ta nói là đúng sự thực. Bạn có biết nguyên do vì sao không?

Nếu chúng ta vẽ đường đi của nhà thám hiểm lên trên một tờ giấy, chúng ta sẽ có được một hình dạng, nếu nối điểm xuất phát với điểm đến thì sẽ có được một hình vuông. Nhưng do bề mặt trái đất không giống như bề mặt một tờ giấy mặt trái đất không phải là một mặt phẳng mà nhìn nó gần như là mặt cầu, ở trên mặt cầu vẽ ra là hình bốn cạnh chứ không phải là hình vuông.

Vậy nếu như bề mặt trái đất không phải là mặt phẳng tuyệt đối thì tại sao nhà thám hiểm lại quay trở về vị trí xuất phát ban đầu? Thì ra, nhà thám hiểm này xuất phát từ bắc cực, vì thế đường đi của ông ta từ hình bốn cạnh co lại thành hình tam giác, kết quả là ông ta là trở về vị trí ban đầu.

Chuyến đi thám hiểm bắc cực của nhà thám hiểm này đã giúp chúng ta hiểu ra được rất nhiều điều. Do hình dạng trên mặt phẳng và hình dạng trên mặt cầu có tính chất khác nhau như vậy, hơn nữa trái đất lại rất lớn, vì thế chỉ khi đề cập tới phạm vi bề mặt trái đất không lớn lắm thì nó mới có thể gần như là mặt phẳng, lúc này cho dù có sai số thì cũng không lớn lắm, không ảnh hưởng tới đáp án chính xác, chúng ta bình thường vẫn làm như vậy.

Nhưng trong một số tình huống đặc biệt, chúng ta không thể bỏ qua việc bề mặt trái đất là vật thể hình cầu chứ không phải là mặt phẳng. Chẳng hạn như đường đi của đường không, đường biển không thể là đường thẳng, nếu tính theo các điều kiện của mặt phẳng thì chắc chắn sẽ có kết quả sai.

## **Bạn có thể ngay lập tức biết được trong số 10 thùng bi thép thùng nào là thứ phẩm không?**

Có một cửa hàng nhập về 10 thùng bi thép, căn cứ theo sách hướng dẫn sử dụng, mỗi viên bi thép có trọng lượng là 10g. Nhưng sau đó mới biết trong số 10 thùng bi thép này bị lẫn một thùng không đảm bảo chất lượng hơn nữa mỗi viên bi đều là hàng thứ phẩm. Bên ngoài của những viên bi thép thứ phẩm không có gì khác biệt với hàng chính phẩm, điều duy nhất khác biệt là mỗi một viên bi thép thứ phẩm bị thiếu mất 1g. Vậy các bạn làm cách nào để nhanh chóng tìm ra được thùng hàng bi thép thứ phẩm?

Bạn có thể cho rằng, điều này chẳng có gì là khó cả, chỉ cần đem cân từng thùng bi thép lên thì chẳng phải tìm ra ngay thùng nào có chất lượng kém hay sao? Quả đúng như vậy, nhưng đây chỉ là một lối suy nghĩ thông thường, nếu kiểm tra từng thùng một rất có thể phải cần 10 lần mới tìm ra được kết quả. Vậy có cách nào đơn giản hơn và tốt nhất là chỉ cần cân một lần mà có thể tìm ra thùng bi thép cần tìm không?

Chúng ta có một cách làm hiệu quả như vậy.

Trước tiên lấy một viên bi thép từ thùng số 1, lấy 2 viên bi ở thùng số 2,... từ thùng số 10 lấy ra 10 viên bi. Sau đó cân tất cả số bi này lên.

Số bi này có số lượng là bao nhiêu nhỉ? Chúng ta hãy cùng tính nhé :  $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$  viên bi.

Nếu tất cả đều là hàng chính phẩm thì chúng sẽ có khối lượng là  $55 \times 10g = 550g$ , nhưng do trong đó có lẫn hàng kém chất lượng nên đương nhiên tổng khối lượng sẽ nhỏ hơn 550g.

Nếu tổng khối lượng là 549g, nhẹ hơn là so với 550g, điều này cho thấy trong đó có lẫn một viên bi thứ phẩm. Tiếp đó có thể suy ra thùng số 1 là thùng hàng thứ phẩm.

Nếu tổng khối lượng là 548g, nhẹ hơn 2g so với 550g, điều này cho thấy trong đó có lẫn 2 viên bi thứ phẩm, nên có thể suy ra thùng thứ 2 là thùng thứ phẩm.

Nếu tổng khối lượng là 540g, nhẹ hơn 10g so với 550g, điều này cho thấy trong đó có lẫn 10 viên bi thứ phẩm, nên có thể suy ra thùng thứ 10 là thùng thứ phẩm.

Biện pháp này quả là tuyệt vời, chỉ cần cân đúng 1 lần là đã biết được thùng bi nào là thùng thứ phẩm. Chúng ta lại giả thiết nếu trong 10 thùng bi thép có lẫn vài thùng hàng thứ phẩm thì liệu có thể dùng 1 lần cân để biết được thùng bi nào là những thùng bi thứ phẩm không?

Cũng có thể dùng 1 lần cân để tìm ra những thùng bi thứ phẩm. Lúc này khi lấy viên bi ra, ở thùng số 1 chúng ta lấy 1 viên, thùng số 2 lấy 2 viên, thùng số 3 lấy 4 viên, thùng số 4 lấy 8 viên,... thùng số 10 lấy 29 viên, tổng cộng tức là 1023 viên. Sau đó lại đưa tất cả lên cân, còn phần phân tích và suy diễn tiếp sau như thế nào thì xin mời bạn động não một chút nhé, rất đơn giản thôi mà!

## Một chồng ống thép xếp thành hình tam giác, tại sao chỉ cần đếm số lượng hàng cuối cùng là có thể tính ra được tổng số lượng?

Trong công xưởng hoặc trong kho hàng, các loại vật liệu như ống thép hoặc các cây gỗ đều được xếp rất gọn gàng tạo thành một hình tam giác rất là cao. Nhiều ống thép như vậy thì làm sao được tổng số lượng? Có phải là đếm từng chiếc ống một hay không? Không phải vậy, các công nhân thường chỉ cần đếm hàng ống thép sát cuối cùng là ngay lập tức tính ra được chồng ống thép đó có bao nhiêu chiếc? Bạn có muốn biết những người công nhân đã tính như thế nào không?

Giả sử hàng ống thép cuối cùng có 20 chiếc, vậy thì hàng số 2 có 19 chiếc, hàng số 3 là 18 chiếc... hàng ở đỉnh trên cùng (tầng số 20) chỉ có 1 chiếc. Vì thế, không cần thiết phải đếm từng chiếc một, chỉ cần cộng số lượng ở hàng cuối cùng với số lượng ở đỉnh trên cùng nhân với số lượng hàng ống thép rồi chia cho 2 là ta có được kết quả tổng số ống thép, tức là :  $[(20 + 1) \times 20] / 2 = (21 \times 20) / 2 = 210$  ống thép.

Nếu hàng cuối cùng là 50 ống thép (tổng cộng có 50 hàng) thì tổng số ống thép sẽ là :  $[(50 + 1) \times 50] / 2 = 1275$  ống thép.

Vậy tại sao lại chỉ cần tính đơn giản như vậy là đúng nhỉ?

Thực ra nguyên lý trong đó rất đơn giản, chúng ta cộng số lượng ống thép ở từng hàng lại với nhau để kiểm tra xem nhé. Hàng thứ nhất (hàng sát mặt đất) là 20 chiếc, hàng thứ 20 chỉ có 1 chiếc, hai hàng này tổng cộng có 21 chiếc ống, hàng thứ 2 có 19 chiếc, hàng thứ 19 có 2 chiếc, hai hàng này cộng lại cũng là 21 chiếc; chúng ta cứ cộng số lượng ống thép ở các hàng đối ứng như vậy, cộng đến hàng thứ 11 có 10 chiếc ống với hàng thứ 10 có 11 chiếc cũng vẫn là 21 chiếc, tổng cộng có 10 hàng có 21 chiếc như vậy, cũng có nghĩa là :

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 18 + 19 + 20 \\ &= (1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + \dots + (10 + 11) \\ &= 21 \times 10 = 210 \end{aligned}$$

Vẫn là 210 chiếc ống, như vậy thông qua kiểm chứng chúng ta thấy là hai cách này ra được kết quả chính xác như nhau.

Nếu như số lượng ống thép ở hàng dưới cùng là số lẻ? Ví dụ như 19 ống thép thì công thức nói trên có chính xác nữa không? Chúng ta theo công thức :

$$\text{Tổng số ống thép} = [(19 + 1) \times 19] / 2 = 190 \text{ ống thép.}$$

Như vậy vẫn áp dụng được theo công thức nói trên, bạn cứ thử mà xem, đảm bảo không có vấn đề gì cả.

Có thể bạn lại nghĩ rằng, nếu hàng trên cùng của chồng ống thép này không phải là một chiếc mà là vài chiếc thì tính toán như thế nào? Ví dụ, hàng trên cùng có 7 ống thép mà hàng cuối cùng vẫn có 20 ống thép, mỗi hàng vẫn lần lượt giảm đi một ống thép, vậy thì tổng cộng chồng thép này có bao nhiêu ống?

Trong tình huống này chúng ta vẫn tính theo công thức nói trên, nhưng phải trừ đi phần không được xếp lên, chúng ta hãy cùng tính nhé :

$$[(20 + 1) \times 20] / 2 - [(6 + 1) \times 6] / 2 = 210 - 21 = 189 \text{ ống thép}$$

# Bạn có biết nguyên lý toán học của câu nói “tam nhân đồng hành, tất hữu ngã sư”?

Câu nói “tam nhân đồng hành, tất hữu ngã sư” là câu nói trích từ sách “Luận ngữ” của triết gia Khổng Tử người Trung Quốc. Ý của câu này là khi bản thân mình đi cùng với bất kỳ hai người nào thì trong hai người đó nhất định có một người có thể làm thầy của mình. Mặc dù Khổng Tử là một vị học giả lớn nhưng ông vẫn rất khiêm tốn, cho rằng mình còn phải học tập rất nhiều từ người khác. Nhưng bạn có biết không, câu nói này kỳ thực còn ẩn chứa một nguyên lý toán học nữa đấy.

Trước tiên chúng ta cùng phân tích câu nói này. Vậy người như thế nào mới có thể được coi là “thầy” đây? Chúng ta cần phải nói rõ rằng, không phải người có tất cả mọi mặt ưu tú hơn người khác mới có thể làm “thầy”. Nếu như một người có một mặt nào đó xuất sắc hơn người khác thì người đó có thể làm thầy của người khác trong lĩnh vực đó. Vì vậy, hàm ý của từ “thầy” ở đây rất rộng.

Trong trường học, người thầy dạy chúng ta phải phát triển toàn diện đức, trí, thể, nếu như tài năng của một con người được chia ra làm ba phương diện đức, trí, thể thì chúng ta hãy tính xem trong 3 người đồng hành, khả năng trở thành thầy giáo ở ba phương diện này lớn đến mức nào.

Giả sử trong ba người có một người là Khổng Tử, vậy thì trong ba phương diện đức, trí, thể, Khổng Tử có 27 khả năng sắp xếp. Đây là vì trong một phương diện, Khổng Tử đều có thể xếp thứ nhất, thứ hai, thứ ba, tổng cộng ba phương diện đức, trí thể sẽ là  $3 \times 3 \times 3 = 27$  kiểu khả năng :

Đức : 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2.....

Trí : 1 1 1 2 2 2 3 3 3 1 1 1.....

Thể : 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3.....

Trong số 27 kiểu khả năng này, chúng ta thấy khả năng Khổng Tử đứng thứ nhất trên cả ba phương diện chỉ có một, chính là tình huống (1, 1, 1), chiếm 1/27 toàn bộ các tình huống còn trong một phương diện nào đó hoặc vài phương diện không xếp thứ nhất thì có 26 kiểu tình huống, chiếm 26/27, điều này cũng có nghĩa là trong hai người còn lại khả năng có người làm thầy của Khổng Tử là 26/27, tức là khoảng 96,3%.

Về mặt toán học, khả năng hoặc cơ hội xảy ra sự kiện kiểu này được gọi là “xác suất”. “Xác suất” là một phân ngành toán học quan trọng, từ lâu con người đã bắt đầu nghiên cứu về vấn đề này rồi. Sự xuất hiện của xác suất giúp cho con người nhận thức được rằng toán học ngoài khả năng tính toán còn có thể dùng để giải quyết các vấn đề tình huống thuộc về cơ hội xuất hiện trong cuộc sống thực tế, từ đó làm phong phú thêm các lĩnh vực nghiên cứu của toán học.

Trong ví dụ trên đây, chúng ta phân tích tài năng của một con người từ ba mặt trí đức thể, còn trong cuộc sống thực tế tài năng của một con người không chỉ có ít như vậy; người ta có câu “ba trăm sáu mươi ngành nghề, ngành nào cũng có trạng nguyên” để cho thấy khả năng của một con người là phong phú như thế nào. Do đó, câu nói khiêm tốn nói trên của Khổng Tử là hoàn toàn có căn cứ theo phân tích toán học.



# Không di chuyển cây ở bốn góc của ao hồ, làm thế nào để sau khi diện tích của ao hồ hình vuông tăng gấp đôi thì ao hồ vẫn là hình vuông?

Có một chiếc hồ hình vuông, ở bốn góc trên bờ của hồ có 4 cái cây lớn. Bây giờ người ta đào thêm để chiếc hồ rộng hơn nhằm nuôi cá trồng sen, họ muốn tăng gấp đôi diện tích của hồ nhưng lại không muốn di chuyển bốn cái cây lớn đó cũng không thể để cho chúng ngập trong nước, hơn nữa lại muốn chiếc hồ sau khi được mở rộng vẫn là hình vuông, theo bạn thì nên làm như thế nào?

Vấn đề này xem ra khá là khó nhưng chỉ cần chúng ta động não suy nghĩ thì vấn đề sẽ đơn giản hơn nhiều. Chúng ta sẽ vẽ ra một bản nháp để xem cách giải quyết như thế nào.

Trong hình vẽ 4 đỉnh của chiếc hồ hình vuông được biểu thị bằng bốn điểm ABCD, chúng ta nối các điểm của các góc đối của hình vuông ABCD, sau khi nối AC và BD ta có được tâm của hình vuông là : O. Nét đứt trong hình vẽ biểu thị đường phụ trợ mà chúng ta làm. Qua điểm A và điểm C lần lượt vẽ các đường thẳng song song với BD, cũng tương tự vậy, qua điểm B và D lần lượt vẽ các đường thẳng song song với AC, bốn đường thẳng thì cứ hai đường giao nhau tại E, F, G, H. Lúc này EFGH cũng là một hình vuông, đây chính là điều mà chúng ta cần làm, diện tích của hình vuông mới này gấp hai lần hình vuông ABCD, đồng thời 4 cái cây ở bốn đỉnh ABCD cũng vẫn được yên lành, không cần di chuyển mà cũng không bị ngập nước.

Vậy làm thế nào để chứng minh diện tích của hình EFGH lớn gấp đôi diện tích của hình ABCD?

Do hai đường chéo trong hình vuông cùng vuông góc với nhau, tức là AC vuông góc với BD, mà EF và HG song song với BD, vì thế AC cũng vuông góc với EF và GH, điều đó cho thấy  $AE = AF = CG = CH$ , cũng tức là nói A và C là trung điểm của EF và HG. Cũng tương tự như vậy B và D cũng là trung điểm của FG và EH. Trong hình tam giác AOB và hình tam giác AFB, hai hình tam giác cũng là hai hình tam giác vuông, hơn nữa  $AF = OB = FB = DA$ , vậy thì do diện tích của hình tam giác vuông là  $\frac{1}{2}(AO \times BO)$ ,  $\frac{1}{2}(AF \times BF)$ , nên diện tích của hai hình tam giác AOB và AFB bằng nhau. Cũng tương tự như vậy, diện tích của hình vuông ABCD bằng với 4 lần diện tích của hình tam giác AOB, của hình vuông EFGH bằng 8 lần diện tích của hình tam giác AOB, do đó diện tích của hình vuông EFGH bằng hai lần diện tích của hình vuông ABCD.

Vậy là vấn đề đã được giải quyết, không phải di chuyển cây mà còn làm rộng diện tích của cái hồ ra làm đôi.

## Số vô nghĩa được phát hiện như thế nào?

Số thực được chia ra làm hai loại, số có nghĩa và số vô nghĩa. Bạn có lẽ cũng sẽ thấy ngạc nhiên, số tại sao lại có sự phân chia ra loại có nghĩa và vô nghĩa nhỉ? Lại cũng giống như con người nói năng, làm việc có công bằng hay không, hợp lý hay không. Thế thì số vô nghĩa là gì, nó được phát hiện như thế nào, về vấn đề này còn có một câu chuyện rất thú vị!

Trong quá trình nhận thức của con người về số, trước tiên là con người tiếp xúc với số tự nhiên 1, 2, 3..., những số này được dùng để biểu thị các số. Nhưng trong cuộc sống thực tế, có những lúc không thể dùng cách đếm số đã tính lượng. Ví dụ như đo độ dài là không thể đếm được, mà khi đo phải lấy độ dài một đơn vị, so sánh giữa độ dài cần đo và độ dài đơn vị khi đó thì có thể sẽ xảy ra phân số. Chúng ta gọi các số chẵn và phân số là số có nghĩa. Nói chung một số có nghĩa được biểu thị bằng hình thức là  $p/q$  ( $q < 0$ ), đây còn là “linh cảm” xảy ra trong đo lường!

Vào thế kỷ 6 trư công nguyên, ở Hy Lạp có có một nhà toán học nổi tiếng là Pitago, ông thành lập trường phái Pitago có ảnh hưởng rất sâu rộng. Trường phái này tâm niệm rằng: “Vạn vật trong vũ trụ đều là số”, đương nhiên ở đây là nói tới số có nghĩa, tức là đều là những số được biểu thị dưới dạng  $p/q$ .

Một hôm, có người hỏi ông ta: đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng 1 thì có thể biểu thị bằng sự so sánh giữa số chẵn với số chẵn không?

Căn cứ theo định lý Pitago chúng ta đều biết độ dài đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1 là  $\sqrt{2}$ . Giả sử căn của 2 là số có nghĩa, tức là  $\sqrt{2}$  có thể biểu thị theo công thức  $p/q$ , trong đó  $p, q$  hơn kém nhau một đơn vị, vì thế  $p/q = \sqrt{2}$ , bình phương hai bên ta có:

$$p^2 = 2q^2 \dots\dots (1).$$

Bởi vì  $p^2$  bằng hai lần của số nguyên  $q^2$  cho nên có thể thấy  $p^2$  phải là số chẵn, từ đó  $p$  cũng phải là số chẵn (bởi vì bình phương của số chẵn là số chẵn). Thay  $p = 2r$  vào trong công thức (1) ta có:  $4r^2 = 2q^2$  tức là  $2r^2 = q^2$ .

Có thể thấy  $q^2$  cũng là một số chẵn, từ đó suy ra  $q$  cũng là số chẵn. Bởi vì  $p$  và  $q$  đều là số chẵn, điều này mâu thuẫn với giả thiết  $p$  và  $q$  là hai số hơn kém nhau một đơn vị. Vì thế giả thiết  $p/q$  là số có nghĩa không thể thành hiện thực, có nghĩa là  $\sqrt{2}$  là một số vô nghĩa.

Sự xuất hiện của số vô nghĩa tức là số không thể viết được dưới dạng so sánh của số nguyên với số nguyên đã gây kinh ngạc và chấn động cho giới học giả, đây quá là một bước tiến mới trong nhận thức của con người về số.

## Thế nào là số ảo?

Chúng ta đều biết số có nghĩa và số vô nghĩa được gọi chung là số thực, nhưng còn một loại số nữa là số ảo, vậy số ảo là số như thế nào?

Chúng ta hãy cùng xem lại lịch của số ảo. Vào thế kỷ 16, giới toán học châu Âu xảy ra cuộc tranh luận về việc số âm có thể triển khai căn bình phương hay không. Chúng ta đều biết một số dương là có thể chia căn bậc hai, ví dụ  $\sqrt{2}$  là số vô nghĩa căn 2,  $\sqrt{4}$  là số có nghĩa 2, vậy thì có số nào có thể là căn của số âm hay không?

Cùng với sự phát triển của toán học, các nhà toán học phát hiện ra rằng chia căn số thực của một số phương trình 3 lần không thể không dùng chia căn của số âm để biểu thị. Hơn nữa, nếu thừa nhận có căn của số âm thì vấn đề có căn hay không của phương trình đại số cũng được giải quyết, đồng thời còn có được kết quả đầy mỹ mãn là phương trình n lần có n căn. Ngoài ra tính căn của số âm theo nguyên tắc tính toán của số thì vẫn cho ra kết quả chính xác.

Năm 1545, nhà toán học người Italy Kardan lần đầu tiên đưa ra một cách biểu thị chiết trung, ông ta gọi căn bình phương của số âm là “số hư cấu”, có nghĩa là cũng thừa nhận nó là số nhưng nó không giống số thực có thể biểu thị số lượng tồn tại thực tế mà là hư cấu. Tới năm 1632, nhà toán học người Pháp Dirael chính thức đưa ra một cách gọi căn của số âm khiến mọi người đều chấp nhận, đó là cách gọi “số ảo”. Chữ “ảo” trong số ảo biểu thị nó không đại diện cho số lượng thực tế mà chỉ tồn tại trong tưởng tượng. Cho dù số ảo là “ảo” nhưng các nhà toán học vẫn không ngừng nghiên cứu về nó, họ phát hiện ra rất nhiều tính chất và ứng dụng về số ảo. Đặc biệt là vào năm 1777, nhà toán học Euler đưa ra khái niệm “đơn vị số hư”, ông ta gọi  $\sqrt{-1}$  là đơn vị số ảo, dùng ký hiệu  $i$  để biểu thị, tương đương với đơn vị của số thực là 1; Sau khi số ảo có đơn vị thì cũng giống như số thực sẽ có thể viết được theo kiểu bội số đơn vị số ảo, ví dụ như  $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$ .

Từ đó, các nhà toán học đối xử bình đẳng với số ảo như số thực và cùng gọi tên chúng là số phức, vì thế, gia tộc của số được thống nhất về một mối. Bất kỳ một số phức nào cũng đều có thể viết dưới dạng  $a + bi$ , khi  $b = 0$  thì  $a + bi = a$ , đó chính là số thực, còn khi  $b < 0$  thì  $a + bi$  chính là số ảo.

Trong số phức, số ảo và số thực cùng hỗ trợ lẫn nhau, thiếu một cũng không được, vậy là cuối cùng số ảo đã có được một vị trí bình đẳng như số thực.

## Bạn có biết thế nào là xác suất?

Đánh bạc là một hoạt động cổ từ xa xưa, sự ra đời của nó bắt nguồn từ thời đại La Mã cổ. Tương truyền rằng khi đó hoàng đế La Mã cổ và các vị đại thần trong triều nhân rỗi đều thích đánh bạc. Nhưng các đệ tử của môn đỏ đen đều không ngờ được rằng, hoạt động đầu cơ mạo hiểm này có liên quan mật thiết tới sự ra đời của lý thuyết xác suất - một chi ngành toán học quan trọng.

Những nghiên cứu về lý thuyết xác suất bắt nguồn từ “vấn đề phân chia tiền vàng” sau cuộc chơi. Nếu 2 đệ tử cờ bạc trình độ tương đương như nhau sau khi kết thúc một trận chơi nên chia tiền bạc của họ như thế nào?

Giả sử một trận chơi bạc phải thắng được 6 ván mới là toàn thắng, nếu trong tình huống 1 người thắng 5 ván, người kia thắng 2 ván mà trận chơi dừng lại thì tiền bạc nên chia thế nào. Khi đó nhà toán học người Italy Pasiouli cho rằng nên chia số tiền theo tỷ lệ 5 : 2 cho hai bên là công bằng ngay.

Nhưng người thắng nhiều lần số ván hơn luôn cảm thấy cách chia của Pasiouli không công bằng. Giả sử nếu trong 1 trận bạc phải thắng 11 ván mới là toàn thắng mà 1 người thắng 10 ván, 1 người chỉ thắng có 8 ván thì nên chia như thế nào? Người thắng 10 ván chỉ cần thắng 1 ván nữa là có được tất cả số tiền còn người kia còn phải thắng 3 ván nữa mới được, như vậy thì quả là khó khăn hơn rồi. Nếu làm theo cách chia của nhà toán học Pasiouli thì 2 người phải chia tiền bạc theo tỷ lệ 5 : 4, như vậy sự khác biệt giữa hai người dường như chẳng là mấy, như vậy thì không công bằng hợp lý chút nào cả. Nhưng khi đó mọi người vẫn không tìm ra cách giải quyết nào tốt hơn cả.

Mãi tới 100 năm sau, hai nhà toán học thiên tài người Pháp là Pascal và Fermat mới giải quyết vấn đề này một cách ổn thoả. Mỗi nhà toán học đã có 1 phương pháp khác nhau, chúng ta hãy xem cách của Fermat trước.

Ví dụ 2 người chơi bạc có trình độ t được gọi là A và B, nếu A còn phải thắng 2 ván là toàn thắng mà B còn phải thắng 3 ván mới là toàn thắng thì nên phân chia như thế nào số tiền bạc?

Trong ví dụ trên, chúng ta thấy một điều hiển nhiên rằng nhiều nhất là chơi 4 ván nữa thì có thể quyết định thắng thua. Fermat gọi a là biểu thị A thắng, b là biểu thị B thắng, vậy thì kết quả cuối cùng sau 4 vòng nằm trong 16 cách sắp xếp sau đây : aabb, aaab, abba, bbab, baaa, bbaa, abab, baba, abaa, babb, aabb, abbb, aaba, baab, bbba, bbbb, trong đó a xuất hiện 2 lần hoặc trên 2 lần thì A thắng, tổng cộng có 11 tình huống; b xuất hiện 3 lần hoặc trên 3 lần thì B thắng, tổng cộng có 5 tình huống, vì vậy tiền bạc nên chia theo tỷ lệ 11 : 5.

Còn Pascal dùng “tam giác toán thuật” của ông để giải quyết vấn đề này và cũng có đáp án là 11 : 5. Nhờ có đánh bạc mà xuất hiện ngành khoa học để giải quyết 1 số vấn đề của những tình huống ngẫu nhiên được gọi là lý thuyết xác suất. Mặc dù ngành toán học này “xuất thân không chính đáng” nhưng nó lại là một chi ngành vô cùng quan trọng trong toán học.

## Tại sao lại nói ở đâu cũng thấy thống kê?

Thống kê số là hiện tượng không thể thiếu được trong xã hội hiện đại, lớn thì như việc nhà nước cứ mỗi định kỳ hàng năm phải tiến hành thống kê điều tra dân số, nhỏ thì như việc một thầy giáo tiến hành thống kê điểm số học tập của học sinh sau mỗi kỳ kiểm tra. Và ngày nay, lý thuyết và phương pháp thống kê học được ứng dụng một cách rộng rãi, nó làm thay đổi nhận thức của con người về thế giới. Vậy thống kê xuất hiện như thế nào?

Ngay từ thế kỷ 17 có một thương nhân người Anh tên là John Gerander đã tiến hành nghiên cứu về bảng tử vong mà chính phủ công bố. Ông ta phát hiện ra rằng tỷ lệ người chết vì các loại bệnh tật, tự sát và các loại tai nạn sự cố khác về cơ bản là không thay đổi, còn tỷ lệ số người chết vì bệnh truyền nhiễm lại dao động rất lớn. Năm 1662, ông tập trung các thành quả nghiên cứu của mình vào trong cuốn sách có tên là “Quan sát tự nhiên và quan sát chính trị đối với bảng tử vong”, cuốn sách này được coi là “khởi nguồn cho khoa học thống kê chân chính”.

Thống kê học chính là dùng để nghiên cứu quan sát số lượng hiện tượng xã hội xuất hiện nhiều lần và chỉ ra quy luật khoa học của nó. Ví dụ như khảo sát tình hình trí lực của con người : chọn bất kỳ một số người nào đó, đưa cho họ các bài trắc nghiệm để kiểm tra trí tuệ. Kết quả kiểm tra là : trí tuệ của họ phân bố thành hình gấp khúc kiểu chiếc chuông. Điều này có nghĩa là những người có trí tuệ bình thường chiếm đại đa số, người có trí tuệ thấp và người có trí tuệ siêu việt chiếm số lượng ít. Hơn nữa số người tham. dự trắc nghiệm này càng nhiều thì đường cong gấp khúc càng thể hiện hình chiếc chuông. Trí tuệ con người về tổng thể đều theo một kiểu quy luật nhất định, quy luật này chỉ có dựa vào nghiên cứu thống kê học mới phát hiện được.

Vậy thống kê học hiện đại có đặc điểm gì?

Thứ nhất thống kê học hiện đại trên cơ sở của lý thuyết xác suất đã xây dựng được phương pháp toán học độc đáo của mình. Thứ hai , thống kê áp dụng phương pháp lấy mẫu , chú trọng suy đoán tổng thể từ mẫu; thứ ba, thống kê không thể tách rời khỏi quan sát số lượng lớn và phân tích tính quy lt khách quan của kết quả quan sát; thứ tư, thống kê học nhất thiết phải thiết kế và tạo ra những bài trắc nghiệm khoa học, có hiệu quả (ví dụ như thiết kế bài trắc nghiệm trí tuệ lúc trước).

Sang thế kỷ 20, thống kê học phát triển rộng khắp và phổ cập nhanh chóng : thử nghĩ mà xem, trong các lĩnh vực khoa học tự nhiên, vật lý, hóa học, địa chất học, di truyền học, trong các lĩnh vực khoa học xã hội, kinh tế học, xã hội học, quản lý học thậm chí cả thăm dò dân ý, đánh giá tài sản, tiêu thụ sản phẩm, các vụ án phạm tội, có cái nào không cần đến thống kê?

Thống kê quả thật không ở đâu là không thấy!

## Thế nào là vấn đề thừa khuyết?

Vào đời Đường ở Trung Quốc, khi trong phủ của quan thượng thư Dương Tồn tổ chức một cuộc thi, Dương Tồn là quan chủ khảo ông ta đã đưa ra một đề toán như thế này : một hôm, có mấy tên trộm đang bàn luận làm thế nào để chia những cuộn vải cướp được. Nếu chia cho mỗi người 6 cuộn vải thì còn thừa 5 cuộn; nếu chia mỗi người 7 cuộn vải lại thiếu 8 cuộn, Dương Tồn mới hỏi các thí sinh hãy tìm ra xem có mấy tên trộm và mấy cuộn vải?

Một lúc sau có một thí sinh đưa ra đáp án chính xác: số tên trộm là 13 và có tổng cộng 83 cuộn vải. Nhưng bạn có biết anh ta làm thế nào tính ra

Chúng ta hãy so sánh 2 lần chia vải: lần thứ nhất mỗi người 6 cuộn vải còn thừa 5 cuộn; lần thứ hai mỗi người 7 cuộn và còn thừa 8 cuộn, có thể thấy do lần thứ 2 chia nhiều hơn lần thứ nhất (7 - 6) cuộn vải cho nên cần dùng nhiều hơn lần thứ nhất (5 + 8) cuộn vải. Do đó số tên trộm sẽ là  $(5 + 8) \div (7 - 6) = 13$  người, vậy số cuộn vải sẽ là  $13 \times 6 + 5 = 83$  cuộn vải.

Nếu bạn đã học phương trình thì có thể gọi số tên trộm là x từ đó ta có dạng thức phương trình là:  $6x + 5 = 7x + 8$ , tiếp tục tính ra được  $7x - 6x = 5 + 8$ , suy ra ta có  $x = 13$ , tức là có 13 tên trộm, số cuộn vải sẽ là  $13 \times 6 + 5 = 83$  cuộn vải, hoặc  $7 \times 13 - 8 = 83$  cuộn. Kết quả của hai cách giải này đều như nhau.

Anh chàng thí sinh thông minh đã nhanh chóng tính ra được đáp án nên đã được Dương Tồn trọng thưởng. Vấn đề như thế này chúng ta gọi là vấn đề thừa khuyết. Do kết quả hai lần chia có lần thì dư, ví dụ như lần một dư 5 cuộn vải, lúc này gọi là thừa; có lần thì thiếu, ví dụ như lần hai thiếu 8 cuộn vải, lúc này gọi là khuyết, hợp cả lại gọi là vấn đề thừa khuyết. Điều này cũng giống như mặt trăng trên bầu trời, có lúc tròn (thừa), lúc khuyết. Vấn đề “thừa khuyết” trong toán học chính là cách nói mượn hiện tượng đầy khuyết của mặt trăng.

## Thế nào là mô hình toán học?

Bạn chắc chắn không còn lạ gì với từ mô hình phải không? Ví dụ như ở trong bảo tàng chúng ta nhìn thấy những mô hình máy bay, mô hình tàu thủy, mô hình xe hơi. Thực ra mô hình là một kiểu mô phỏng, bắt chước các sự vật khách quan nó được chế tạo theo một tỷ lệ nhất định từ vật thực để cho con người hiểu rõ được về toàn bộ diện mạo của sự vật. Ngoài những mô hình máy móc, còn có mô hình sinh vật, mô hình địa chất..., có thể nói rằng các sự vật tồn tại trong cuộc sống đều có thể làm thành mô hình.

Trên đây chúng ta toàn đề cập đến các mô hình của các vật thực vậy còn mô hình toán học là như thế nào? Mô hình toán học là chỉ mô hình được tạo nên bằng phương pháp toán học, cũng có nghĩa là các vấn đề thực tế phức tạp được biểu thị dưới dạng thức toán học, từ đó mô phỏng sự thay đổi phát triển của vấn đề.

Mô hình là một dạng đơn giản hoá của sự vật thực tế, mô hình vật thực và mô hình toán học đều là như vậy. Nếu không đơn giản hoá mà muốn biểu đạt rõ vấn đề thực tế bằng các dạng thức toán học thì gần như là không thể. Chẳng hạn như trong vật lý có nói đến quá trình vận động của tàu hoả, cho rằng tàu hoả vận động đều tức là vận tốc của nó giữ nguyên không thay đổi, từ đó tính ra quan hệ giữa quãng đường đi và thời gian. Nhưng trên thực tế tàu hoả không thể lúc nào cũng vận động đều về phía trước, sự khởi động ban đầu, lúc vào bến của tàu hoả đều có sự thay đổi về vận tốc. Với tiền đề cho rằng vận tốc của tàu hoả là tiến đều về phía trước, chúng ta có được một công thức như sau: Quãng đường đi = Vận tốc (V) x Thời gian (T).

Nếu chúng ta suy xét đến yếu tố tốc độ của tàu hoả sau khi khởi động cứ tăng dần lên một chút một chút, hơn nữa cho rằng việc tăng tốc độ này (a) là không đổi, thế thì chúng ta có thể chi tiết hoá hơn nữa công thức toán học nói trên, chúng ta có  $S = v_0t + 1/2 at^2$ , trong đó  $v_0$  thể hiện tốc độ ban đầu, nếu tàu hoả lúc đầu là không chạy thì  $v_0$  bằng 0, t là thời gian, a là tốc độ tăng.

Có thể thấy 2 mô hình toán học nói trên mặc dù đều phản ánh vấn đề trong cuộc sống thực tế của việc tàu hoả chạy nhưng lại có sự khác biệt rất lớn. Mô hình thứ nhất đơn giản hơn, mô hình thứ hai kỹ lưỡng hơn. Đây là kết quả thể hiện trình độ đơn giản hoá khác nhau đối với vấn đề thực tế.

Vậy thì phải chăng suy xét càng kỹ càng thì mô hình càng tốt hơn? Cũng không hẳn như vậy! Mặc dù suy xét càng kỹ càng thì càng gần với thực tế hơn nhưng sự phức tạp của mô hình lại càng cao, việc sử dụng mô hình sẽ càng khó khăn hơn, mà cũng có thể là không thể sử dụng được. Vì thế một mô hình toán học tốt vừa phải phản ánh chính xác tình hình thực tế lại vừa không nên quá phức tạp.

Xây dựng một mô hình toán học thích hợp sẽ đem lại nhiều thuận lợi đáng kể cho các mặt trong cuộc sống sản xuất, sinh hoạt, làm việc của chúng ta, hơn nữa muốn xây dựng được một mô hình toán học tốt cũng là một công việc không dễ dàng chút nào bởi vì ngoài việc phải nắm vững đầy đủ kiến thức toán học cơ bản, còn cần phải có hiểu biết sâu sắc về các vấn đề cần nghiên cứu.



## Bộ sách toán học đầu tiên ở Trung Quốc?

Trung Quốc là một trong những nền văn minh cổ của thế giới và toán học cũng ra đời khá sớm ở đây. Nhưng sơ khai của nền toán học cổ đại Trung Quốc xuất hiện vào khi nào thì hiện vẫn chưa có cách xác định, chúng ta chỉ có thể suy đoán căn cứ vào các phát hiện khảo cổ học và tài liệu có liên quan.

Di chỉ Mẫu Độ bên bờ sông Triết Giang vào khoảng 5000 năm trước công nguyên cho thấy, nền nông nghiệp của Trung Quốc thời đó đã có quy mô khá lớn, những việc gắn liền với sản xuất nông nghiệp như đo đất, xây dựng nhà cửa, kho chứa đồ và tính lịch thiên văn đều không thể tách rời khỏi toán học.

Cho đến khoảng 3000 năm trước công nguyên, trong các văn hoa khắc hoạ trên các đồ sứ của nhóm di chỉ Bán Pha ở Thiểm Tây đã thấy có các ký hiệu biểu thị số lượng.

Đời nhà Hạ vào khoảng 2000 năm trước công nguyên, xuất phát từ nhu cầu xây dựng các công trình thủy lợi với quy mô lớn nên đã xuất hiện các công cụ như dây thừng chuẩn, thước vẽ (hình vuông và tròn)...

Trong các văn.giáp cốt của đời nhà Thương đã có cách ghi số theo hệ thập tiến, cách ghi thiên can địa chi, cách ghi giờ.

Vào đời nhà Chu khoảng 800 năm trước công nguyên, tầng lớp quý tộc đã được đào tạo về các mặt “lễ, nhạc, xạ, ngự, thư, số”, như vậy “số” đã trở thành một môn học.

Vào thời kỳ xuân thu chiến quốc khoảng 500 trước công nguyên, đã xuất hiện công cụ tính toán “thẻ tính”, thẻ tính là một loại công cụ sắp xếp những chiếc que nhỏ theo hệ thập tiến, thẻ này dùng để tính toán nhằm giải quyết những vấn đề thực tế trong cuộc sống. Cũng chính vào lúc này, để đáp ứng nhu cầu sản xuất nông nghiệp, thông qua quan trắc thiên văn và tính toán, người ta đã cho ra đời bộ sách thiên văn đầu tiên là “Chu Bể Toán Kinh” vào khoảng thế kỷ thứ 2 trước công nguyên. Nhưng thiên văn học không thể tách rời khỏi toán học, cho nên “Chu Bể Toán Kinh” thực ra cũng là một tác phẩm nổi tiếng đầu tiên về toán học còn lưu truyền cho đến ngày nay.

Tác giả của “Chu Bể Toán Kinh” hiện vẫn không rõ là ai, các kiến thức trong bộ toán kinh này có liên quan tới toán học, các phép tính cộng trừ nhân chia và các ứng dụng của định lý về hình tam giác vuông trong đo lường cho đến nay vẫn khiến nhiều người thán phục.

## Bạn có biết về giải thưởng Feirzi không?

Giải thưởng Feirzi là giải thưởng toán học và có uy tín lớn nhất trên thế giới.

Cũng giống như các loại giải thưởng Nobel, giải Oscar, Feirzi cũng là tên một người. Ông là nhà toán học người Canada, sinh vào năm 1863, mất vào năm 1932. Mặc dù ông không có danh tiếng lẫy lừng như các nhà toán học Newton, Cauchy, Euler nhưng về phương diện nghiên cứu, tổ chức giao lưu giữa các nhà toán học ông lại có rất nhiều công lao. Năm 1924, trong hội nghị các nhà toán học quốc tế lần thứ 7 tổ chức tại Toronto, Feirzi đề nghị thiết lập một giải thưởng toán học lấy từ kinh phí còn lại của đại hội; ông cũng lập di chúc để lại di sản của mình cống hiến cho một phần của tiền thưởng. Đề ghi nhớ và tán dương công lao của Feirzi, hội nghị quốc tế đã đặt tên cho giải thưởng toán học này là “giải thưởng Feirzi”.

Năm 1936, tại đại hội các nhà toán học quốc tế lần thứ 10 tổ chức tại Oslo, giải thưởng Feirzi lần đầu tiên được trao cho nhà toán học trẻ gốc Phần Lan quốc tịch Mỹ là Erfus và nhà toán học người Mỹ Dogerasi. Trong những lần tiếp theo của hội nghị toán học quốc tế, chương trình nghị sự đầu tiên của hội nghị chính là tuyên bố danh sách người được giải thưởng Feirzi, các nhà toán học cũng có thể thấy tự hào vì giành được giải thưởng này. Cho đến ngày nay, mọi người đều nhất trí công nhận rằng, giải Feirzi là một trong những giải thưởng có uy tín cao nhất trong ngành toán học, cũng có thể gọi là “giải Nobel của ngành toán học”.

Những nhà toán học đã từng đạt giải Feirzi đến nay đã có vài chục người, trong đó có nhà toán học người Mỹ gốc Hoa Khưu Thành Tương, ông ta đã vinh dự đạt giải Feirzi vào năm 1982, quả thật là đáng tự hào và đáng khâm phục.

Giải thưởng Nobel là giải thưởng được cả thế giới công nhận và có uy tín cao, mặc dù có rất nhiều giải thưởng cho các lĩnh vực khác nhau nhưng lại không hề có giải thưởng dành cho toán học. Vậy thì ngoài giải thưởng Feirzi ra còn có giải thưởng toán học nào khác nữa không? Vẫn còn một giải thưởng nữa cũng rất có uy tín, đó là giải thưởng “Volfu”, nhà toán học nổi tiếng người Mỹ gốc Hoa - giáo sư Trần Tinh Thân vào năm 1984 đã được nhận giải thưởng này.

## Phương pháp toán học có thể thay thế thí nghiệm khoa học được không?

Từ nhỏ chúng ta đã học toán học, nó là một môn học cơ bản cũng như vật lý, hoá học, hơn nữa toán học không chỉ là khoa học về đại số và hình học mà nó còn được ứng dụng ở nhiều mặt trong cuộc sống và có chức năng phán đoán suy luận. Chẳng hạn như chúng ta có thể dùng phương pháp toán học để dự báo thời tiết, ước tính sản lượng nông phẩm, thiết kế máy bay và xe hơi, thậm chí cả đạn đạo tầm xa dùng trong chiến tranh cũng không thể tách rời khỏi toán học. Vậy liệu có thể nói rằng toán học là cơ sở chính cho tất cả các ngành khoa học không, nó có thể thay thế cho thí nghiệm khoa học không?

Chúng ta hãy cùng xem xét quan hệ của phương pháp toán học và thí nghiệm khoa học.

Trước tiên, sự hình thành của phương pháp toán học là kết quả của quá trình thí nghiệm khoa học lâu dài. Chẳng hạn như để dự báo chính xác nhật thực, nguyệt thực, mặt trời lặn mọc, thời tiết bốn mùa, chúng ta nhất thiết phải biết được quy luật thời gian và quỹ đạo vận động của trái đất quay xung quanh mặt trời, mặt trăng chuyển động quanh xung quanh trái đất điều này cần phải có sự quan trắc và thí nghiệm ở phương diện thiên văn học mới có thể xác định được. Lại ví dụ như việc thiết kế máy bay kiểu mới trước tiên phải dựa vào lượng lớn kiến thức thí nghiệm trong quá khứ đã được tích lũy có liên quan tới thiết kế máy bay, mới có thể thiết lập mô hình toán học của máy bay kiểu mới, cuối cùng hình thành phương pháp toán học. Có thể thấy thí nghiệm khoa học là cơ sở của phương pháp toán học.

Thứ hai, phương pháp toán học đã được hình thành nhất định phải được kiểm nghiệm qua thí nghiệm khoa học. Do trong quá trình hình thành phương pháp toán học đã tiến hành đơn giản hoá và trừu tượng hoá đối với sự vật khách quan cho nên kết quả tính toán toán học và suy đoán luôn luôn có sự sai lệch so với thực tế, vì vậy chỉ có thông qua kiểm nghiệm thực tiễn mới có thể đảm bảo sự chính xác của phương pháp toán học. Chẳng hạn như máy bay được thiết kế theo hệ thống mô hình máy tính nếu không làm qua các thí nghiệm tổng thể và từng phần, không qua bay thử thì không thể đưa vào bay chính thức được.

Cuối cùng, phương pháp toán học không phải là một chìa khoá vạn năng, do nhận thức của nhân loại còn hạn chế, ở nhiều lĩnh vực vẫn chưa tìm ra được các mô hình toán học thật chuẩn xác. Chẳng hạn như sự thay đổi của thời tiết dựa vào rất nhiều yếu tố, vì thế cho đến nay vẫn chưa có một mô hình toán học chuẩn xác nào cho việc dự báo thời tiết. Cùng ví dụ như dự báo động đất thì tác dụng của toán học cũng là rất

nhỏ. Trong những lĩnh vực này còn phải đợi thêm nhiều sự quan sát phân tích và khám phá thực tiễn. Ngoài ra, đối với một số vấn đề xã hội, do các kiểu yếu tố khác nhau mà không phải công thức toán học đơn giản nào cũng có thể phân tích rõ ràng, về cơ bản là khó có thể số hoá. Chẳng hạn như vấn đề tăng trưởng dân số, nó chịu sự ảnh hưởng của tổng hợp các yếu tố như môi trường, tài nguyên tự nhiên, tỷ lệ sinh đẻ, tỷ lệ tử vong... cho nên không phải chỉ dựa vào mô hình toán học là có thể vẽ ra rõ ràng được. Nói tóm lại, phương pháp toán học có vai trò rất quan trọng nhưng vẫn không phải là “thuốc chữa bách bệnh” và không thể thay thế các thí nghiệm khoa học.

# Số Ảrập có phải là do người Ảrập sáng tạo ra?

Các số 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 là những số mà chúng ta đều quá quen thuộc, chúng là những ký hiệu số học cơ bản nhất, cả thế giới đều dùng chung, chúng ta gọi chúng là những số Ảrập. Liệu những số này là do người Ảrập sáng tạo ra?

Thực ra, số Ảrập hoàn toàn không phải là do người Ảrập sáng tạo ra mà là do người Ấn Độ sáng tạo ra. Cách đây khoảng 1500 trước, người Ấn Độ đã dùng một kiểu chữ đặc biệt để biểu thị số. Những chữ số này tổng cộng là 10, hơn nữa rất đơn giản, chỉ cần vẽ 1 nét hoặc 2 nét là được những chữ số này chính là ký hiệu nguyên thủy của chữ số Ảrập ngày nay.

1 | Γ Σ Δ 7 ^ 9

Sau đó, do sự đi lại buôn bán giữa phương Đông và phương Tây ngày càng nhiều lên, nền kinh tế phát triển thúc đẩy sự giao lưu văn hoá cho nên chữ số của Ấn Độ cũng được du nhập vào Tây Ban Nha.

Vào thế kỷ 8, người Tây Ban Nha và người Ảrập xảy ra chiến tranh, người Ảrập thâm nhập vào Tây Ban Nha thấy kiểu chữ số này rất đơn giản dễ học nên đã học và đem về nước mình. Sau đó, nó lại được du nhập vào châu Âu. Vào thế kỷ 10, chữ số Ảrập xuất hiện ở châu Âu như thế này : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0, như vậy có thể thấy lúc này người ta đã dùng đến ký hiệu số 0 rồi.

Trở quá trình sử dụng chữ số Ảrập, con người không ngừng cải tiến chúng, và đến thế kỷ thứ 14, chữ số mà ở châu Âu thường dùng đã gần giống với số ngày nay mà chúng ta sử dụng :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Bạn thấy không ngoại trừ số 4 và số 5, các số khác đều đầy đủ cả rồi.

Do số Ảrập đơn giản dễ học hơn số của Trung Quốc, La Mã cho nên chúng nhanh chóng được truyền bá rộng rãi và đến nay đã thông dụng trên toàn thế giới.

## **Ai là người đầu tiên tìm ra hệ đếm theo 60?**

Babylon cổ xưa nay thuộc địa phận của Iraq, cách Batda khoảng 100 km về phía Nam. Vào khoảng năm 2000 trước công nguyên, vương quốc Babylon ra đời với thủ đô là Babylon.

Người Babylon có rất nhiều nghiên cứu về thiên văn học, 1 tuần có 7 ngày là do người Babylon nêu ra; 1 giờ có 60 phút, một phút có 60 giây cũng là do người Babylon nêu ra; chia vòng tròn ra làm 360 độ, mỗi một độ lại chia ra làm 60 phút, mỗi một phút lại chia ra là 60 giây cũng là do người Babylon nêu ra đầu tiên.

Có lẽ bạn sẽ tò mò hỏi rằng, người Babylon tại sao lại thích 60 đến như vậy? Đây là bởi vì người Babylon sử dụng hệ tính theo 60. Rất nhiều nước trên thế giới đều sử dụng hệ đếm thực là tính theo 10. Việc sử dụng hệ đếm thập phân thì tương đối dễ hiểu, bởi vì con người có 10 ngón tay, công cụ tiện lợi nhất để con người nhớ số chính là 10 ngón tay, giống như chúng ta hay dạy trẻ em “xoè 10 ngón tay ra mà đếm”. Nếu đếm hết 10 ngón tay rồi thì phải tính xem đếm tiếp như thế nào đây.

Người Indian ở Nam Mỹ sau khi đếm hết bằng 10 ngón tay thì họ tiếp tục đếm 10 ngón chân, họ chính là những người sử dụng hệ đếm 20.

## Tại sao người Babylon lại sử dụng hệ đếm 60 nhỉ? Về vấn đề này có hai cách lý giải hoàn toàn khác nhau?

Một ý kiến cho rằng, thừa ban đầu người Babylon tính một năm là 360 ngày, họ chia vòng tròn ra làm 360 góc, mặt trời mỗi ngày đi 1 độ, mà mỗi cạnh của hình sáu cạnh nội tiếp đường tròn đều bằng bán kính của đường tròn, góc của tâm tròn đối diện với mỗi cạnh vừa đúng bằng 60 độ, chính vì thế mà có hệ đếm 60 ra đời.

Một cách lý giải khác cho rằng, từ những đồ khai quật được của người Babylon cho thấy rằng người Babylon từ lâu đã biết lịch mặt trời có 365 ngày. Họ chọn hệ đếm 60 là bởi vì 60 là số nhiều số thường dùng, ví dụ như 60 là bội số của 2, 3, 4, 5, 6, 12..... Đặc biệt là  $60 = 12 \times 5$ , trong đó 12 là số lượng tháng của một năm, 5 là số ngón tay trên một bàn tay.

Vấn đề này được toán học người Hy Lạp cổ Swen nghiên cứu từ thế kỷ thứ 4, cho đến nay đã là hơn 1600 năm rồi nhưng vẫn chưa có một kết luận đáng tin cậy. Hai cách giải thích nói trên cũng đều là sự suy đoán của mọi người, sự thực chính xác vẫn còn đang đợi mọi người tìm kiếm phát hiện và khai thác các tài liệu lịch sử để tìm ra đáp án.

## Bạn có biết về “số 7 cô đơn” không?

Đây là biểu thức số học của “số 7 cô đơn”. Bởi vì trong biểu thức này, chỉ biết được hàng nghìn là số 7, căn cứ theo hình dạng của biểu thức, bạn hãy tìm ra các số còn lại.

Số bị chia trong biểu thức nói trên là một số có 8 hàng đơn vị, số chia là một số có 3 hàng đơn vị, vừa đủ để chia hết, thương số là số có 5 hàng đơn vị. Trong biểu thức phép chia nói trên, số chưa biết lên tới con số 40, bạn có lẽ sẽ nghi ngờ, chỉ dựa vào mỗi một số 7 cô đơn thì có thể suy ra được cả một biểu thức hay không?

Để suy ra được cả biểu thức này mà chỉ dựa vào mỗi một số 7, chúng ta phải động não phân tích cả biểu thức xem sao.

Trước tiên, số hàng chục của thương số phải là số 0. Bởi vì trong biểu thức khi chia đến đó hàng chục, hàng đơn vị của số bị chia đều cùng rời đi rồi.

Thứ hai, chữ số ở hàng chục nghìn và hàng đơn vị của thương số tích số của số chia có 4 đơn vị, mà số ở hàng trăm và tích số của số chia chỉ có 3 đơn vị; xem ra, chữ số ở hàng chục ngàn và hàng đơn vị của thương số đều lớn hơn chữ số ở hàng trăm.

Thứ 3 là, xem trong hàng số 3, hàng số 4 của biểu thức ta thấy số chia và tích số của số 7 là số có 3 hàng đơn vị. Mà trong hàng số 5, hàng số 6 của biểu thức, số bên phải số 7 (chữ số hàng trăm) và tích số của số chia cũng là số có 3 hàng đơn vị, mà hàng số 5 lại là số có 4 đơn vị, có thể thấy tích số của hàng số 6 phải lớn hơn số của hàng số 4, vì thế, số ở hàng trăm nhất định phải lớn hơn 7, là 8 hoặc là 9.

Căn cứ theo phân tích hàng số 2 và hàng số 3, có thể thấy, số ở hàng trăm của thương số là 8, số ở hàng chục nghìn và hàng đơn vị của thương số là 9, vì vậy, thương số nhất định sẽ là 97809.

Chúng ta lại xem tiếp hàng số 6, do số chia và tích số của 8 chỉ có thể là số có 3 hàng đơn vị, có thể thấy số chia nhất định nhỏ hơn 125. Đã như vậy thì chúng ta thử dùng 124 để thử xem. Vì thế lấy 124 nhân với 97809, sau khi có được số bị chia chúng ta lại làm lại phép chia, thế là có được các số còn thiếu của biểu thức. Chúng ta thử như vậy và quả nhiên đã thành công, các bạn hãy xem đáp án dưới đây :

Liệu còn có số nào nhỏ hơn số 124 không? Bạn có thể lấy 123 thử xem, bạn sẽ thấy không còn số nào nhỏ hơn 124 để có thể lập nên biểu thức này.



# **Bạn có biết ý nghĩa của các chữ số La Mã X, XX, XXI, XV, V, VI... không?**

Người La Mã cổ khi biểu thị từ 1 đến 10 họ dùng các số I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. Mặc dù trong toán học cả thế giới đều sử dụng các con số Ả-rập là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... nhưng trong những chiếc đồng hồ và trong sách cổ vẫn còn nhìn thấy những con số La Mã kiểu này.

Số La Mã là do người La Mã cổ sáng tạo ra, có tổng cộng 7 số : I (biểu thị số 1); V (biểu thị số 5), X (biểu thị số 10), L (biểu thị số 50), C (biểu thị số 100), D (biểu thị số 500), M (biểu thị số 1000). Chúng được kết hợp theo 3 cách để có thể biểu thị bất kỳ số nào :

(1) “Lặp đi lặp lại mấy lần” : một số La Mã lặp đi lặp lại mấy lần có thể biểu thị mấy lần của con số đó. Ví dụ như : II là 2 lần của I, tức là biểu thị 2; XXX là 3 lần của X, tức là biểu thị 30; MM là 2 lần của 1000, tức là biểu thị 2000.

(2) Cách “phải cộng trái trừ” : bên phải của một số viết kèm thêm một số nhỏ hơn để biểu thị số lớn cộng thêm số nhỏ, ví dụ : VI biểu thị 5 cộng 1 là 6; XXII biểu thị 20 cộng 2 là 22; DC biểu thị 500 cộng 100 là 600. Nếu bên trái của một số viết kèm thêm một số nhỏ hơn để biểu thị số lớn trừ đi số nhỏ, ví dụ như : IV biểu thị 5 trừ đi 1 tức là 4, IX biểu thị 10 trừ đi 1 tức là 9, XL biểu thị 50 trừ đi 10 tức là 40; VD biểu thị 500 trừ đi 5 tức là 495; vậy thì CDLXVII biểu thị bao nhiêu nhỉ? Chính là 467.

(3) Cách “thêm một gạch ngang” : trên chữ số La Mã viết thêm một gạch ngang biểu thị 1000 lần của số này, ví dụ như : XV biểu thị 15 x 1000 tức là 15000. Phía trên số đó thêm hai gạch ngang là đN biểu thị triệu lần của số đó, ví dụ như XV biểu thị triệu lần của 15 tức là 15000000.

Xem ra sử dụng số La Mã thật là đặc biệt. Không biết bạn có để ý hay không, trong số La Mã không có số “0”, tại sao vậy nhỉ?

Trong số La Mã vốn không có số 0, sang tới thế kỷ thứ 5, số “0” từ phương Đông chuyển đến La Mã. Nhưng La Mã khi đó dưới sự khống chế của giáo hội, giáo hoàng rất bảo thủ cho rằng số La Mã dùng để ghi số là quá đủ rồi, không cần thêm số 0 làm gì cả, và ra lệnh cấm tất cả mọi người dùng số 0. Nếu có người ghi chép và tuyên truyền về số 0 thì giáo hoàng sẽ trừng phạt anh ta với tội danh làm nhơ bản thân giáo. Vì vậy trong số La Mã không có số 0 cho đến ngày nay.

## Bạn có biết “thiên can địa chi” là gì không?

Có lẽ bạn thường nghe thấy mọi người nói đến “thiên can địa chi”, “một Giáp Tý là 60 năm”... nhưng có thể bạn không biết được nó có ý nghĩa gì! Vậy thì để chúng tôi cùng nói cho bạn biết nhé, “thiên can địa chi” được gọi tắt là “can chi”, đây là phương pháp nhớ năm của Trung Quốc cổ đại.

Bây giờ chúng ta hãy dùng dương lịch của phương Tây để tính năm, ví dụ như năm nay là năm 2005, cách nhớ năm thông dụng như thế này được tính từ khi chúa Jesus ra đời. Còn cách tính năm theo “can chi” là phương pháp của Trung Quốc cổ đại.

Vậy trước tiên chúng ta hãy xem “thiên can” là cái gì? 10 chữ Giáp, Ất, Bính, Đinh, Mậu, Kỷ, Canh, Tân, Nhâm, Quý được gọi là thiên can. Địa chi có 12 chữ, lần lượt là Tý, Sửu, Dần, Mão, Thìn, Tỵ, Ngọ, Mùi, Thân, Dậu, Tuất, Hợi. Sự kết hợp giữa 10 chữ của Thiên can và 12 chữ của Địa chi sẽ tạo thành “Thiên can địa chi”, ví dụ như Giáp Tý, Bính Thìn, Kỷ Mùi, Tân Dậu...

Bạn có lẽ sẽ hỏi vậy thiên can có 10 chữ kết hợp với địa chi có 12 chữ, số lượng hai bên không bằng nhau thì làm sao kết hợp theo thứ tự được? Thì ra nó được kết hợp như thế này : sau khi 10 chữ thiên can kết hợp với 10 chữ địa chi tương ứng thì lúc này địa chi vẫn còn dư ra 2 chữ, là Tuất và Hợi, khi đó lại dùng thiên can kết hợp với hai chữ địa chi còn lại thì sẽ có Giáp Tuất, Ất Hợi; nhưng lúc này 12 chữ của Địa chi đều đã kết hợp nhưng Thiên can lại chỉ kết hợp có hai chữ, vậy còn 8 chữ nữa? Vậy thì lại kết hợp 8 chữ còn lại của Thiên can với Địa chi từ đầu một lần nữa, kết hợp như vậy một lần nữa cho đến khi thiên can và địa chi toàn bộ kết hợp với nhau thì mới thôi. Bạn nghĩ xem, vậy phải dùng bao nhiêu lần thiên can và bao nhiêu lần địa chi? Trên thực tế, đây là bội số nhỏ nhất của thiên can và địa chi, tức là bội số nhỏ nhất của 10 và 12, tức là 60, vì thế thiên can địa chi tổng cộng là 60, sử dụng 6 lần thiên can, 5 lần địa chi. Chúng ta đã biết đôi đầu tiên là Giáp Tý, vậy năm đó gọi là năm Giáp Tý, 60 năm sau một vòng tuần hoàn can chi kết thúc, năm thứ 61 lại là năm Giáp Tý, vì thế mà gọi “một Giáp Tý là 60 năm”, đến đây thì các bạn đều rõ rồi nhỉ!

Ví dụ như trong lịch sử Trung Quốc có biến pháp Mậu Tuất nổi tiếng (năm 1898), tức là sự kiện đó xảy ra vào năm Mậu Tuất, 60 năm sau là năm 1958 cũng là năm Mậu Tuất. Lại ví dụ như cuộc cách mạng Tân Hợi cũng của Trung Quốc do Tôn Trung Sơn lãnh đạo, bởi vì năm 1911 là năm Tân Hợi, nên gọi đó là cuộc cách mạng Tân Hợi. Vậy thì năm à năm gì nhỉ? Lê dĩ nhiên lại là năm Tân Hợi, bởi vì can chi cứ 60 năm lại quay vòng một lần.

Năm 2000 là năm Canh Thìn, lại còn gọi là năm Rồng. Bởi vì cầm tinh được tính theo địa chi : Tý tức là chuột, Sửu là trâu, Dần là hổ, Mão là mèo, Thìn là rồng, Tỵ là rắn, Ngọ là ngựa, Mùi là dê, Thân là khỉ, Dậu là gà, Tuất là chó, Hợi là lợn. Vậy thì địa chi của năm Canh Thìn là chữ Thìn cho nên năm đó là năm rồng, đó là lý do vì sao người ta còn gọi năm 2000 là năm rồng.

Cách ghi năm theo can chi là một cách ghi năm tương đối khoa học của thời xưa để lại, chính vì thế nó vẫn còn được lưu truyền tới ngày nay.

# Thỏ trắng nấp ở trong những cái hang nào thì cáo mới không tìm ra được?

Có một con cáo và một con thỏ sống trong những hang động ở trên đỉnh núi. Những cái hang này tổng cộng có 17 cái dọc theo đỉnh núi tạo thành một vòng xuyên lớn, khoảng cách giữa mỗi cái hang là khá xa. Cáo luôn muốn tìm cách để ăn thịt thỏ trắng.

Một hôm, cáo và thỏ nhìn nhau từ xa, thỏ nói với cáo : “Anh không cần lúc nào cũng phải tìm cách đánh tôi, chúng ta đánh số thứ tự cho 17 cái hang lan lượt từ số 1 đến số 17, tôi chọn ba cái hang gần nhau, mỗi cái hang ở 10 ngày. Anh xuất phát từ cái hang số 17, lần thứ nhất đi cách một cái đến hang số 1 tìm tôi, lần thứ hai đi cách hai cái đến hang số 3 tìm tôi, lần thứ ba đi cách 3 cái đến hang số tìm tôi. Cứ lần lượt như vậy trong vòng 30 ngày, không quan trọng anh vào cái hang nào bao nhiêu lần, chỉ cần anh tìm thấy tôi thì anh có thể ăn thịt tôi ngay.”

Cáo nghĩ trong vòng một tháng, ta nhất định tìm được mi, ta sẽ ăn thịt mi. Vì thế cáo đồng ý ngay. Nhưng con cáo giao hoạt tìm trong suốt cả một tháng mà vẫn không tìm thấy thỏ, bạn hãy nói cho chúng tôi biết, thỏ trắng thông minh đã ở trong 3 chiếc hang liền kề nào không?

Để giải được bài toán khá khó này, phải có phương pháp tư duy chính xác, nếu không thì quả là không dễ dàng gì.

Trước tiên, chúng ta hãy phân tích những lần cáo vào hang là những hang số bao nhiêu. Lần thứ nhất, cáo vào hang số 1 đi cách một cái hang; lần thứ hai cáo đi cách hai cái hang, nó vào hang số 3; lần thứ ba nó đi cách 3 cái hang tức là vào hang số  $1 + 2 + 3 = 6$ ; lần thứ tư, cáo đi cách 4 hang, tức là nó vào hang số  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ;..., cứ tiếp tục theo cách như vậy, trên cơ sở của lần trước thì lần thứ n cáo phải đi cách n lần, vào hang số  $1 + 2 + 3 + (n-1) + n$ , đúng không?

Tiếp theo, điều cần lưu ý là do 17 cái hang tạo thành một hình vòng tròn, chẳng hạn như lần thứ 6 cáo đi vào hang số  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ , đỉnh núi không có hang số 21, chúng ta thấy hang số 21 thực tế ra là hang số 4, bởi 4 là số dư của 21 chia cho 17. Vì thế khi số của chúng ta cần lớn hơn 17 thì phải chia cho 17 để lấy số dư thì mới được, đây chính là hang số bao nhiêu mà cáo cần phải vào.

Cứ làm theo cách phân tích trên, chúng ta có thể có được một cách rất thuận lợi : nếu thỏ nấp trong hang số 7, 8, 9 hoặc hang số 12, 13, 14 thì cáo không thể ăn thịt được thỏ.

Nếu không tin, bạn cứ thử kiểm tra lại mà xem!

## Bạn có biết nhà toán học nào trong giới động vật không?

Bạn có biết không trong giới tự nhiên có rất nhiều “nhà toán học động vật” kỳ diệu.

Bên trong hình chữ nhật vàng (hình chữ nhật có tỷ lệ dài rộng là 0,618) làm một hình vuông dựa vào ba cạnh, phần thừa còn lại là một hình chữ nhật vàng, lại có thể làm một hình vuông. Nối theo thứ tự các trung tâm của những hình vuông này chúng ta được một đường “ốc vàng”. Các nhà hải dương học phát hiện ra rằng, trên thân của con ốc anh vũ, một số động vật thể sừng, và một số động vật thân mềm giáp xác đều phát hiện có “đường ốc vàng”.

Các nhà khoa học còn phát hiện ra rằng, trên thân san hô còn có ghi “lich ngày” rất là tinh xảo: hàng năm chúng đều “khắc hoạ” trên thân mình 365 đường hoa văn, cũng chính là mỗi ngày vẽ một đường. Điều kỳ lạ là các nhà cổ sinh vật phát hiện thấy san hô của 350 triệu năm trước vẽ số đường hoa văn là 400 đường. Tại sao lại vậy nhỉ? Các nhà thiên văn học cho chúng ta biết rằng, khi đó trái đất tự quay quanh mình một ngày chỉ có 21,9 giờ đồng hồ, một năm không phải là 365 ngày mà là 400 ngày. Có thể thấy san hô có thể căn cứ theo sự thay đổi biến hoá của hiện tượng thiên nhiên mà “tính toán”, “ghi chép” khá là chính xác thời gian của một năm.

Kiến cũng là một “toán học gia” xuất sắc. Nh khoa học người Anh Hunston đã từng làm một thí nghiệm thú vị như thế này : ông cắt một con châu chấu chết thành 3 mảnh, mảnh thứ hai lớn gấp đôi mảnh thứ nhất, mảnh thứ ba lớn gấp đôi mảnh thứ hai, sau khi kiến phát hiện ra ba mảnh châu chấu này 40 phút, số lượng con kiến tập trung ở mảnh châu chấu nhỏ nhất là 28 con, ở mảnh thứ hai là 44 con, mảnh thứ ba là 89 con, như vậy là số lượng kiến ở nhóm sau gần gấp đôi số lượng ở nhóm trước.

Còn ong thì có thể được coi là “nhà tính toán số học và thiết kế thiên tài”. Tổ ong mà con ong kiến tạo vô cùng kỳ diệu. Tất cả những góc tù hình lăng trụ ở phần đáy tổ ong đều là  $109^{\circ} 28'$ , tất cả các góc nhọn đều là  $20^{\circ} 32'$ . Theo như tính toán trên lý thuyết của các nhà toán học, nếu phải tiêu hao một số nguyên liệu nhỏ nhất để tạo ra một dụng cụ dựng hình lăng trụ lớn nhất cũng chính là góc này.

Những con hạc trắng luôn luôn bay thành từng đàn từng đàn một, hơn nữa còn xếp thành hình chữ “nhân” trong chữ Hán, góc của hình chữ nhân này luôn luôn là  $110^{\circ}$ . Một nửa của góc kẹp hình chữ “nhân” vừa đúng là  $54^{\circ} 44' 8''$ , đây cũng chính là số đo góc của tinh thể đá kim cương.

## Bạn có biết về vòng Macbius kỳ diệu không?

Năm 1858, nhà toán học người Đức Macbius phát hiện ra rằng một dải giấy sau khi xoay chuyển  $180^0$  cho hai đầu nối tiếp nhau sẽ có một tính chất khác lạ. Sau này dải giấy này được mọi người gọi là “vòng Macbius”.

Chúng ta hãy cùng làm một thí nghiệm thực tế để cùng cảm nhận sự thần kỳ của vòng giấy Macbius.

Bạn hãy lấy ra một tờ giấy có hai mặt trái phải, cắt thành một dải giấy dài, ở mặt phải chúng ta dán thành màu trắng, mặt trái dán thành màu đen. Sau đó dùng keo dán hai đầu của dải giấy lại khi dán nhớ để cho mặt trắng quay ra ngoài, như vậy là ta đã có một vòng giấy, bên ngoài là màu trắng, bên trong là màu đen. Nếu như bạn bắt một con kiến (hoặc dùng một chiếc bút giả như con kiến) đặt vào chỗ mặt trắng để cho nó đi lại, không cho phép con kiến bò đến phần màu đen mà chỉ có thể bò về phía trước; bạn sẽ thấy con kiến này cứ bò đi bò lại ở phần màu trắng mà vĩnh viễn không bò sang phần màu đen. Ngược lại nếu đặt nó vào phần màu đen nó cũng chỉ có thể bò ở phần màu đen mà thôi chứ không bò sang phần màu trắng.

Có lẽ bạn cho rằng đương nhiên là như vậy rồi c gì thần kỳ đâu? Nhưng nếu chúng ta bỏ chỗ dán trước và dán lại sao cho phần màu đen hướng ra ngoài cùng với một phần màu trắng vậy thì vòng tròn dấy không còn phân biệt mặt trái phải hay trong ngoài nữa. Chúng ta lại đặt con kiến vào bất kỳ chỗ nào trong vòng giấy để cho nó đi lại tự do, bạn sẽ thấy con kiến tự do chạy đi chạy lại tới tất cả mọi chỗ trên cả hai mặt đen trắng của vòng giấy. Điều này cũng có nghĩa là dường như vòng giấy đã biến thành chỉ có một mặt thôi.

Không chỉ như vậy, nếu chúng ta dùng kéo cắt vòng giấy này theo đường chính giữa trong vòng, vòng giấy không thể bị chia làm đôi mà lại thành một vòng giấy dài hơn. Nếu tiếp tục cắt theo đường chính giữa như vậy thì sẽ tạo thành hai vòng giấy lồng vào nhau. Điều này quả là kỳ diệu, bạn cứ thử mà xem. Hiện tượng toán học kiểu này được gọi là “thác phức học”. Thác phức học là ngành toán học nghiên cứu tính chất hình học của hình không vì kéo dài hay gấp cong mà thay đổi. Giống như vòng Macbius chính là một ví dụ điển hình, điều này quả là khó lý giải trong cuộc sống thường nhật.

# Làm thế nào để nhanh chóng thu hẹp phạm vi?

Bạn hãy nghĩ tới một số tự nhiên bất kỳ trong phạm vi 1000, tôi sẽ hỏi bạn 10 câu hỏi, chỉ cần bạn trả lời “có” hoặc “không” theo đúng sự thực thì tôi có thể đoán ra được số bạn nghĩ trong đầu là bao nhiêu.

Có thể bạn không tin lắm, bởi vì trong 1000 số thì số nào cũng có khả năng nghĩ tới, dường như việc đoán số là không có mục đích, nếu không may mắn thì có đoán tới 500 lần cũng không đúng được; còn nếu may mắn thì đoán 10 lần cũng khó mà đoán ra nổi, vậy tại sao lại thông qua 10 câu hỏi là có thể đảm bảo đoán được số đang nghĩ nhỉ? Thì ra nhờ việc vận dụng một cách khéo léo phương pháp chia đôi sẽ giúp chúng ta nhanh chóng thu hẹp phạm vi mà chúng ta cần tìm kiếm.

Giả sử số mà bạn nghĩ là 872. Dưới đây chúng tôi sẽ hỏi bạn 10 câu hỏi để bạn trả lời.

1. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 500 phải không? (lấy số chia đôi 1000 là 500)

Đúng

2. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 750 phải không (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 250 tức là  $500 + 500/2 = 500 + 250$ )

Đúng

3. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 875 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 250 tức là  $750 + 250/2 = 750 + 125$ )

Không phải

4. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 812 có phải không? (lấy số lần trước hỏi trừ đi một nửa của 125 và trừ đi 0,5, tức là  $875 - 63$ )

Đúng

5. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 844 có phải không (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 63 và cộng thêm 0,5, tức là  $812 + 32$ )

Đúng

6. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 860 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 32, tức là  $844 + 16$ )

Đúng

7. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 868 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 16, tức là  $860 + 8$ )

Đúng

8. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 872 có phải không? (lấy số lần trước bạn hỏi cộng thêm một nửa của 8, tức là  $868 + 4$ )

Không phải

9. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 870 có phải không? (lấy số lần trước hỏi trừ đi một nửa của 4, tức là  $872 - 2$ )

Đúng

Đến đây có thể đoán ra số mà bạn nghĩ lớn hơn 870 nhưng nhỏ hơn 872 rồi, vậy chỉ có thể là một trong hai số 871 và 872.

Đã hỏi được 9 câu hỏi, lại hỏi thêm lần nữa, chúng ta có thể hỏi là số mà bạn nghĩ là 871 có phải không? (trên thực tế là số mà lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 2, tức là  $870 + 1$ ).

Bạn đương nhiên sẽ phải trả lời là không, vậy thì tôi có thể có được kết luận, số của bạn nghĩ là 872, vậy là hỏi bạn đúng 10 câu hỏi là đã có được đáp án rồi.

Cách làm này thực ra là cứ lấy 1000 liên tiếp chia cho 2, cứ lần lượt cộng thêm vào số lần trước bạn hỏi hoặc trừ đi số lần trước bạn hỏi (số cộng thêm hoặc số trừ đi khi gặp phải số lẻ thì phải cộng hoặc trừ đi 0,5) để làm số hỏi cho câu hỏi lần này. Chỉ cần bạn linh hoạt vận dụng phương pháp cộng hoặc trừ thì nhiều nhất chỉ cần hỏi 10 lần là nhất định bạn sẽ đoán ra được số người ta nghĩ là số bao nhiêu.

## Sự kỳ diệu của đường gấp khúc bông hoa là ở đâu?

Có thể bạn cũng đã từng chơi một đồ chơi trí tuệ như thế này : đồ chơi này do một bộ bánh răng cửa nhựa màu sắc tạo thành. Bánh răng cửa đều là hình vòng tròn, bên trên đương nhiên là có các răng cửa; điều khác biệt là răng cửa của bánh răng lớn nằm ở bên trong. Răng cửa của mấy bánh răng cửa nhỏ nằm ở bên ngoài, hơn nữa bên trong của bánh răng nhỏ còn có một số lỗ tròn nhỏ hoặc mấy cái lỗ hình dạng khác khác lớn.

Khi vẽ đường gấp khúc hình hoa, lấy tay trái giữ chặt bánh răng lớn để cho nó dính chặt trên mặt giấy, không để cho nó chuyển. Trong hình bánh răng lớn đặt một hình bánh răng nhỏ, lấy đầu bút cắm vào một cái lỗ nào đó trong hình bánh răng nhỏ rồi để cho hình bánh răng nhỏ chuyển động sát bên trong hình bánh răng lớn, lúc này, đầu bút sẽ vẽ lên rất nhiều hình hoa văn gấp khúc tuyệt đẹp trên giấy.

Như ở hình vẽ biểu thị, chúng ta thấy khi chúng ta dùng bút có nhiều màu khác nhau thì hoa văn sẽ càng đẹp hơn, giống như một bông hoa ngũ sắc đang nở rộ, vì vậy đường gấp khúc này được gọi là đường gấp khúc bông hoa, còn bộ bánh răng cửa vẽ lên hình gấp khúc bông hoa được gọi là bộ thước hình gấp khúc bông hoa (cũng giống như thước vẽ hình tròn được gọi là com-pa).

Vậy bạn có biết tại sao bộ thước hình gấp khúc bông hoa vẽ ra được những đường gấp khúc tinh xảo, đẹp đẽ như vậy không?

Bạn hãy đN số răng cửa trên những bánh răng lớn, nhỏ để vẽ đường gấp khúc. Hãy lấy tỷ số chia số răng cửa của những bánh răng lớn, nhỏ đó rồi đơn giản hoá thành phân số nhỏ nhất, mẫu số của phân số này chính là số tự nhiên của bánh răng cửa nhỏ, tương đương với số cánh hoa trong hình vẽ; còn tử số chính là số lần bánh răng nhỏ quanh xung quanh bánh răng lớn. Vì thế, khi nắm được phân số đơn giản hoá nhất này chúng ta sẽ biết được hình vẽ mà chúng ta vẽ ra là hình dạng gì.

Ngược lại, chúng ta cũng có thể giữ cho bánh răng nhỏ trong bánh răng lớn không động đậy, cắm đầu bút vào trong một cái lỗ nhỏ của bánh răng lớn, để cho răng cửa của bánh răng lớn và nhỏ cũng kết hợp chuyển động, như vậy cũng vẽ ra được các loại hình gấp khúc bông hoa.

Hơn nữa khi bạn dùng các bánh răng khác nhau và những cái lỗ kích thước khác nhau thì hình gấp khúc bông hoa cũng sẽ khác nhau, kiểu dáng sẽ vô cùng phong phú và kỳ diệu.



# Thất xảo bản được chơi như thế nào?

Thất xảo bản là một trò chơi đã có từ lâu đời của Trung Quốc. Đó là một trò chơi kỳ diệu, nó có thể xếp ghép với nhau thành hàng ngàn hàng vạn hình, chẳng hạn như tư thế của các loại động vật và con người. Nhưng Thất xảo bản ra đời từ khi nào và

Vậy thì chúng ta phải quay lại lịch sử hơn 1000 năm trước của Trung Quốc cổ đại. Thất xảo bản bắt nguồn từ một chiếc bàn có chân thấp có tên gọi là “yến kỷ”. Yến kỷ chính là chiếc bàn được dùng trong yến tiệc, kỷ chính là nghĩa chiếc bàn, kiểu bàn này tương đối thấp, nói chung dùng để khách ngồi. Điều thú vị là không phải chiếc bàn nào cũng có hình dạng giống nhau, chúng có kích thước nhất định, khi tách riêng ra thì mỗi chiếc bàn có thể sử dụng riêng biệt, nhưng khi khách đông thì có thể xếp một số chiếc bàn lại với nhau để ghép thành một chiếc bàn lớn.

Hơn nữa hình dạng của chiếc bàn được ghép thành cũng có thể thay đổi tùy theo nhu cầu, có thể lớn có thể nhỏ, rất là linh hoạt và khi đó nó rất được mọi người rất thích thú. Thất xảo bản ngày nay ở Trung Quốc chính là bắt nguồn từ chiếc bàn yến tiệc của thời cổ đại. Đến đời Tống, yến kỷ được cố định làm 7 chiếc, cũng gần tương tự như trò Thất xảo bản mà ngày nay người Trung Quốc chơi.

Thất xảo bản là do 5 hình tam giác (hai hình tam giác to như nhau, hai hình tam giác nhỏ như nhau, một hình tam giác trung bình), một hình vuông và 1 hình bình hành tạo thành. 7 phần của Thất xảo bản có thể ghép thành một hình vuông to, như hình vẽ biểu diễn. 7 chiếc bàn yến tiệc của thời cổ đại khi ghép lại với nhau cũng chính là một chiếc bàn vuông to như vậy. Điều đặc biệt của Thất xảo bản là ở chỗ nó không chỉ có thể ghép thành các kiểu hình khác nhau mà cùng một hình lại có thể dùng nhiều cách khác nhau để ghép thành.

Chúng ta thấy các cạnh của 7 phần của Thất xảo bản không phải là có độ dài một cách tùy ý, diện tích của hình tam giác trung bình vừa đúng bằng một nửa của hình tam giác lớn, diện tích hình tam giác nhỏ vừa đúng bằng một nửa hình tam giác trung bình; độ dài cạnh của hình vuông vừa đúng bằng một nửa của độ dài cạnh góc vuông của hình tam giác lớn; độ dài cạnh dài của hình bình hành bằng với cạnh góc vuông của hình tam giác vuông trung bình, độ dài cạnh ngắn của hình bình hành bằng với độ dài cạnh của hình vuông. Chính vì những độ dài cạnh đặc biệt có ý nghĩa này khiến cho khi ghép hình thất xảo bản sẽ rất dễ dàng trộn lẫn và mới có thể ghép thành các kiểu hình dạng khác nhau.

Mặc dù Thất xảo bản có thể ghép thành các hình khác nhau, nhưng có thể biết được diện tích lớn nhất của 7 miếng hình ghép này. Bạn có biết làm sao mà nhanh chóng tính ra được không? Bạn hãy nhìn hình vẽ ở trên, 7 miếng hình ghép này ghép thành một hình vuông, diện tích của nó tương đương với độ dài cạnh nhân độ dài cạnh, độ dài cạnh trong hình vẽ là 4, vậy cộng lại diện tích của 7 miếng hình ghép này bằng  $4 \times 4 = 16$ , đúng là rất đơn giản phải không bạn?

## Cửu liên hoàn kỳ diệu ở chỗ nào?

Cửu liên hoàn là một trò chơi thường gặp lưu truyền trong dân gian Trung Quốc, cũng là một trò chơi rất kỳ diệu được cả thế giới công nhận. Trong tiếng Anh trò chơi này của Trung Quốc được gọi là “Chinese King” có nghĩa là “Vua Trung Quốc”; Người Trung Quốc chơi Cửu liên hoàn bắt đầu từ khi nào cũng không có cách gì khảo chứng nữa, nhưng vào đời Minh, đời Thanh của Trung Quốc, Cửu liên hoàn là được ưa thích nhất.

Cách chơi Cửu liên hoàn như sau : có 9 vòng tròn, trên mỗi một vòng đều nổi một cái thẳng, mỗi một cái que đều xuyên qua vòng tròn sau, rồi lại xuyên qua 9 cái lỗ của một miếng gỗ. Do đoạn cuối của mỗi chiếc que đều được thắt nút cho nên chiếc que chỉ có thể di động lên trên xuống dưới trong cái lỗ nhỏ, mà không thể thò ra khỏi miếng gỗ. Ngoài ra còn có dính một chiếc thoa sợi dôi. Mục đích của trò chơi này là phải lần lượt dính được từng cái vòng một trong số 9 cái vòng này móc lên chiếc thoa hoặc gỡ được 9 chiếc vòng này từ trên chiếc thoa xuống. Để có thể dính được số vòng này lên hoặc gỡ được xuống phải làm mấy trăm cách vô cùng phức tạp nhưng lại rất thú vị.

Bây giờ chúng tôi sẽ giới thiệu những động tác cơ bản của việc dính vòng lên thoa. Trước tiên lấy một chiếc vòng từ phía dưới xuyên qua tâm thoa để dính móc vào đầu chiếc thoa. Bởi vì những chiếc vòng khác đều bị những vòng khác giữ chặt nên không thể dùng cách này. Nhưng nếu như lúc trước chúng ta có một chiếc vòng sát cạnh đã được đeo lên trên thoa, còn tất cả những chiếc vòng khác ở phía trước đều không ở trên thoa thì chỉ có cách tạm thời đưa chiếc vòng này đến phía trước đầu thoa để cho nó ra khỏi đầu thoa thì chiếc vòng sau có thể đeo lên được, tiếp đó lại đưa chiếc vòng trước trở lại vị trí.

Sau khi đã biết cách đeo vòng lên thoa và gỡ vòng xuống khỏi thoa, chúng ta thấy hai động tác này là ngược nhau : đổi ngược động tác đeo vòng lên thoa thì chính là động tác gỡ vòng ra khỏi thoa.

Như vậy nếu chỉ cần đeo vòng số 1 thì chỉ cần 1 bước. Nếu phải đeo vòng số 1, vòng số 2 thì trước tiên phải đeo vòng số 1 rồi mới đeo vòng số 2, tổng cộng là 2 bước. Nếu phải đeo vòng số 3 thì sau khi đeo vòng số 1, vòng số 2, phải gỡ vòng số 1 rồi đeo lên vòng số 3, cuối cùng lại đeo vòng số 1 lên, tổng cộng là 5 bước. Khi số vòng nhiều lên thì các bước càng phức tạp hơn. Người Trung Quốc có một câu về như thế này : “Nhất nhị nhất tam nhất nhị nhất, tho đầu song liên hạ đệ nhất, độc hoàn tại thoa thượng hậu hoàn”. 5 bước cuối cùng để đeo vòng lên thoa là một hai một ba một, cho nên năm bước đầu tiên để gỡ vòng là một ba một hai một

Nói chung, cứ mỗi 8 bước là một đơn nguyên động tác, trong đó 7 bước đầu nhất định phải là “một hai một ba một hai một”, còn nên “đeo lên” hay là “gỡ xuống” thì tùy theo tình thế mà quyết định, có nghĩa là vòng mà đang ở trên thoa thì nên “gỡ xuống”, vòng không ở trên thoa thì nên “đeo lên”. Động tác bước thứ 8 thì phải xem xét tình hình đầu thoa : khi hai vòng đang nổi với nhau thì nhất định phải gỡ vòng sau xuống; khi ở đầu thoa chỉ có duy nhất một vòng thì nhất định phải đeo vòng sau lên. Đây chính là toàn bộ sự kỳ diệu trong cách tính toán của Cửu liên hoàn.

Căn cứ theo ba câu về nói trên, luyện tập nhiều lần, bạn sẽ thấy gỡ xuống hoặc đeo lên 9 chiếc vòng này mặc dù có hơn 341 bước nhưng cũng không tốn mấy may sức lực.

## Bạn có biết về trò chơi ru-bíc không?

Ru-bíc là một đồ chơi thường gặp trong cuộc sống của chúng ta, nó là một đồ chơi trí tuệ được kiến trúc sư người Hungari có tên là Arron Rubik phát minh vào năm 1973. Chính bởi sự kỳ diệu trò ru-bíc mà chỉ trong vài năm ngắn ngủi nó đã làm điên đảo toàn thế giới, vì vậy mà tại thành phố Isen của Đức vào năm 1980, Arron Rubik đã được giải thưởng “giải phát minh trò chơi hấp dẫn nhất trong năm”.

Trước tiên chúng ta hãy xem ru-bíc có hình dạng như thế nào. Nó là một hình lập phương, trên 6 bề mặt của nó lần lượt được vẽ 6 loại màu sắc khác nhau, mỗi một mặt lại được chia thành 9 miếng vuông nhỏ, màu sắc của 9 miếng vuông nhỏ này lúc đầu là như nhau. Bên trong của hình lập phương có một trục chữ thập có kết cấu rất khéo léo, 26 linh kiện nhỏ tạo nên hình lập phương cũng không hoàn toàn giống nhau, mà được chia thành ba loại : miếng ở trung tâm, miếng ở bên cạnh và miếng ở góc, bất kể bạn lắp đặt hay là gỡ ra đều rất tiện, giá thành sản xuất sản phẩm cũng rất rẻ.

Trung tâm xoay của ru-bíc có một đầu nối sáu hướng, mỗi một đầu lần lượt nối kết với 6 miếng trung tâm, 8 miếng ở góc và 12 miếng ở bên cạnh. Chúng lần lượt được gắn vào trung tâm trục xoay, tạo thành một hình lập phương ru-bíc hoàn chỉnh. Lúc này, bạn có thể xoay chuyển bất kỳ quanh miếng trung tâm theo hàng dọc hoặc hàng ngang và sẽ xuất hiện các hình kỳ ảo khác nhau.

Theo như tính toán, tổng số lượng các hình có màu sắc khác nhau mà hình ru-bíc có thể biến hoá thành là :  $4,325 \times 10^{29}$ , một số lượng lớn như vậy - gấp khoảng 70 lần tổng dân số thế giới(6 tỷ), bạn thấy có vĩ đại không?

Cách chơi ru-bíc cực kỳ đơn giản, mỗi một động tác đều chỉ là xoay chuyển một mặt một góc  $90^0$  theo hướng thuận kim đồng hồ hoặc ngược kim đồng hồ, bất kỳ người nào cũng chỉ cần nhìn một cái là học được ngay, ngay cả một đứa trẻ 2, 3 tuổi cũng có thể tự nghịch được. Mặc dù như vậy, muốn sắp xếp một hình ru-bíc đã bị đảo lộn lung tung trở lại hình ban đầu của nó thì quả là một việc không đơn giản chút nào. Hiện nay người ta tìm ra số bước ít nhất để khôi phục lại hình ban đầu của ru-bíc là 52 bước, trong đó về mặt lý thuyết có người chứng minh rằng chỉ cần 23 bước là có thể khôi phục lại nguyên dạng ban đầu của một hình ru-bíc đã bị đảo lộn. Vậy là còn một khoảng cách lớn để chúng ta vượt qua.

Ru-bíc là một trò chơi trí tuệ cực kỳ có ý nghĩa khoa học, trong đó thể hiện ý nghĩa sâu sắc của “đại số tuyến tính” và “lý thuyết quần thể” về mặt toán học, hơn nữa nó còn có liên hệ bên trong với vấn đề vật lý lý thuyết. Ngày nay, mặc dù các trò chơi trí tuệ ngày càng nhiều nhưng trò ru-bíc vẫn có vô số người yêu thích nó trên toàn thế giới.

## **Bạn có biết về trò chơi “Hoa dung đạo” của Trung Quốc không?**

“Hoa dung đạo” là một trò chơi trí tuệ của Trung Quốc, nó được các nghệ nhân dân gian Trung Quốc sáng tạo căn cứ từ câu chuyện “Tam quốc diễn nghĩa” của Trung Quốc.

Đồ chơi này như sau : trong một khung hình chữ nhật (tương đương với bàn cờ của đồ chơi) có đặt 10 quân cờ to nhỏ khác nhau, như hình vẽ thể hiện. Trên bề mặt quân cờ đều có tên, trong đó Tào Tháo là 1 quân cờ lớn nhất, 5 quân cờ kích cỡ trung bình lần lượt là thuộc hạ của Lưu Bị tức “ngũ hổ tướng” là : Quan Vũ, Trương Phi, Triệu Vân, Mã Siêu và Hoàng Trung, thêm nữa là 4 quân cờ nhỏ là những lính quen.

Sự sắp đặt của các quân cờ được thể hiện như trong hình vẽ, Tào Tháo bị vây tầng tầng lớp lớp, nhưng trong bàn cờ vẫn còn khe hở giữa hai ô nhỏ được coi như là lối thoát của Hoa dung đạo, vì vậy Tào Tháo vẫn còn một tia sống sót, ông ta có thể tận dụng cơ hội nhỏ bé này và có cơ hội là sẽ trốn ra. Vấn đề là làm thế nào để cho Tào Tháo nhanh chóng thoát ra ngoài được?

Trò chơi này xem ra rất đơn giản nhưng thực tế lại không phải như vậy. Đối với những người mới biết chơi trò này thì chỉ cần để Tào Tháo thoát được ra ngoài là coi như đã thắng rồi, có thể không cần suy nghĩ là đi mất bao nhiêu nước. Nhưng với những người đã chơi thành thạo thì cần phải nghiên cứu xem làm thế nào để số bước đi là ít nhất mà lại cho Tào Tháo thoát ra. Điều thú vị là Tào Tháo sở dĩ có thể thoát được ra ngoài hoàn toàn là do nguyên nhân Quan Vũ có ý nhường đường bởi vì chỉ cần Quan Vũ đứng ngang bất động ở chính giữa thì bất kể Tào Tháo có muốn bay cũng không thể bay được. Trò chơi này vì thế có tên là “Hoa dung đạo” cũng chính là xuất phát từ nguyên nhân này.

Trò chơi này rất đơn giản và dễ làm, lại rất sinh động và thú vị vì thế cũng nhanh chóng được truyền đi nhiều nước trên thế giới. Hiện nay trên thế giới có ghi nhận số bước đi là 81 bước, có rất nhiều người vẫn đang tìm xem số bước liệu có thể ít đi nữa không thậm chí còn nhờ cả máy vi tính tính toán nhưng vẫn chưa có kết quả tốt hơn.

## Bạn có biết góc nhìn một độ lớn

Góc nhìn là gì? Khi chúng ta quan sát một vật thể, góc độ tạo bởi hai đường trực tiếp từ mắt chúng ta tới vật thể được quan sát gọi là góc nhìn. Ví dụ, chúng ta lấy một cái đĩa chiếu lên mặt trăng trên trời, sao cho mặt trăng có kích thước giống với chiếc đĩa trong tay chúng ta, góc  $\mu$  trong hình vẽ chính là góc nhìn.

Để đưa ra một ví dụ rõ nét nhất, giúp mọi người hiểu rõ về góc nhìn 1 độ rất cuộc lớn như thế nào, chúng ta hãy thử tính toán xem một người có chiều cao trung bình (1,7m) cần đi cách ta bao xa để góc nhìn của chúng ta đối với anh ta là 1 độ?

Dùng ngôn ngữ hình học để nói, tức là chúng ta cần tính ra bán kính của một vòng tròn, sao cho dây cung của góc tâm 1 độ dài vừa đúng 1,7m. Nói một cách chặt chẽ thì, 1,7m phải là đường thẳng chứ không phải là đường vòng cung. Nhưng đối với góc độ nhỏ như thế này, sự khác biệt giữa đường vòng cung và đường thẳng là không lớn.

Ví dụ chiều dài đường vòng cung của 1 độ tương đương với 1,7m; thế thì độ dài chu vi của 360 độ là  $1,7m \times 360 = 610m$ , bán kính là  $1/2p$  của chu vi, nếu  $p$  tính theo  $22/7$ , thì bán kính sẽ là :  $610 \div 44/7 = 98m$ . Xem ra người này bắt buộc phải bước ra xa cách ta khoảng 100m, thì góc nhìn của chúng ta đối với anh ta mới tương đương với 1 độ.

Cũng như thế, chẳng mấy khó khăn gì, chúng ta có thể tính ra thước đo dài 1m, khi góc nhìn về nó là 1 độ thì sẽ cách chúng ta là  $360 \div 44/7 = 57m$ ; đối với thước đo dài 1cm thì khoảng cách này khoảng 57cm; đối với vật thể lớn 1000m thì khoảng cách có lẽ là 57000m. Tóm lại, mọi vật thể được nhìn ở khoảng cách tương đương 57 lần chiều dài của nó thì góc nhìn sẽ là 1 độ. Nếu bạn nhớ con số 57 này thì có thể nhanh chóng và giản đơn làm ra mọi bài toán có liên quan đến góc độ của vật thể.

Ví dụ : Để cho cái đĩa có đường kính 25cm khi nhìn lên có góc nhìn tương đồng với mặt trăng trên trời thì nên đưa nó cách ra xa khoảng bao nhiêu?

Đáp án là  $0,25 \times 57 \times 2 = 28.5m$ . Bởi vì  $0,25 \times 57$  là khoảng cách giữa người và đĩa khi người nhìn đĩa ở góc nhìn 1 độ. Thế nhưng góc nhìn của mặt trăng chỉ là nửa độ, vì vậy, chiếc đĩa cần dịch ra xa thêm khoảng cách gấp đôi, thì góc nhìn của chúng ta đối với đĩa mới là nửa độ và chiếc đĩa sẽ che vừa kín mặt trăng.

Như vậy có thể thấy, khi chúng ta tay cầm đĩa hướng lên mặt trăng trên trời với khoảng cách phải gần 30m thì cái đĩa mới có thể che lấp hoàn toàn mặt trăng. Kết luận này lần đầu nghe thấy khiến cho người ta khó tin được, nhưng nó chính là sự thực chính ảo giác của chúng ta đánh lừa chúng ta.

## **Bạn có thể tính toán cho rõ ràng khoản số sách lằng nhằng sau không?**

Một người đàn ông đến một cửa hàng ba toong mua một chiếc ba toong giá 30 đồng. Ông ta lấy ra một tờ giấy bạc 50 đồng, chủ cửa hàng không trả lại được tiền bên sang cửa hàng bên cạnh để đổi. Sau khi đổi được tiền lẻ, ông ta trả cho khách 20 đồng, khách bèn đi về. Được một lúc sau, chủ cửa hàng bên cạnh hốt hải chạy sang nói, không được rồi! 50 đồng lúc này là tờ bạc giả, thế là chủ cửa hàng ba toong đành phải trả lại 50 đồng.

Sau sự việc này, chủ cửa hàng ba toong cảm thấy rất buồn phiền và tức giận. Ông ta tính toán một lúc, trả lại khách 20 đồng, lại bồi thường cho chủ cửa hàng bên cạnh 50 đồng, tất cả tổn thất 70 đồng. Nhưng lại nghĩ thêm, khách kiếm lợi được 50 đồng, chủ cửa hàng bên cạnh không tổn thất cũng không lợi lộc gì. Thế thì 20 đồng chênh lệch kia đi đâu mất? Kỳ thực khi chủ cửa hàng ba toong đổi tiền lẻ với chủ cửa hàng nhỏ bên cạnh, chủ cửa hàng ba toong đưa cho ông kia tờ bạc giả 50 đồng, ông kia lại trả lại tiền lẻ có giá trị 50 đồng. Sau đó ông ta lại trả lại cho chủ cửa hàng ba toong tờ bạc giả 50 đồng, chủ cửa hàng ba toong trả lại ông ta 50 đồng. Cho nên chủ cửa hàng ba toong và chủ cửa hàng nhỏ bên cạnh coi như chưa có phát sinh giao dịch kinh tế.

Lại xem xem giao dịch kinh tế giữa chủ cửa hàng ba toong và khách hàng : Khách đưa cho ông ta 50 đồng tiền giả, mà ông ta đưa cho khách một chiếc ba toong trị giá 30 đồng và 20 đồng tiền thừa trả lại, tổng cộng là 50 đồng. Cho nên chủ cửa hàng ba toong đã tổn thất 50 đồng, mà không phải là 70 đồng.

Có thể thấy là ông chủ cửa hàng ba toong đã tự làm cho mình trở nên hồ đồ. Câu chuyện nhỏ này cho chúng ta thấy, tính số sách nên tính từng khoản một, từng bước một, kết quả mới không bị sai, không được suy diễn linh tinh, nếu như vậy cuối cùng không những làm cho mình trở thành thêm hồ đồ mà số sách cũng càng tính càng không đúng.

## Bạn có biết mẹo đoán số không?

Trong tiểu thuyết và hí kịch của Trung Quốc có không ít những câu chuyện rất hay, có lẽ bạn cũng nghe qua rồi.

Ví dụ, Ô bạch nương tử trúng vào tròng của hoà thượng Pháp Hải, uống nhầm rượu hùng hoàng, kết quả lộ nguyên hình một con mãng xà lớn, khiến cho Hứa Tiên sợ chết ngất. Hồ li tinh biến thành hoàng hậu Đát Kỷ, đưa hết thảy đồ đệ con cháu của nó vào cung dự tiệc. Tuy trông người tiên phong đạo cốt, nhưng sau khi mấy chén rượu nự vào trong bụng thì cũng khiến cho đuôi hồ li lộ ra.

Khiến cho những sự vật tàng ẩn cuối cùng lộ nguyên hình, chính là việc đoán số này. Trước tiên mời mọi người nhắm lấy một con số bí mật chỉ mình biết, số này có thể là số tự nhiên 1 số hạng, 2 số hạng, hoặc 3 số hạng.

Sau đó nhân số này với 1667. Sau khi nhân xong không cần bạn phải nói ra toàn bộ tích số, mà chỉ cần để lộ ra mấy số cuối của tích. Nếu số mà bạn bí mật nhắm là số 1 số hạng, thì bạn để lộ số hạng cuối của tích; nếu là 2 số hạng bạn hãy để lộ ra hai số hạng cuối cùng; cứ thế suy ra.

Người đoán số biết được những số hạng mà bạn để lộ ra, có thể chỉ trong vài giây lập tức đoán ra được con số bí mật của bạn. Hơn nữa bạn hãy kiểm tra anh ta thêm vài lần nữa xem có phải anh ta đều đoán đúng hết không?

Bạn có biết vấn đề trong đó là gì không? Vốn dĩ, 1667 nhân 3 vừa đúng bằng 5

Cho nên lấy bất kỳ một số hạng, hai số hạng, ba số hạng nhân lên với 5001, thì số hạng cuối của tích có thể như hình với bóng mà phản ánh ra con số đó. Cái mẹo của người đoán số là lấy đuôi số mà bạn cho biết nhân với 3. Đồng thời, bạn báo bao nhiêu số hạng thì anh ta sẽ lấy bấy nhiêu số hạng ở đuôi của tích. Ví dụ, bạn cho anh ấy biết số cuối là 56, thế thì  $56 \times 3 = 168$ , lấy hai số cuối, thì 68 chính là số bí mật của bạn.

Kỳ thực, biết được cái mẹo đoán số, thì số mà chúng ta chọn không nhất định là 1667. Nếu số phải đoán chỉ là số tự nhiên 1 số hạng hoặc 2 số hạng, thì thay dùng 567, 1867, ..., đều có thể được, chỉ cần 2 số cuối là 67, bảo đảm sau khi nhân lên với 3, được kết quả hai số cuối của tích là 01, thì có thể đoán ra được số có hai số hạng đó là bao nhiêu.

Chẳng qua, 1667 là con số hơn một chút trong thừa số đồng loại, bởi vì nó ngấm biểu thị chúng ta, có thể kéo dài bất kỳ loại số này, ví dụ 16667 v.v..., như thế có thể đoán được số có số hạng nhiều hơn nữa, khiến cho trò chơi đoán số thú vị hơn. Bởi vậy, có người gọi 1667 là cái gương chữ số, cái tên này có vẻ mới mẻ, nhưng chớ có quên, 1667 phải nhân với 3 mới có thể làm cho cả con số hiện hình được, thế thì 3 có thể tính là một tia sáng chiếu trên chiếc gương.



## Shê-lốc-hôm làm thế nào để tính ra số trẻ con?>

Bạn đã từng nghe đến tên thám tử Shê lốc hôm chưa? Ông là một anh hùng đã từng phá được rất nhiều vụ án phức tạp, trở thành nhà thám tử nổi tiếng thế giới.

Một hôm, Shê-lốc-hôm tới chơi nhà một người bạn, hai người đứng trò chuyện bên cửa sổ phòng khách, từ trong sân vườn vọng lại tiếng cười đùa của một đám trẻ. Bất giác, Shê-lốc-hôm hỏi : Nhà anh có bao nhiêu trẻ con?

Người bạn trả lời : Những đứa trẻ kia không phải đều là con tôi. Đó là trẻ con của 4 nhà : em trai, em gái, nhà chú và nhà tôi. Nhưng con nhà tôi nhiều nhất, rồi đến của em trai, kế đó của em gái, nhà chú tôi ít nhất. Chúng không đủ để chia thành hai đội bóng, mỗi đội 9 người. Nhưng tích của số trẻ con của cả bốn nhà vừa đúng bằng số nhà chúng tôi, mà số này anh cũng biết.

Shê-lốc-hôm nghe xong hết sức vui mừng, ông nói : để tôi thử tính ra số trẻ con của mỗi nhà xem sao. Qua một lúc tính toán, Shê-lốc-hôm lại hỏi : Để giải câu hỏi này, số liệu đã biết còn chưa đủ. Có thể cho tôi biết, con nhà chú anh là 1 đứa phải không? Hay là không chỉ 1 đứa?

Người bạn trả lời, nhưng nội dung trả lời chúng ta không được biết.

Shê-lốc-hôm quả nhiên tính ra đáp án đúng. Bạn có thể tính ra số biển nhà và số trẻ con mỗi nhà không?

Chúng ta thử xem Shê-lốc-hôm đã làm thế nào.

Căn cứ vào điều kiện người bạn đã đưa ra, chúng ta biết :

(1) Do để lập thành hai đội bóng với mỗi đội 9 người, như vậy, tổng số trẻ con sẽ ít hơn 18.

(2) Số trẻ con của bốn nhà không giống nhau. Giả dụ nhà chú có 3 người con, thì nhà em gái có ít nhất 4 người con, nhà em trai có ít nhất 5 người con, nhà Hoa Sinh có ít nhất 6 người con, thế thì tổng số trẻ con bốn nhà có  $3+4+5+6 = 18$  đứa, mâu thuẫn với (1), cho nên số trẻ con của nhà chú chỉ có thể là 1 đứa hoặc 2 đứa.

(3) Nếu nhà chú có 2 đứa trẻ, thế thì số trẻ con của các nhà có thể là bảy tình huống dưới đây :  
Từ phân tích (3) và (4) có thể biết số biển nhà chắc chắn là 120. Cho nên tình huống có thể về số trẻ con của bốn nhà là ba tình huống sau : 2,3,4,5 1,3,5,8 1,4,5,6.

Nếu số trẻ con nhà chú chỉ có 1 đứa, thế thì có hai đáp án, lời giải đã không thể xác định. Hiện nay Shê-lốc-hôm đã có thể trả lời không sai một chút nào, số trẻ con bốn nhà nhất định là nhà chú 2 đứa, nhà em gái 3 đứa, nhà em trai 4 đứa, nhà người bạn 5 đứa.

Có thể thấy trình độ toán học của Shê-lốc-hôm cũng khá đấy chứ!

## Người thông minh vì sao có thể chia bò tròn số?

Ngày xưa cổ một ông già người Ấn Độ trước khi chết muốn chia 19 con bò cho 3 người con trai. Phương pháp chia bò rất đặc biệt, di chúc của ông viết thế này : tổng cộng là 19 con bò, chia cho anh cả  $1/2$  tổng số bò; chia cho anh hai  $1/4$  của tổng số bò, chia cho anh thứ ba  $1/5$  của tổng số bò. Nội dung di chúc của ông phải được thi hành. Nhưng đối với người Ấn Độ cổ, bò được coi như thần linh, không được giết, chỉ có thể chia cả con, thế thì với 19 con bò nên chia thế nào đây? Điều này thật khó cho 3 người con trai.

Ba người con trai quyết định hỏi ý kiến quan toà, nhưng quan toà cũng không có biện pháp, ông đành nói : Toà án khó xử vụ việc gia đình, các anh hãy trở về thương lượng giải quyết đi!

Thế rồi sau đó, sự việc đến tai một người thông minh, người thông minh đã giúp họ giải quyết được vấn đề khó khăn này.

Người thông minh nói với ba anh em : tôi có 1 con bò thêm vào cho các anh, chia cho các anh xong thì trả lại cho tôi. Quả nhiên sau khi 19 con bò biến thành 20 con thì rất dễ chia. Người anh cả được chia  $1/2$  của 20 con, tức là được 10 con; anh hai được chia  $1/4$  của 20 con, tức là được 5 con; anh thứ 3 được chia

1/5 của 20 con, được 4 con.  $20 - 10 - 5 - 4 = 1$ , còn lại 1 con bò trả lại cho người thông minh. Sau khi chia xong, người thông minh vẫn dắt con bò của mình trở về, mọi người đều khen anh ta có phương pháp hay.

Nhưng có người nói, nếu người cha để lại 15 con, lại qui định anh cả được 1/8, thế thì người thông minh chẳng phải là kiếm lời được một con bò sao?

Chúng ta tính toán một chút :  $15 + 1 = 16$  con; người anh cả được 1/2 của 16 là 8 con; anh thứ hai được 1/4 của 16 con là 4 con; anh thứ ba được 1/8 của 16 con là 2 con.  $16 - 8 - 4 - 2 = 2$ , như vậy người thông minh dắt 2 con bò về, quả thật kiếm thêm được một con b

Người này hỏi rất có lý. Vấn đề quan trọng khi chia bò tỷ lệ số bò cho ba anh em phải đúng theo di chúc của người cha, .  $10 : 5 : 4 = 20 \times 1/2 : 20 \times 1/4 : 20 \times 1/5$ .

Mà 20 là bội số nhỏ nhất của 2,4,5 ; tỉ lệ tròn số  $10 : 5 : 4$ , vừa đủ để có thể chia tròn số 19, đây mới là diệu kế trong đó.

Nếu di chúc của người cha là anh cả chia 1/2, anh hai chia 1/4, anh ba chia 1/8, thế thì tỉ lệ số bò mà ba anh em được là  $4 : 2 : 1 = 8 \times 1/2 : 8 \times 1/4 : 8 \times 1/8$ , lúc đó người cha không thể để lại 15 con được, ông sẽ để lại 14 con. Bởi vì  $4 + 2 + 1 = 7$ . Số 14 là 2 lần 7, như vậy cũng không xảy ra chuyện người thông minh kiếm lời được một con bò nữa.

## Làm sao để lấy được vòng bạc?

Ba-Y là kẻ nhỏ nhen nổi tiếng. Ông ta thuê La-đin làm công một tuần (7 ngày), sau đó ông ta lấy ra một chuỗi vòng bạc có 7 chiếc vòng nhỏ móc xích với nhau mà nói với La-đin : mỗi ngày sẽ trả công cho anh bằng một chiếc vòng bạc nhỏ. “Kẻ hà tiện cũng chịu đưa ra tiền công giá trị thế này ư?” La-đin có chút nghi ngờ.

Sự rộng rãi của Ba-Y tất nhiên là có điều kiện, ông ta nói : Chuỗi vòng bạc này chiếc nọ lồng vào chiếc kia, anh chỉ được bứt ra một chiếc vòng trong đó, phải nghĩ cách làm sao mỗi ngày lấy được một vòng, nếu anh không làm được thì coi như công toi. La-đin cảm thấy rất khó chịu nhưng anh ta vẫn ở lại thử xem sao.

La-đin làm xong ngày thứ nhất, đã đến lúc đi một chiếc vòng bạc nhỏ rồi. Nhưng nên bứt chiếc vòng thứ mấy trước, mới có thể đảm bảo về sau mỗi ngày lấy đi được một vòng? La-đin quyết định tìm A-pa-tin nhờ giúp, A-pa-tin nói : Anh nên bứt chiếc vòng thứ 3 trước để lấy tiền công của ngày thứ nhất. La-đin làm theo lời của A-pa-tin bứt lấy đi chiếc vòng thứ ba.

Buổi tối ngày thứ hai, sau khi làm xong việc, La-đin mang chiếc vòng đơn đến chỗ Ba-Y đổi lấy hai vòng. Buổi tối ngày thứ ba, La-đin lại lấy lại chiếc vòng đơn đó về. Bốn ngày sau đó La-đin làm theo lời của A-pa-tin, chia thành bảy ngày mà lấy đi bảy chiếc vòng. Anh đã lấy vòng như thế này :

Ngày thứ tư : một vòng đơn, hai vòng dính liền đổi lấy bốn vòng dính liền

Ngày thứ năm : lấy thêm một vòng đơn

Ngày thứ sáu : một vòng đơn đổi lấy hai vòng dính liền

Ngày thứ bảy : lấy nốt vòng đơn còn lại

Tham lam như Ba-Y cũng đành mở to mắt mà nhìn La-đin lấy đi cả vòng bạc, A-pa-tin thông minh lại thắng.

Vấn đề này trong toán học gọi là vấn đề phân chia trong hình học, khéo lấy vòng đơn là vấn đề đơn giản nhất trong phân chia hình học.

## Lấy đồng xu có mẹo không?

Có một đề ra trò chơi khéo léo lấy đồng xu như thế này :

Trên bàn để 15 đồng xu, hai người chơi lần lượt lấy đi một số đồng xu. Quy định là mỗi người mỗi lần lấy đi ít nhất một, nhiều nhất 5 đồng, ai lấy được đồng xu cuối cùng người đó thắng. Có cách nào chắc chắn thắng không? Nếu có, thì cách đó như thế nào?

Mẹo lấy đồng xu là như thế này, tuy quy tắc trò chơi không hoàn toàn như nhau, thông thường mà nói là hai người chơi, mỗi người tham gia lần lượt lấy đi một số đồng xu, ai lấy đi đồng xu cuối cùng (hoặc nhiều đồng) người đó thắng, hoặc ai lấy đến đồng xu cuối cùng người đó thua. Giống như vấn đề này, sử dụng phép suy đảo có thể giúp bạn tìm ra được chiến lược hay nhất.

Ý nghĩa của phép suy đảo là lí luận suy từ sau ra trước, hoặc là nói bước cuối cùng suy ra bước đầu tiên. Lấy đề bài trên làm ví dụ, sử dụng suy đảo phân tích như sau :

Nếu bạn muốn thắng, đồng xu cuối cùng do bạn lấy, hơn nữa số đồng xu trên bàn không vượt quá 5 đồng, lúc này bạn có thể lấy đi một lần tất cả số đồng xu trên bàn, trở thành người chiến thắng. Từ trạng thái ở điểm cuối này suy lên trước, đối thủ của bạn trước lần lấy đồng xu cuối cùng thì trên bàn, bạn nên để lại mấy đồng xu cho anh ta thì thì

Trên bàn chỉ nên để lại cho anh ta 6 đồng, nhiều hơn không được mà ít hơn cũng không được. Lần này, bất luận anh ta lấy mấy đồng (từ 1 đến 5 đồng), trên bàn đều còn thừa lại từ 1 đến 5 đồng. Thắng lợi nhất định sẽ thuộc về bạn. Cho nên đến phiên mình lấy bạn nên nghĩ cách lấy số xu sao cho còn để lại cho đối thủ 6 đồng, thế nhưng làm thế nào để chỉ còn lại 6 đồng xu, cần phải suy lên trước thêm một bước nữa. Dễ thấy, nếu bạn để lại đối thủ 12 đồng trước, thì bất luận anh ta lấy đi bao nhiêu (từ 1 đến 5), bạn đều có thể để lại cho anh ta 6 đồng xu. Điều này thật dễ dàng, chỉ cần bạn đi trước, và lấy đi 3 đồng xu là được rồi.

Vậy nếu trên bàn không phải chỉ 15 đồng, mà là 100 đồng, 150 đồng, thì số bước suy đảo cần thiết sẽ rất nhiều? Thực tế không cần phải suy đảo mãi, bạn chỉ tính sao để số đồng xu để lại cho đối thủ là bội số chẵn của 6, thì bạn nhất định sẽ thắng. Nếu trên bàn đặt 100 đồng xu,  $100 : 6 = 16$  dư 4, bạn muốn thắng thì bạn nên lấy đi trước 4 đồng, rồi lần lượt để lại cho đối thủ 96, 90, 84,..., 12, 6 đồng, bạn sẽ chiến thắng. Nếu trên bàn để 150 đồng,  $150 : 6 = 25$ , không có số dư, bạn muốn thắng thì nên để đối thủ đi trước, rồi lần lượt để lại cho đối thủ 150, 144, 138,..., 12, 6 đồng, bạn nhất định thắng.

Đây chính là bí quyết dùng phép suy đảo để lấy đồng xu, bây giờ bạn có thể thử chơi với các bạn khác và dùng phương pháp lấy mẹo đồng xu này.

## Lễ duyệt binh đã gây ra vấn đề gì?

Thế kỷ 18, Quốc vương Prussia châu Âu muốn cử hành một lễ duyệt binh. Ông muốn chọn ra một đội binh hình vuông gồm 36 sỹ quan, làm đội dẫn tiên phong cho lễ duyệt binh.

Prussia lúc đó có 6 đội quân (ví dụ như đội kỵ binh, đội bắn cung...). Quốc vương yêu cầu chọn ra từ mỗi đội 6 sỹ quan không cùng cấp bậc, mỗi cấp bậc một người, tổng cộng có 36 người. 6 cấp bậc không giống nhau là : thiếu úy, trung úy thượng úy, thiếu tá, trung tá, thượng tá. Sau đó ông yêu cầu 36 sỹ quan này xếp thành một hình vuông 6 hàng dọc và 6 hàng ngang, sao cho mỗi hàng dọc, mỗi hàng ngang đều có đủ đại diện các đội quân, các cấp bậc.

Lệnh của quốc vương ban xuống, làm quan tư lệnh cuống lên, ông triệu tập 36 sỹ quan, theo lời nhà vua lập tức bắt đầu sắp xếp đội ngũ hình vuông. Nhưng xếp trái xếp phải khiến cho 36 sỹ quan mệt mỏi người mà vẫn chưa xếp ra được đội ngũ hình vuông theo yêu cầu của Quốc vương.

Không có cách nào, quan tư lệnh đành phải đi hỏi nhà toán học nổi tiếng O-le .

Thói quen nghiên cứu vấn đề của nhà toán học vẫn thường là từ đơn giản đến phức tạp, từ dễ đến khó. Nhà toán học O-le bắt tay nghiên cứu đội ngũ hình vuông 4 hàng dọc 4 hàng ngang do 16 sỹ quan hợp thành, mỗi hàng, mỗi cột đều đủ các đại diện. Ông phát hiện có thể xếp được đội ngũ hình vuông 4 x 4 này. Tiếp đó, O-le lại xếp ra một đội ngũ hình vuông 5 dọc 5 ngang do 25 sỹ quan hợp thành. Ông rất tin tưởng tiếp tục nghiên cứu, muốn giải quyết đội ngũ hình vuông 6 dọc 6 ngang do 36 sỹ quan hợp thành. Nhưng dù cố gắng thế nào ông đều không tìm ra phương pháp giải bài toán này.

Một năm trước khi nhà toán học O-le qua đời, ông đã viết một cuốn luận văn, đưa vấn đề đội ngũ hình vuông này thành câu hỏi toán học. Ông cho rằng, hình vuông 6 hàng 6 cột này không thể xếp ra được; ông muốn tìm và chứng minh, đội ngũ hình vuông do bao nhiêu người hợp thành mới có thể xếp ra được với đủ đại diện, cấp bậc ở mỗi hàng, mỗi cột, đội ngũ hình vuông do bao nhiêu người hợp thành thì không thể xếp ra được với điều kiện như vậy. Nhưng quy luật này O-le vẫn không tìm ra được.

Sau đó, người ta gọi hình vuông này là hình vuông O-le. Lại thêm, do khi xếp hình vuông O-le, ông dùng phiên âm chữ la tinh, cho nên cũng gọi là hình vuông la tinh.

Trong một hai trăm năm sau đó, các nhà toán học lại tiếp tục phát hiện, hình vuông la tinh 7 dọc 7 ngang và 8 dọc 8 ngang có tồn tại. Lại thêm một bước suy đoán, hình vuông la tinh của số lẻ đều có thể xếp ra được, nhưng hình vuông la tinh của số chẵn (số chỉ là bội số của 2, nhưng không phải là bội số của 4 như 6, 10, 14...) là không tồn tại. Nhưng sự suy đoán này đã bị lật đổ trong thời hiện đại, bởi vì các nhà toán học đã tiếp tục xếp được hình vuông O-le của 10, 14 và 22, 26. Cho đến nay, chỉ có hình vuông O-le cấp 2 và cấp 6 là chưa xếp ra được.

## Sói, Dê, rau bắp cải qua sông thế nào?

Câu hỏi thế này : có một người dắt một con sói, một con dê và mang theo một chiếc bắp cải đến bên bờ sông (chúng ta giả thiết sói không ăn thịt người). Bên sông vừa may có một chiếc thuyền nhỏ trống, khi qua sông, thuyền rất nhỏ chỉ cho phép người chủ và thêm một vật nữa, nếu mang theo hai vật lên thuyền, thuyền sẽ chìm. Mặt khác, nếu không có ai trông quản thì sói sẽ ăn thịt dê, dê sẽ ăn bắp cải, cho nên sói và dê, dê và bắp cải trong lúc người chủ không có mặt thì không thể để chúng cùng với nhau được. Hỏi người chủ nên áp dụng phương án qua sông nào mới có thể mang sói, dê, bắp cải an toàn sang đến bờ bên kia?

Câu hỏi này gọi là Câu hỏi sói, dê, bắp cải, là câu hỏi trí tuệ cổ xưa được lưu truyền rất rộng rãi. Nó xuất phát từ cuốn sách ích trí dê của một nhà thần học Anh quốc. Ông cũng là một nhà giáo, về phương diện logic học, thần học, toán học, thiên văn học ông đều có rất nhiều tác phẩm nổi tiếng.

Đáp án chính xác của câu hỏi này như sau : Người chủ đưa dê qua sông trước, bởi vì sói không ăn bắp cải; sau đó đi thuyền không trở lại. Lần thứ 2 đưa sói qua sông, đến bờ bên kia, sau khi thả sói xuống người chủ lại mang dê trở lại bên này. Bỏ dê xuống xong, ông ta bèn đem bắp cải sang sông; sau đó mang thuyền không trở lại, lần thứ tư đem dê sang. Lần này, người chủ đem được cả sói, dê, bắp cải qua sông, có thể tiếp tục hành trình.

Đây quả là một câu hỏi hết sức thú vị, đúng không? Nếu bạn không xét đến vấn đề quay trở lại và mang theo một vật thì có lẽ bạn không thể giải ra được câu đố này. Đây chính là mấu chốt để giải câu hỏi này. Khi người chủ qua sông lần 1, bắt buộc phải mang dê theo, bởi vì sói và bắp cải có thể ở cùng nhau, không nguy hiểm gì; lần thứ 2 người chủ mang sói sang, sói lên bờ nếu không mang dê trở lại thì sói sẽ ăn thịt dê, cho nên người chủ phải mang dê trở lại; lần thứ 3 người chủ mang bắp cải sang sông, khiến cho bờ sông bên kia có sói và bắp cải trong tình trạng an toàn; lần cuối cùng mang dê qua sông; ba vật đã được mang sang bờ sông bên kia như thế, mà không có tổn thất gì.

Kỳ thực, câu đố này còn có một cách giải khác, là những độc giả thông minh, các bạn có nghĩ ra không? Đó là người chủ khi qua sông lần 2 mang bắp cải qua, đổi vị trí với sói một chút. Do sói và bắp cải đối với dê mà nói, có vị trí giống nhau (một loại ăn dê, một loại dê ăn), cho nên mới có phương án thứ 2. Câu đố dê, sói và bắp cải có hai phương án giải bạn đều biết rồi.

Nếu người chủ phải mang nhiều vật hơn, thế thì khi phân tích câu đố này sẽ phức tạp hơn rất nhiều.

## **Trong tình huống không có bất kỳ một thiết bị đo nào trong tay, bạn có thể đoán ra khoảng cách giữa bạn và người đi trên bờ bên kia?**

Có một câu hỏi như thế này : Có một người đi dọc theo bờ bên kia sông, chúng ta có thể thấy rõ được bước đi của anh ta. Bây giờ muốn bạn đứng ở bờ bên này để đo được khoảng cách giữa hai người (giá trị gần đúng cũng được), mà trong tay không có bất kỳ một thước đo nào, bạn có làm được không?

Bạn tuy không có thiết bị đo, nhưng có tay và mắt, thế đã đủ rồi.

Đưa thẳng cánh tay của bạn hướng về phía người đi bộ ở bờ bên kia, giả định người đó đi theo hướng tay phải của bạn, nhắm mắt trái lại, chỉ dùng một mắt bên phải, ngược lại thì dùng mắt trái, nhìn qua đầu ngón tay cái giơ lên, đúng lúc người kia đi vào chỗ bị ngón tay cái che mắt, lập tức nhắm con mắt vừa nhìn theo ngón cái lại, mở con mắt bên kia ra, bạn sẽ thấy người kia dường như bước lùi lại một đoạn; lúc này cần chú ý đếm số bước mà người đó đi, đợi đến khi anh ta bước vào chỗ bị ngón cái che mắt lần thứ hai, bạn có thể dùng các số liệu có giá trị tương đối để đo của khoảng cách giữa bạn và anh ta.

Bây giờ nói rõ một chút làm thế nào để dùng những số liệu này? Giả định A và B là hai con mắt của bạn, M là điểm dựng lên của ngón tay mà cánh tay duỗi thẳng, điểm A là vị trí thứ nhất của người đi bộ, điểm B là vị trí thứ hai. Thế thì tam giác A'B'M và ABM đồng dạng (bạn nên đứng đối mặt với người kia, cố gắng khiến cho A'B' và phương hướng người bên bờ bên kia đi theo hình bình hành).

Vì vậy  $BM/B'M = AB/A'B'$ ; trong đó B'M là chiều dài cánh tay bạn duỗi ra, A'B' là khoảng cách giữa hai con người mắt của bạn, AB cũng có thể tính ra được từ số bước chân của người đi bộ bạn đã đếm được (bình quân mỗi bước khoảng 3/4 m), từ đó chúng ta được giá trị của MB.

Giả thiết khoảng cách giữa hai con người mắt là  $A'B' = 6\text{cm}$ , BM là chiều dài cánh tay 60cm, người đi bộ đi từ A sang B tổng cộng 14 bước, thế thì khoảng cách giữa bạn và anh ta sẽ là :  $MB = AB \times B'M/A'B' = 14 \times 60/6 = 140 \text{ bước} = 105\text{m}$ .

Tốt nhất là nên đo ra khoảng cách con người mắt và khoảng cách từ mắt đến điểm đầu ngón tay cái dựng lên khi duỗi cánh tay, như vậy, ghi chắc lại tỉ lệ giữa hai người, thì luôn luôn có thể đoán biết được khoảng cách của vật thể mà ta không phải đến gần. Lúc đó chỉ cần lấy AB nhân với tỉ lệ của khoảng cách này là được. Thông thường mà nói, đại đa số B'M/A'B' của người bằng khoảng trên dưới 10.



## Sáng tạo toán học từ con nhện giăng tơ

Đề các là nhà triết học và nhà toán học của Pháp thế kỷ 17, ông đã cống hiến rất nhiều cho lĩnh vực triết học và toán học. Ông có năng lực quan sát rất nhạy bén, giỏi tư duy, rất chú trọng những vấn đề trong cuộc sống có liên quan tới toán học.

Có một lần, ông lâm bệnh, nằm trên giường, nhìn lên trần nhà. Ông thấy một con nhện đang bận rộn đan mạng ở một góc. Chỉ trong chốc lát, nó leo lên leo xuống trên tám hoa văn trần nhà, một lúc lại nhả ra tơ treo lơ lửng trong không trung. Cứ nhìn như thế, ông đã bị cuốn theo, và chìm vào suy tư.

Ông đang nghĩ gì? Một câu hỏi xuất hiện trong đầu ông. Làm thế nào để xác định vị trí của nhện trong không trung?

Slúc, ông nhận ra, trong không gian của căn phòng, tường và mặt đất là không chuyển động, duy chỉ có con nhện là chuyển động, có thể coi tường và mặt đất là bề mặt tham chiếu cố định, dùng đường giao của hai mặt tường và đường giao giữa tường và mặt đất để xác định vị trí của nhện trong không trung không?

Ông vội vàng yêu cầu người nhà mang giấy bút đến, thử vẽ một hình vẽ. P biểu thị cho con nhện trong không trung, X, Y là khoảng cách từ P đến hai mặt tường, Z là khoảng cách từ P đến mặt đất. Như vậy, thông qua giá trị của ba khoảng cách thì đánh giá ra được chính xác vị trí của con nhện P.

Sau khi khỏi bệnh, ông tiếp tục nghiên cứu một thời gian dài, từ đó sáng kiến ra một bộ môn toán học mới, gọi là hình học giải tích. Trong hình học giải tích không gian, dùng ba đường thẳng vuông góc với nhau (x,y,z) tạo thành một tọa độ không gian, ba đường vuông góc với nhau gọi là trục, trục x, trục y trục z; hai trong ba trục tạo nên một mặt phẳng, như mặt phẳng XY, XZ, YZ, mỗi một trục đều vuông góc với mặt phẳng tạo thành bởi hai trục còn lại. Một điểm bất kỳ trong hệ tọa độ này đều có thể được thể hiện bằng giá trị tọa độ của ba trục (x,y,z), ví dụ P(2,2,1) là biểu thị vị trí của điểm P. Tọa độ này gọi là tọa độ Đề-các.

Có tọa độ Đề-các rồi người ta có thể tiến hành nghiên cứu các vấn đề trong hình học bằng cách dùng phương trình đại số nhiều vấn đề trở lên dễ giải quyết hơn rất nhiều.

Giáo trình môn hình học giải tích, các em học sinh lên trung học sẽ được học. Các em hãy học theo Đề-các, để ý quan sát các hiện tượng xung quanh, rèn luyện khả năng quan sát tư duy của mình, như vậy các em sẽ phát hiện thấy trong cuộc sống có rất nhiều vấn đề khoa học kỳ diệu

## Làm thế nào để phán đoán ai đang nói dối?

Có ba người, Trương Tam, Lí Tứ và Vương Ngũ. Trương Tam nói Lí Tứ đang nói dối, Lí Tứ nói Vương Ngũ đang nói dối, mà Vương Ngũ lại nói Trương Tam và Lí Tứ đang nói dối. Bạn có thể phán đoán một chút, rốt cuộc ai nói thật ai nói dối?

Lời nói của ba người này nếu không phải là thật thì là nói dối. Mỗi người nói thật hay nói dối có hai khả năng, vậy thì ba người tổng cộng có  $2 \times 2 \times 2 = 8$  khả năng, chúng ta liệt kê tám khả năng này thành một bảng biểu:

Từ câu hỏi có thể thấy: Trương Tam và Lí Tứ không thể nói dối cùng một lúc được. Bởi vì nếu Lí Tứ nói dối, thì tức là Trương Tam đang nói thật, ngược lại cũng thế, cho nên tình huống ở hai dòng 1 và 2 trong bảng biểu là không thể xuất hiện được.

Hơn nữa, Trương Tam và Lí Tứ đều không thể nói dối cùng một lúc được, nếu như vậy, Vương Ngũ cũng đang nói dối, thì không có ai nói thật cả. Cho nên tình huống ở dòng 7, 8 của bảng biểu cũng không thể xuất hiện được.

Nếu Trương Tam nói thật, mà Lí Tứ nói dối, vậy thì bất kể Vương Ngũ nói thật hay nói dối, đều nảy sinh mâu thuẫn, thế thì tình huống ở dòng 5, 6 trong bảng biểu cũng không có.

Xem ra, đáp án của câu hỏi ở dòng 3, 4. Tình huống trong dòng thứ 3 là có khả năng, nhưng tình huống trong dòng thứ 4 lại không có khả năng xuất hiện, Lí Tứ và Vương Ngũ không thể nói thật cùng một lúc.

Áp dụng phương pháp suy luận này, chúng ta được, trừ dòng thứ 3 ra, các dòng còn lại trong bảng biểu đều không phù hợp với điều kiện đề bài. Tức là chỉ có Lí Tứ nói thật, Trương Tam và Vương Ngũ đều nói dối.

Bảng biểu phán đoán tình huống giá trị này gọi là bảng thật. Nó có tác dụng rất lớn về mặt logic, ngay cả khi thiết kế mạch điện cũng phải dùng đến nó?

## Ai là gián điệp quốc tế

Trong một toa tàu của đoàn tàu Quốc tế, có bốn hành khách có quốc tịch khác nhau A,B,C,D. Họ mặc áo khoác có màu sắc không giống nhau, cùng ngồi bên cạnh một chiếc bàn, trong đó hai người ngồi gần cửa sổ, hai người ngồi gần lối đi. Đã biết người mặc áo khoác màu xanh lam là gián điệp quốc tế lại biết :

1. Lữ khách Anh ngồi bên trái của ông B
2. Ông A mặc áo khoác màu nâu
3. Ng1;i mặc áo khoác màu đen ngồi bên phải khách người Đức
4. Khách người Mỹ ngồi đối diện với ông D
5. Khách người Nga mặc áo khoác màu tím
6. Khách người Anh quay đầu về bên trái, nhìn ra ngoài cửa sổ.

Bạn có biết trong bốn người này, ai là gián điệp mặc áo khoác màu xanh lam?

Trước tiên chúng ta lấy điều kiện 6 làm nút đột phá giải đề, biết người nước Anh ngồi một bên gần cửa sổ; từ (1) lại biết ông B ngồi gần lối đi.

Từ điều kiện (3) có thể suy ra khách người Đức ngồi một bên cạnh lối đi đối diện với ông B, mà người mặc áo khoác màu đen chắc chắn ngồi đối diện người nước Anh, cùng ngồi gần cửa sổ, như hình vẽ.

Điều kiện (4) chỉ ra rõ người nước Mỹ ngồi đối diện ông D, do vị trí ngồi của khách người Anh và khách người Đức trong bốn người đã rõ ràng, cho nên khách ngồi đối diện với họ nhất thiết không thể là ông D, mà ông D chỉ có thể là một trong hai người nước Anh, nước Đức. Bước suy luận này là rất quan trọng.

Lại đi tiếp chúng ta dùng phương pháp thăm dò, giả thiết người Đức là ông D, thế thì ông B sẽ là người Mỹ, người mặc áo khoác đen ngồi bên cạnh ông D sẽ là người Nga, nhưng điều này mâu thuẫn với điều kiện (5), vì điều kiện (5) nói người Nga mặc áo khoác tím, xem ra giả thiết sai, ông D không thể là người Đức, mà là người Anh.

Ông D là người Anh, từ được người mặc áo khoác đen đối diện ông ta là người Mỹ, mà ông B bên cạnh ông D chỉ có thể là người Nga. Từ điều kiện (2) lại biết, ông A mặc áo khoác nâu, vậy ông ta chỉ có thể là người Đức, còn lại người Mỹ chính là ông C.

Lúc này, điều kiện trong hình vẽ đều đã được điền tương đối rồi không còn sự lựa chọn nào khác, bạn nhìn là thấy ngay người mặc áo khoác màu xanh là người Anh, và ông ta chính là gián điệp quốc tế.

Nhìn lên trên, vấn đề dò tìm đầu mối đã được phân tích chính xác bằng phương pháp suy luận từng bước tìm ra đáp án.

## Vì sao quốc vương không đủ gạo để thưởng?

Ngày trước, ở Ấn Độ cổ có một quốc vương bản tính thích chơi cờ tiêu khiển, có một lần ông hạ lệnh dán cáo thị trên toàn quốc, thông báo rằng : nếu ai có thể tìm ra được một trò chơi thoả mãn niềm ham thích của quốc vương thì sẽ được trọng thưởng.

Có một vị thuật sĩ (thuật sĩ là chỉ người có mưu lược có trí tuệ) đọc được bảng cáo thị. Ông đã phát minh ra một loại cờ có thể làm cho quốc vương ham thích, chơi không biết mệt. Thế là ông bèn tìm đến quốc vương. Quốc vương vui vẻ hỏi thuật sĩ : “Nhà ngươi có yêu cầu gì về phần thưởng không?” Thuật sĩ nói : “Muôn tâu bệ hạ, thuật sĩ nhỏ bé không có yêu cầu gì đặc biệt, chỉ mong đại vương cho thần một chút phần thưởng nhỏ mọn là một số gạo, số gạo đó được tính như sau : đặt một hạt gạo ở ô cờ thứ nhất của bàn cờ, đặt 2 hạt gạo ở ô cờ thứ hai, đặt 4 hạt gạo ở ô cờ thứ 3, sau đó ở mỗi một ô cờ tiếp theo đặt số hạt gạo gấp đôi số hạt gạo ở ô cờ trước, đặt đủ gạo trong 64 ô cờ, đó chính là phần thưởng mà thần mong muốn.”

Quốc vương mới nghe, nghĩ với cả một quốc gia lớn thế này thì một ít gạo thắm vào đâu, thế là đồng ý ngay. Thế nhưng, khi toán sư của quốc vương tính toán số gạo trên bàn cờ thì bất thần giật mình kinh ngạc. Cho dù lấy tất cả số gạo của cả nước, cũng không thể điền kín hết 64 ô cờ theo yêu cầu của thuật sĩ.

Tại sao vậy? Quốc vương cuối cùng nên thưởng cho thuật sĩ bao nhiêu gạo?

Chúng ta cùng tính toán nhé : ô thứ nhất là 1 hạt gạo, ô thứ hai là 2 hạt, tổng cộng có 3 hạt, dùng công thức biểu thị như sau :  $1+2=3=2^2 - 1$  , trong ô thứ 3 có 4 hạt, thế là trong ô 1, 2, 3, có tất cả 7 hạt gạo,  $1+2+4 = 7 = 2^3 - 1$  ; lại thêm vào ô thứ tư 8 hạt gạo, tổng cộng là 15 hạt,  $1+2+4+8 = 15 = 2^4 - 1$  , ... cứ tiếp tục thêm vào như thế, có thể suy ra trong 64 ô cờ có tất cả  $2^{64}-1$  hạt gạo, con số này là bao nhiêu? Nó bằng 18.446.744. 073. 709.551.615, một con số gồm 20 chữ số. Chà!

Quả là không tính thì không biết, vừa tính ra thì thấy giật mình. Con số này lớn đến mức không thể tưởng tượng được, giả dụ có dành kho chứa chỗ gạo này thì cần một cái kho cao 4m, rộng 10m, còn chiều dài thì dài từ trái đất đến mặt trời và lại từ mặt trời trở xuống trái đất!

Vì sao mà con số này làm người ta kinh ngạc đến vậy? Thực chất thuật sĩ thông minh đã vận dụng kiến thức cấp số nhân, khiến cho các con số nhỏ bé 1 hạt, 2 hạt rất nhanh chóng biến thành con số lớn không thể tưởng tượng được. Quốc vương thiếu kiến thức toán học làm sao có thể lí giải được cái uyên thâm kỳ diệu của cấp số nhân được.

## Điền Kỷ đua ngựa vì sao mà thắng?

Kỳ vương và đại tướng quân Điền Kỷ tổ chức một trận đua ngựa. Họ thoả thuận : hai bên mỗi bên đưa ra ba loại ngựa “thượng, trung, hạ” mỗi loại một con. Mỗi lần tổ chức ba trận đua, bên thua sáu mỗi trận phải đưa cho đối phương 1000 lạng tiền vàng. Do ngựa của Kỳ Vương so với ngựa cùng đẳng cấp của Điền Kỷ đều tốt hơn một bậc, mà trong mỗi một trận đua, hai bên đều dùng ngựa cùng đẳng cấp tham gia, kết quả Kỳ Vương thắng liền ba trận, nhận được 3000 lạng tiền vàng.

Không bao lâu sau, Kỳ Vương lại mời Điền Kỷ tham gia đua ngựa. Điền Kỷ cảm thấy khó xử, một mặt ý chỉ của Kỳ Vương không dễ từ chối, mặt khác lại tham gia lần nữa tất lại thua chứ không thắng.

Quân sư dưới trướng của Điền Kỷ là Tôn Tấn là một nhà quân sự tài hoa. Ông đã nghĩ ra cho Điền Kỷ một kế : dùng ngựa hạ đẳng của mình để đua với ngựa thượng đẳng của Kỳ Vương; dùng ngựa thng đẳng của mình đua với ngựa trung đẳng của Kỳ Vương, dùng ngựa trung đẳng của mình đua với ngựa hạ đẳng của Kỳ Vương. Trận đua bắt đầu, con ngựa đầu tiên của Kỳ Vương vượt lên rất xa, Kỳ vương thấy con ngựa của đối phương hết sức thảm hại thì vui mừng vô kể. Nhưng chẳng ngờ không lâu, trong trận đua thứ hai, ba, ngựa đua của Điền Kỷ đều thắng cả. Kỳ Vương thua phải đưa cho điền kỷ 1000 lạng tiền vàng. Đáng cười là, Kỳ Vương thua tiền nhưng vẫn không hiểu được vì sao lại thua.

Thế thì, Điền Kỷ đã thắng thế nào? Hoá ra Tôn Tấn đã nắm rõ được đối sách của Kỳ Vương, ông nhận định Kỳ Vương sau khi thắng trận đua thứ nhất, sẽ không đại thay đổi tuần tự ngựa, vẫn xuất ngựa theo thứ tự (thượng, trung, hạ) tham gia đua. Thế là, Tôn Tấn bèn áp dụng đối sách tương ứng dựa vào ưu thế ngựa của Điền Kỷ nhanh hơn một chút so với ngựa đẳng cấp kém hơn của Kỳ Vương, bỏ đi một trận nhưng lại nắm được cơ hội ở hai trận còn lại, nhận được chiến thắng cuối cùng. Sách lược của Tôn Tấn có thể thành công được chính là ở chỗ ông dự tính chính xác đối sách của đối phương.

# **“Búa một thước, mỗi ngày lấy đi một nửa, muôn đời không hết” câu nói này có ý nghĩa gì?**

Trong cuốn “Thiên hạ biên” của “Trang Tử” người Trung Quốc có cách nói như sau : ếc búa một thước, mỗi ngày lấy đi một nửa, muôn đời không lấy hết.”

Ý nghĩa của câu này như sau : Một gậy gỗ dài một thước, ngày thứ nhất lấy đi một nửa, còn lại  $1/4$  thước; ngày thứ hai lại lấy đi một nửa của  $1/2$  còn lại còn lại  $1/4$ ; ngày thứ ba lấy đi một nửa của  $1/4$  còn lại, vẫn còn  $1/8$  thước, ..., cứ tiếp tục lấy đi như vậy, mãi mãi không thể lấy đi hết chiếc gậy gỗ. Bởi vì bất luận số còn lại của gậy gỗ nhỏ như thế nào, nhưng luôn còn lại một nửa, cho nên sẽ “muôn đời không hết”.

Câu nói này xét từ góc độ lí thuyết là đúng, nhưng trên thực tế cuộc sống thì không thể thực hiện được, bởi vì cho đến một ngày gậy gỗ nhỏ đến mức độ nào đó, người ta cũng không thể tiếp tục chia một nửa được. Đã không thể lấy được nữa, thì tất nhiên đành phải dừng lại. Vậy thì lí luận phân tích như thế nào?

Chúng ta liệt kê ra độ dài còn lại mỗi ngày của gậy gỗ ra, có thể viết thành các dãy số như sau :

$$1; 1/2 ; 1/2^2, 1/2^3 ; \dots; 1/2^n$$

Ngày thứ nhất, gậy gỗ là một thước; ngày thứ hai chỉ còn lại một nửa thước, là  $1/2$  ; ngày thứ ba là  $1/2 \times 1/2 = 1/2^2$  ; ngày thứ tư lại là  $1/2^2 \times 1/2 = 1/2^3 \dots ; \dots$  cứ lấy đi như vậy cho đến ngày thứ  $n$ , gậy gỗ chỉ là  $1/2^n$ . Rất rõ ràng, khi  $n$  tăng lên,  $2^n$  cũng tăng theo, thế thì  $1/2^n$  sẽ nhỏ đi, nhưng bất kể  $n$  lớn đến thế nào,  $1/2^n$  sẽ mãi mãi không bằng 0, cho nên cho dù lấy gậy gỗ đi như thế nào vẫn không thể lấy hết đi được.

Trước kia, kiến thức mà chúng ta học được trong giáo trình toán học đại bộ phận hạn chế trong vấn đề định lượng, phần tính toán đề cập đến đại đa số là vận toán bốn nguyên tắc của đẳng thức. Vậy thì, gặp phải vấn đề vô hạn không định lượng, chúng ta nên giải quyết vấn đề như thế nào?

Trong toán học, chúng ta dùng khái niệm “giới hạn” để biểu đạt vấn đề không định lượng vô hạn này. Lấy ví dụ câu nói của “Trang Tử”, chúng ta thấy rằng khi  $n$  lớn đến vô cùng,  $1/2^n$  giới hạn tại 0. Chú ý : không phải  $1/2^n = 0$ , mà là giới hạn của  $1/2^n = 0$ , điều này đề chỉ một kiểu xu hướng, mãi mãi không thể có  $1/2^n = 0$ , nhưng khi  $n$  tăng lên,  $1/2^n$  thể hiện trạng thái vô hạn gần đến 0. Như vậy chúng ta đã nắm bắt được quy luật biến hoá của sự vật dạng này.

Giới hạn là khái niệm quan trọng trong toán học, trên nền tảng cơ sở của nó sau này đã nảy ra các phạm trù tích phân, vi phân...

## Sao gọi là “điều luật cắt tóc” sai?

Ở một quốc gia châu Âu cổ đại có một thị trấn nhỏ, cư dân của thị trấn không nhiều, nên thợ cắt tóc cũng chỉ có một người. Trong thị trấn có một điều luật bất thành văn : Bất kể người nào mà không tự cắt tóc được thì thợ cắt tóc sẽ cắt; đồng thời cũng quy định : thợ cắt tóc chỉ có thể cắt tóc cho những người không tự cắt được tóc.

Quy định đã rõ ràng như vậy, tuyệt đối không thể sai sót được. Nhưng rồi đã nảy sinh vấn đề, tóc của thợ cắt tóc do ai cắt? Nếu ông ta không tự cắt cho mình, thì theo luật, ông ta sẽ được thợ cắt tóc cắt cho (chính là ông ta). Kết quả cắt cũng không phải, mà không cắt cũng không phải. Điều này thật khó xử cho ông thợ cắt tóc.

Vấn đề nảy sinh bởi vì bản thân luật không hợp lí. Điều luật này đã chia toàn thể số cư dân trong thị trấn nhỏ thành hai lớp, một lớp là những người tự cắt tóc, một lớp là những người không tự cắt tóc được. Kết quả khiến cho bản thân ông thợ cắt tóc không biết quy về lớp nào.

Việc này đã gây ra chấn động rất lớn cho giới toán học đương thời. Bởi vì nền móng cơ bản cho toán học là luận tập hợp, nếu luận tập hợp có vấn đề, thì cơ sở của toán học sẽ nảy sinh dao động, điều này trên lịch sử gọi là “nguy cơ toán học lần thứ ba”.

Để giải quyết mâu thuẫn, xây dựng lại cơ sở toán học, các nhà toán học đã nỗ lực gian khổ, khiến cho định nghĩa tập hợp mà người ta biết đến buộc phải có hạn chế.



# Bạn có biết kiến thức số học từ việc con kiến mang được vật nặng không?

Bạn đã từng nhìn thấy dáng vẻ của một con kiến khi đi làm việc chưa? Nó mang theo một hạt đại mạch không tương xứng với thân hình nhỏ bé của nó, nhanh nhẹn leo xuống dưới theo các cọng thực vật. Điều này thật không thể tưởng tượng được, một con kiến nhỏ nhoi lấy đâu ra sức lực lớn như vậy có thể bê một vật nặng gấp 10 lần trọng lượng của nó như vậy, như bê một chiếc đàn thép lớn leo lên cầu thang, lẽ nào con kiến còn có sức lực hơn con người?

Quả thật như vậy không? vấn đề này không có sự giúp đỡ của hình học, cũng không có cách nào giải đáp.

Để chúng tôi phân tích một chút về bắp thịt của động vật trước. Cắt lấy bắp thịt trên thân của một con ếch đã bị giết, làm thí nghiệm liên kết thịt bắp đùi, xương chân và vai của con ếch với nhau và treo lên, lấy một cái móc xuyên qua vai, trên móc treo một quả cân. Giả dụ lấy hai sợi dây điện liên kết hai đầu của bắp thịt, đồng thời nối dòng điện vào, thế thì bắp thịt này lập tức co lại và kéo quả cân lên. Tăng dần quả cân để đo được khả năng nâng vật nặng lớn nhất miếng thịt này có thể mang, bây giờ lần lượt hai, ba, hoặc bốn bắp thịt giống nhau liên kết lại, nối dòng điện, thế là quả cân nâng lên đến bội số tương ứng của số bắp thịt. Thiết tưởng, nếu những bắp thịt này đều sinh trưởng cùng nhau, cũng có thể đạt được kết quả giống nhau. Vì vậy chúng ta biết độ lớn nhỏ của năng lực nâng của bắp thịt không quyết định ở độ dài hay độ nặng của bắp thịt, mà quyết định ở sự thô mảnh của nó, cũng chính là quyết định ở tiết diện lớn nhỏ của nó.

Giả thiết có hai động vật, kích cỡ thẳng của động vật thứ 2 gấp hai lần động vật thứ nhất, như vậy thể tích, thế trọng của động vật thứ hai gấp 8 lần động vật thứ nhất; nhưng trên độ đo bề mặt, tiết diện của bắp thịt động vật thứ hai lại chỉ gấp 4 lần động vật thứ nhất. Như vậy, tuy thân thể của một động vật đã lớn gấp 2 lần trước, thế trọng đã gấp 8 lần trước, nhưng sức lực cơ bắp của nó chỉ tăng 4 lần trước. Cũng vậy, so sánh thế lực và thế trọng của động vật ngược lại yếu đi một nửa. Căn cứ vào lí do đó, độ lớn của một động vật gấp 3 lần động vật khác thì thế lực lại yếu hơn 1/3 lần.

Điều này giải thích vì sao các loại côn trùng như kiến có thể mang vác được vật nặng gấp 30, 40 lần cơ thể, mà con người trong tình trạng bình thường - ngoài vận động viên và công nhân vận chuyển vật nặng, chỉ có thể chịu được 9/10 trọng lượng cơ thể. Ngay cả ngựa cũng chỉ chịu được 7/10 trọng lượng so với cơ thể.

# Thực nghiệm ném kim thế nào để tìm ra được giá trị của P

Tính toán giá trị gần đúng của pi có một phương pháp lý thú mà bạn không có thể chưa từng nghĩ tới. Thực nghiệm như thế này, chuẩn bị một số chiếc kim khâu (dài khoảng 2cm) tốt nhất bỏ đi phần mũi kim, làm cho toàn bộ độ dài của kim có sự to nhỏ khác nhau, lại vẽ ra thật nhiều đường thẳng trên một trang giấy trắng, khoảng cách giữa các đường phải gấp hai lần độ dài kim. Sau đó, dần dần thả kim xuống mặt giấy từ một độ cao bất kỳ, nhìn xem kim có giao với đường thẳng nào không. Để khiến cho kim thả xuống mặt giấy không bị đàn hồi nảy lên, tốt nhất đệm dưới đáy giấy một tờ giấy dày hoặc một vật tương tự như nhung. Ném kim phải tiến hành nhiều lần trùng lặp, như 100 lần, thậm chí đến 1000 lần càng tốt; mỗi lần đều phải ghi chép lại xem kim và đường thẳng có giao nhau không. Sau khi hoàn thành ném kim, nếu lấy tổng số lần ném trừ đi số lần giao nhau, thì sẽ được giá trị gần đúng của pi.

Vì sao vậy? Giả thiết số lần có khả năng giao nhau nhất của kim và đường thẳng là k, mà độ dài của k là 20mm. Điểm giao nhau này nhất định là một chỗ trong 20 mm, vậy thì do mọi chỗ của kim đều to nhỏ đều nhau, nên số lần mỗi một mm có khả năng giao nhau với đường thẳng nhiều nhất là k/20. Đối với một đoạn 3mm trên chiếc kim, số lần nó có thể giao nhau là 3k/20.

Giá trị so sánh này, khiến cho kim ném có hình dạng uốn cong. Bây giờ, giả định chúng ta lấy kim ném uốn thành hình tròn, đường kính của nó vừa tương đương với khoảng cách giữa hai đường thẳng (tức là, đường kính của hình tròn bằng 2 lần độ dài kim). Mỗi lần ném xuống, phải giao với hai đường thẳng. Giả định tổng số ném là N, thế thì số giao nhau là 2N. Vì giá trị so sánh giữa độ dài kim và độ dài vòng tròn bằng với bán kính của vòng tròn này và giá trị so sánh 1/2p của độ dài chu vi đường tròn, mà bán kính của đường tròn là chiều dài kim, chúng ta lại biết so sánh giữa số lần giao nhau có khả năng nhất và chiều dài kim. Vì vậy, tỉ lệ của số lần giao nhau k có khả năng nhất của kim này là  $k = N/p$ . Cho nên :

$$p = N/k = \text{số lần ném/số lần giao nhau}$$

Số lần ném càng nhiều, giá trị pi nhận được càng chính xác. Một nhà thiên văn học người Thụy Sĩ vào giữa thế kỷ trước đã từng quan sát 5000 lần ném kim, kết quả đạt được pi là 3.159.

Bạn bây giờ có thể thấy, p có thể dùng phương pháp thực nghiệm tìm ra, mà lý thú ở chỗ, không cần vẽ ra hình, cũng không cần vẽ ra đường kính, ngay cả compa cũng không dùng. Người dù không hiểu về hình học, thậm chí không có chút kiến thức liên quan đến đường tròn, chỉ cần anh ta nhẫn nại tiến hành thực nghiệm ném kim nhiều lần, cũng có thể tìm ra giá trị gần của pi.

## Số pi cuối cùng bằng bao nhiêu?

Số pi chính là giá trị so sánh giữa chiều dài của chu vi đường tròn với chiều dài của đường kính của nó. Cho dù đường kính của hình tròn không giống nhau, có to có nhỏ, nhưng đối với các hình tròn mà nói, số pi đều bằng nhau. Nói từ góc độ này, số pi là số liệu quan trọng nhất của việc vẽ hình tròn. Trong toán học, số p đọc là “pi”, nó là chữ cái đầu tiên của từ “chu vi” trong tiếng Hy Lạp.

Trong cuộc sống thường ngày và trong lao động, số pi được dùng rộng rãi, đồng thời nó cũng là một số rất kỳ lạ. Giá trị chính xác của pi là bao nhiêu?

Ngay từ 3500 năm trước, người Babylon đã biết chiều dài chu vi bằng ba lần đường kính, họ nhận được giá trị của p là 3. Điều này thông nhất với cách nói “đường kính 1 chu vi 3” mà nhà toán học đầu tiên của Trung Quốc đã đưa ra trong “Chu bễ toán kinh”. Người Ai Cập cổ sử dụng số p là 3.16, người La Mã cổ thì dùng 3.12, người Hy Lạp cổ lấy số p  $3 \times \frac{1}{7}$ .

ác nhà toán học cổ đã làm thế nào để tìm ra được giá trị pi như trên, quả thật cũng khó biết được. Nhà toán học Trung Quốc Lưu Huy có cách này, ông sáng tạo nên phương pháp dùng hình tròn không chia cắt để tìm ra số pi, chiếm vị trí quan trọng trong lịch sử toán học, người sau gọi là “thuật cắt đường tròn Lưu Huy”. Lưu Huy dùng hình 192 cạnh nội tiếp đường tròn để đại diện cho chiều dài chu vi, đạt được giá trị của số p là 3,14. Để kỷ niệm công lao thành tích của ông, mọi người lấy 3,14 gọi là “pi Huy”.

Đến thời kỳ nam bắc triều Trung Quốc, nhà đại toán học Tổ Xung Chi đã tính toán số pi chính xác tới con số nhỏ 7 đơn vị sau dấu phẩy :  $3.1415926 < p < 3.1415927$ . Phương pháp tính toán mà Tổ Xung Chi áp dụng gọi là “thuật tô điểm”, đáng tiếc đã sớm bị thất truyền, cho nên không biết ông đã tính toán ra chữ số này như thế nào. Giá trị 3.1415926 được mọi người gọi là “pi Tổ”.

Mọi người lần lượt biết đến, pi là số nhà vô hạn không tuần hoàn, tính đi tính lại, càng tính càng không hết, không thể tính đến cuối cùng được.

Một nhà toán học nước Đức thế kỷ 16, đã bỏ cả đời tính số pi đến 35 đơn vị sau dấu phẩy. Sau khi ông chết, số pi 35 đơn vị được khắc trên bia mộ của ông.

Trước khi máy tính điện tử ra đời, mọi người đã tính toán số pi đến 808 đơn vị. Vào năm 1949, có người chỉ trong một ngày một đêm tính ra 2048 đơn vị. Đến năm 1989, mọi người đã tính ra hơn 10 tỷ đơn vị.

Số pi được tính đến mức độ chính xác như vậy, chắc là tổ tiên của chúng ta không thể tưởng tượng ra được. Thế thì, tại sao những nhà toán học lại đi tính toán nó không ngừng nghỉ như vậy? Bởi các nhà toán học đang nghiên cứu trên dây chữ của pi có quy luật gì, đáng tiếc là cho đến nay vẫn chưa làm rõ ra được.

## Bạn có biết câu hỏi gà thỏ cùng lồng không?

Câu hỏi gà thỏ cùng lồng là một câu hỏi toán học nổi tiếng trong “Tôn tử toán kinh” sách toán cổ đại của Trung Quốc. Nội dung của nó như thế này :

Cùng trong một lồng, nhốt gà và thỏ. Đếm một lát, tổng cộng có 35 con, 94 cái chân. Xin hỏi, trong lồng có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con thỏ?

Dùng phương pháp giải hệ phương trình, giải ra câu hỏi này rất dễ. Giả thiết trong đó gà có x con, thỏ có y con, thế thì căn cứ đề bài ta có :

$$x + y = 35$$

$$2x + 4y = 94$$

Giải ra được  $x = 23$ ,  $y = 12$ . Tức là trong lồng có 23 con gà và 12 con thỏ.

Nếu chưa học cách giải hệ phương trình, có thể dùng phương pháp thuật toán trong đại số không? Có thể, “Tôn tử toán kinh” chính là dùng phương pháp thuật toán để giải :

Trước tiên giả thiết số thỏ trong lồng đều bật đi hai chân, như vậy thì, số động vật trong lồng bất kể là gà hay thỏ đều chỉ có hai chân. Vì có tất cả 35 con, cho nên có 70 cái chân. Bởi vì mỗi con thỏ giả thiết bị chặt đi hai chân, 24 chân tương đương với 12 con thỏ. Từ đó có thể tìm ra số gà là  $35 - 12 = 23$  con.

Câu hỏi gà thỏ cùng lồng sau đó có rất nhiều thay đổi, như đầu tiên hãy giả thiết tất cả số đó là thỏ, thì tổng số chân sẽ là  $35 \times 4 = 140$  chiếc, trừ đi số chân 94 chiếc,  $140 - 94 = 46$ , xem ra nhằm tính gà thành thỏ tính thừa ra 46 chiếc chân. Mỗi con gà đều tính thừa ra hai chiếc chân, 46 cái chân là số chân của 23 con gà. Cho nên, số gà trong lồng là 23 con, số thỏ sẽ là  $35 - 23 = 12$  con.

“Tôn tử toán kinh” là sách thuật toán thời Tấn ở Trung Quốc từ phép giải câu hỏi gà thỏ cùng lồng, đã phản ánh được tài trí toán học của nhân dân lao động cổ đại.

## “Nguyên tắc ngăn kéo” là gì?

Bây giờ có 6 quyển sách, cần đặt vào trong 5 ngăn kéo, đặt thế nào? Cách đặt rất nhiều, có ngăn kéo có thể đặt, có ngăn kéo cũng có thể không đặt sách; ngăn kéo đặt sách có thể đặt 1 quyển, 2 quyển... cho đến 6 quyển tất cả đều đặt vào. Nhưng tùy ý bạn thế nào, ít nhất có thể tìm thấy một ngăn kéo, bên trong đặt ít nhất 2 quyển sách.

Nếu lấy một ngăn kéo biểu thị cho một tập mỗi một quyển sách biểu thị cho một phần tử. Giả dụ có  $n + 1$ , hoặc nhiều hơn  $n + 1$  phần tử đặt vào  $n$  tập hợp, vậy thì không còn nghi ngờ gì nữa, trong đó nhất định ít nhất có một tập hợp đặt ít nhất hai phần tử. Đó chính là hàm nghĩa trừu tượng của toán học trong “nguyên tắc ngăn kéo”.

Lại lấy ví dụ, một lớp có 54 học sinh, nếu 54 học sinh này đều sinh cùng một năm, thế thì ít nhất có 2 người sinh cùng một tuần. Vì sao lại như vậy? Vận dụng nguyên tắc ngăn kéo, chúng ta thật dễ dàng giải thích. Do trong một năm chỉ có 53 tuần thế thì coi tuần như ngăn kéo, coi học sinh như sách, vậy thì trong 53 ngăn kéo, ít nhất có một ngăn kéo đặt ít nhất hai quyển sách, cũng chính là, ít nhất có 2 học sinh là sinh cùng một tuần.

Số lượng quyển sách nhất định nhiều hơn 1 so với ngăn kéo phải không? Nhưng không nhất định thế, số lượng quyển sách có thể nhiều hơn. Ví dụ, khi 31 quyển sách đặt vào 5 ngăn kéo, bất luận là phương pháp gì ít nhất có thể tìm thấy một ngăn kéo, bên trong ít nhất đặt 7 quyển sách. Cũng tức là nếu lấy  $(m \times n + 1)$  hoặc nhiều hơn  $(m \times n + 1)$  phần tử đặt vào  $n$  tập hợp, bất luận là phương pháp như thế nào, trong đó nhất định ít nhất có 1 tập hợp đặt ít nhất  $m + 1$  phần tử. Bởi vì trong  $n$  ngăn kéo đặt  $m \times n$  quyển sách, thế thì bình quân mỗi ngăn kéo đặt  $m$  quyển, mà  $(m \times n + 1)$  quyển sách nhiều hơn 1 quyển so với  $m \times n$  quyển, cho nên quyển này phải đặt vào trong một ngăn kéo, thế là nhất định ít nhất có một ngăn kéo đặt ít nhất  $m + 1$  quyển sách.

# quá trình chứng minh “Định lý Féc-ma” không?

Định lý Féc-ma là định lý nổi tiếng trong giới toán học, vậy nội dung của nó là gì?

Nhà toán học nước Pháp thế kỷ 17 Féc-ma cho rằng : khi  $n$  lớn hơn hoặc bằng 3, phương trình  $x^n + y^n = z^n$  không có nghiệm nguyên khác 0.

“Khác 0” ở đây tức là bất kỳ nghiệm nào trong các nghiệm  $x, y, z$  đều không thể là 0. Nếu không, giả sử  $x = 0, y = z$ , như vậy là lập được phương trình. Định lý Pitago mà chúng ta đã học,  $x^2 + y^2 = z^2$ , khi  $x, y, z$  lần lượt là 3, 4, 5, như vậy là lập được phương trình, lúc này phương trình có nghiệm khác không. Vậy thì, khi  $n > 2$ , phương trình sẽ không thể có nghiệm nguyên khác 0 phải không?

Quá trình Féc-ma đưa ra định lý này là vô cùng thú vị. Ông có thói quen khi đọc thường viết tóm tắt những điều tâm đắc và điều cần chú ý vào phần trắng bên lề của cuốn sách. Sau khi Féc-ma qua đời 5 năm, con trai ông khi sắp xếp lại bút ký và thư từ của cha đã phát hiện ra chú thích của Féc-ma trên phần lề của quyển 2 “toán thuật”; trên đó viết định lý của Féc-ma : tôi đã tìm ra được cách chứng minh hết sức kỳ diệu định lý này, đáng tiếc lề nhỏ quá không thể viết ra được.

Định lý của Féc-ma để lại cho hậu thế một vấn đề về toán học, hơn 300 năm nay, đề toán tưởng đơn giản rõ ràng này đã thu hút rất nhiều nhà toán học ưu tú nghiên cứu, nhưng vẫn chưa chứng minh được, viện khoa học nước Pháp đã từng hai lần treo giải thưởng vào năm 1816 và năm 1850 cho ai tìm ra cách giải; nước Đức cũng treo giải thưởng 100 ngàn Mác tìm lời giải năm 1908. Người ứng giải tập nập không ngớt, nhưng giải pháp đưa ra đều sai. Một số nhà toán học kiệt xuất cũng suy ngẫm khổ sở vấn đề này.

Một thời kỳ dài trở lại đây, mọi người đã không thể chứng minh nó, cũng không thể phủ định nó, chỉ có thể chứng minh với một số số  $n$  cụ thể. Năm 1770, Ô-le đã chứng minh khi  $n$  bằng 3, 4, định lý Féc-ma là đúng, năm 1825 Dirichlet chứng minh khi  $n = 5$  kết luận chính xác; năm 1839 Lame chứng minh khi  $n = 7$  kết luận chính xác; ... đến năm 1976, có người dùng máy tính điện tử chứng minh khi  $n < 125000$ , định lý Féc-ma là đúng. Nhưng, do  $n$  không thể lấy tất cả những số tự nhiên, kiểu chứng minh này của mọi người là vô cùng vô tận, định lý Féc-ma có lẽ mãi mãi không thể trở thành định lý chân chính được.

Đến năm 1994 nhà toán học Anh Wairs cuối cùng qua phương pháp gián tiếp đã chứng minh trọn vẹn định lý Féc-ma, khiến nó trở thành định lý chân chính trước thế kỷ 21.

Câu chuyện định lý Féc-ma đã tạo nên những trào lưu nghiên cứu toán học, trong quá trình chứng minh nó, đã nảy sinh rất nhiều tư tưởng toán học và thành quả toán học mới, góp phần thúc đẩy sự phát triển của toán học.

## Từ màu sắc của bản đồ đã gây ra vấn đề gì?

Khi vẽ màu sắc cho bản đồ, chúng ta thường tô những màu không giống nhau lên những khu vực khác nhau của các vùng gần kề, khiến cho giữa những khu vực này có sự khác biệt. Vậy thì, vẽ một bản đồ, cần dùng bao nhiêu loại màu sắc khác nhau? Nếu vẽ một bản đồ cần 4 loại màu sắc, chúng ta gọi là “bản đồ bốn màu”, nếu cần 5 loại màu thì gọi là “bản đồ 5 màu”, cứ thế suy ra.

Năm 1852, Phnenxi Gesli vừa tốt nghiệp đại học Luân Đôn vẽ màu cho bản đồ nước Anh, ông phát hiện ra một hiện tượng vô cùng lí thú : Bất luận bản đồ phức tạp thế nào, các nước khác vùng chỉ cần 4 loại màu tô là đủ rồi. Cũng tức là, chỉ cần 4 loại màu sắc là có thể giúp mắt ta phân biệt được bất kỳ các nước nào lân cận nhau.

Thế là, ông thông báo tin này cho anh em của ông là Phedrech Gesli. Trình độ toán học của Phedrech sâu sắc, nhưng đối với câu hỏi này lại không giải được, đành đi hỏi thầy giáo của mình - giáo sư nổi tiếng Mogan. Sau một hồi chau mày suy nghĩ cũng đành bó tay, thế là ông nói lại câu hỏi này cho nhà toán học nổi tiếng Haminton, Haminton tài hoa đã khổ sở suy nghĩ vấn đề này 3 năm, cho đến khi qua đời không có bất cứ kết quả nào.

Năm 1878, trong đại hội hàng năm toán học Luân Đôn, nhà toán học người Anh Carry đã quy vấn đề này về “phỏng đoán bốn màu” : mỗi một bản đồ vẽ trên giấy chỉ cần dùng bốn màu không giống nhau là có thể khiến cho các quốc gia lân cận có thể phân biệt. Thời đó, nó cùng với định lí Féc-ma, phỏng đoán Gotebathe được gọi là ba vấn đề khó nhất của toán học cận đại.

Năm 1879, một nhà toán học nổi tiếng là Hen Pu đã phát biểu một chứng minh “phỏng đoán bốn màu”. Sau 11 năm, một nhà toán học đã chỉ ra sai sót trong chứng minh của ông, sau đó ông này lại sử dụng phương pháp này, chứng minh được thành công dùng 5 màu sắc có thể phân biệt được các quốc gia lân cận trên bản đồ. Đó chính là “định lí năm màu”.

Nhưng giảm từ 5 màu xuống còn 4 màu, điều này lại làm đau đNu nhiều nhà toán học. Năm 1920, Franklin đã chứng minh khi số nước nhỏ hơn 26 thì định lí 4 màu có thể thực hiện được. Sau đó, khi số nước tăng thêm 20, người ta lại phải mất đúng 47 năm mới chứng minh được. Bởi vì mỗi khi số nước tăng lên 1, 2 nước, thì quan hệ biên giới của các nước khác nhau sẽ trở nên phức tạp hơn rất nhiều, mà khi chứng minh vẫn phải xem xét đến những khả năng có thể xảy ra mà không được để bất cứ sai sót gì.

Năm 1976, nhà toán học nước Anh Hagen dùng phương pháp vô cùng phức tạp, bằng trợ giúp của máy tính đã chứng minh “phỏng đoán bốn màu”. Chứng minh của họ phải viết thành mấy trăm trang, dùng ba chiếc máy tính siêu lớn, tiêu tốn hơn 1200 tiếng đồng hồ. Từ đó, “phỏng đoán 4 màu” kéo dài 124 năm này trở thành “định lí 4 màu”.

Toàn bộ giới toán học náo động. Để kỷ niệm thời khắc mang tính lịch sử này, Bưu điện Trường đại học Illinois, nơi hai nhà toán học làm việc đã đóng dấu lên mỗi một bưu kiện bằng con dấu như thế này : “4 loại màu là đã đủ rồi”.



## Đường cao tốc thông tin là gì?

Mọi người đều biết đường cao tốc là một loại đường trải nhựa rất phẳng, xe đi lại với tốc độ cao, đưa khách, hàng hoá và các loại vật liệu đi khắp nơi với thời gian nhanh nhất. Vậy, đường cao tốc

Khái niệm “Đường cao tốc thông tin” thực ra là mượn từ “đường cao tốc” mà chúng ta đều biết để biểu đạt một cách hình tượng một sản phẩm khoa học kỹ thuật cao mới. Trên “đường cao tốc thông tin”, các loại thông tin nhìn không thấy, sờ không được sẽ chuyên qua chuyển lại như con thoi qua xử lí của máy tính; mà nguyên liệu cấu thành nên đường cao tốc thông tin không phải là gạch đá, nhựa đường, mà là những tia sáng mảnh như sợi tóc, trong suốt; Đây là đường truyền trung gian nhanh nhất được nhân loại phát hiện từ trước tới nay. Vậy còn “bến xe” của đường cao tốc thông tin thì sao? Chính là đầu ra của hàng ngàn máy tính lớn nhỏ.

Về mặt kỹ thuật mà nói, đường cao tốc thông tin chính là sự kết hợp của công nghệ cáp quang, công nghệ máy tính đa chức năng và nhiều dạng công nghệ thông tin khác. Có thể coi công nghệ máy tính và công nghệ thông tin là “nền đường”, cáp quang và mặt đường của đường cao tốc. Nói một cách đơn giản thì, nó là sự dung hoà của điện thoại, ti vi và máy tính, tạo nên một mạng lưới thông tin điện tử trên toàn quốc cho đến toàn thế giới mà trước kia chưa có, liên kết mọi người với nhau, từ đó thực hiện “làng hoá” toàn cầu.

Đường cao tốc thông tin khi được “thông xe” đã tác động rất lớn đối với nhân loại trên tất cả các lĩnh vực, tạo ra những thay đổi to lớn trong học tập và cuộc sống của con người.

Khi đó, những người yêu thích xem ti vi sẽ phát hiện cơ hội tăng thêm kênh truyền hình, 50 kênh hiện tại có thể tăng lên thành 500 kênh; học sinh có thể không cần đi đến trường cũng có thể nghe thầy giáo giảng bài được, thông qua ti vi thảo luận câu hỏi cùng thầy giáo; không ra khỏi nhà cũng vẫn biết được việc trong thiên hạ, trên mạng có thể đọc các loại sách báo cần thiết, mà không cần đi thư viện, phòng tư liệu; người thích sự tem có thể vào các hiệp hội sưu tập tem toàn cầu. Trên đường cao tốc thông tin, người ta thông qua nhiều đầu cuối môi giới lẫn nhau để thương lượng trao đổi.

Mọi người có thể làm việc ở nhà, kịp thời duy trì liên hệ với cấp trên và đồng sự, giống như ngồi ở văn phòng; chuyên gia các nơi trên thế giới có thể thông qua mạng tiến hành hội chẩn đối với bệnh nhân, chỉ đạo đối với phẫu thuật. Do người đi làm có thể không cần ra khỏi nhà, không cần đi lại giữa nhà và văn phòng, có thể giảm được rất lớn lưu lượng giao thông và ô nhiễm, khiến thế giới trở nên càng sạch sẽ hơn.

Hiện nay, chính phủ các nước đang đẩy mạnh kế hoạch xây dựng đường cao tốc thông tin. Mục tiêu của nước Mỹ là đầu thế kỷ 21 khiến cho đại bộ phận trong toàn quốc liên kết mạng, đồng thời giúp cho tất cả trường học, bệnh viện, thư viện đều có thể nối thông với đường cao tốc thông tin. Đến năm 2015 làm cho tất cả các công dân, tất cả các khu vực đều có được cơ hội giao lưu tin tức trên đường cao tốc thông tin.

Nhật Bản và một số nước Châu Âu cũng không chịu lạc hậu, đầu tư vốn lớn tiến hành xây dựng mạng lưới thông tin cáp quang.

Việc xây dựng đường cao tốc thông tin, sẽ mở ra kỷ nguyên mới cho lịch sử loài người. Tin rằng đến năm 2050, nhân loại sẽ thực sự bước vào xã hội tin tức.

# Công cụ tính toán ngày xưa của con người có những loại nào?

Các bạn có biết nhân loại thời nguyên thủy tính toán như thế nào không?

Khi đó sức sản xuất cực thấp, ngôn ngữ và chữ viết còn chưa hình thành, mọi người dùng phương pháp kết thừng để ghi lại con số, dùng que gỗ nhỏ để làm những phép tính toán cộng trừ đơn giản. Đến chế độ xã hội nô lệ, sức sản xuất được nâng cao, người ta cũng phát minh ra những công cụ tính toán mới.

Thời Xuân Thu, người ta dùng “thẻ” để tính toán, còn gọi “tính thẻ”. Thẻ được làm từ tre hoặc gỗ, bên trên đánh dấu những con số khác nhau, lấy những thẻ khác nhau ghép lại, có thể tiến hành phép tính toán cộng trừ nhân chia khác nhau. Ngoài ra, còn có thẻ tính bình phương, lập phương, v.v...

Đến đầu thời Minh triều, khi Chu Nguyên Chương thống trị Trung Quốc, tính thẻ được thay thế bằng bàn tính. Bạn có thể rất quen với kiểu bàn tính. Bàn tính thời cổ và bàn tính bây giờ khác biệt không nhiều, bên ngoài là khung gỗ hình chữ nhật, từ trên xuống dưới xuyên những que gỗ nhỏ, cũng chính là “giống”, thông thường chia thành 9 giống, 11 giống và 15 giống. Phía trên bàn tính còn có một xà ngang, trên mỗi một giống que của phía trên xà có hai hạt tròn, trên mỗi giống của phía dưới xà có 5 hạt. Khi tính toán gạt hạt tròn tính toán. Bởi vì bàn tính đơn giản dễ học, sử dụng tiện lợi nên cho đến nay vẫn còn được sử dụng ở một số nơi.

Đến thời kỳ cận đại, con người phải thực hiện những phép tính phức tạp trên con đường chinh phục giới tự nhiên, thế là xuất hiện các loại công cụ tính toán, như thước, máy tính lắc tay, máy tính điện động. Máy tính 1 tay là gì? Nó chính là công cụ máy tính lắp đặt hoàn toàn cơ khí, kèm theo một chiếc cần lắc, khi làm việc cần dùng tay chuyển động cần lắc, làm chuyển động các bộ phận cơ khí bên trong. Khi nó làm việc, tạp âm to, làm người ta tương đối mệt mỏi. Sau đó, trên cơ sở máy tính dùng tay lắc, thêm vào một chiếc mô tơ nhỏ, cũng chính là máy điện động nhỏ, nhưng tính toán số liệu phức tạp vẫn cần thời gian rất dài.

Theo sự phát triển nhanh chóng của khoa học kỹ thuật, quy mô tính toán và trình độ phức tạp cũng không ngừng tăng lên. Những năm 40 thế kỷ 20, các nhà khoa học thông qua mấy năm nỗ lực gian khổ, ứng dụng kỹ thuật điện tử đã sáng tạo ra một loại công cụ tính toán hoàn toàn mới- máy tính điện tử. Nó phát triển đến ngày nay, được ứng dụng rộng rãi trong cuộc sống của chúng ta. Sự phát minh và phát triển của nó là một trong những thành tựu khoa học kỹ thuật vĩ đại của thế kỷ 20.

# Có phải máy tính chỉ chuyên dùng để tính toán?

Phân tích từ cái tên “máy tính” có nghĩa là máy móc dùng cho tính toán. Đúng vậy, máy tính ra đời là do sự cần thiết đối với con người trong nghiên cứu khoa học và tính toán công trình. Trong nghiên cứu khoa học cơ sở nhà toán học, vật lí, hoá học, sinh vật học v.v..., trong thiết kế công trình khoa học như thiết kế máy bay, máy phát điện thuỷ lợi v. v... đều cần tiến hành khối lượng tính toán rất nhiều, sự xuất hiện của máy tính, không thể kể được thời gian, nhân lực, vật lực, còn cho ra đáp án đầy đủ, chính xác đối với những câu hỏi trước nay không giải quyết được. Máy tính với tốc độ nhanh, chính xác, hiệu quả cao của mình đã bước vào nhiều lĩnh vực khoa học.

Theo sự tiến bộ của khoa học kỹ thuật, nhân loại đã bước vào xã hội tin tức, các loại tin tức khối lượng lớn (như văn kiện, số liệu v.v..) không ngừng xuất hiện. Có lúc chúng ta cần lưu trữ những tin tức này, có lúc lại cần phân tích tin tức, còn có thể phải phân loại, truyền đi v.v..., khi đó, máy tính lại đảm nhận những nhiệm vụ này. Ngày nay, trong gia đình hiện đại, máy tính có thể giúp bạn học tập, lên sổ sách, xem phim, nghe nhạc, thậm chí lên mạng chơi, mua hàng, chuyển nhận thư tín v.v..., công năng nhiều đến mức kể không hết được. Ngày nay, máy tính đã trở thành một phần không thể thiếu trong cuộc sống của chúng ta.

Thế thì máy tính còn có thể làm được những gì?

Máy tính có thể giúp con người tiến hành công việc thiết kế máy móc, xây dựng, mạch điện và thiết kế cả bản thân máy tính. Có sự giúp đỡ của máy tính, không chỉ tăng nhanh thêm chất lượng, tốc độ sản xuất, mà còn khiến cho toàn bộ quá trình của dự án công trình đều được điều khiển dưới sự hỗ trợ máy tính, hoàn toàn thay đổi bộ mặt cũ trước kia. Máy tính còn ứng dụng rộng rãi vào lĩnh vực hàng không vũ trụ, quân sự và tự động hoá trong quá trình sản xuất. Ví dụ, việc điều khiển máy bay, đạn đạo, vệ tinh nhân tạo và phi thuyền vũ trụ đều dựa vào máy tính để thực hiện. Cỗ máy được điều khiển bởi máy tính có thể thực hiện gia công tự động linh kiện có độ chính xác cao và hình dạng phức tạp. Nói chung, máy tính ứng dụng rộng rãi trong việc điều khiển quá trình sản xuất.

Trong nghiên cứu máy tính, sức hấp dẫn nhất cũng như cái khó nhất là tình cảm của con người, tức là dùng máy tính mô phỏng hành vi, suy nghĩ của con người, ví dụ làm cho máy tính có cảm giác, suy luận, học tập và lí giải... như con người, để cho máy tính nghe âm thanh, nhận biết chữ, biết khám bệnh, biết chơi cờ, để sản xuất ra người máy thông minh. Nếu có người máy, nó có thể thay thế con người hoàn thành những công việc trong môi trường độc hại, tức là ngay cả công việc thường ngày, nó cũng có thể làm chất lượng tốt hơn con người. Có thể thấy tác dụng của máy tính không giới hạn ở công việc tính toán, nó có liên quan mật thiết với mọi lĩnh vực khác trong cuộc sống của chúng ta.

## Vì sao máy tính chứng minh được định lý số học?

Hơn 50 năm trước, từ khi chiếc máy tính đầu tiên ra đời, máy tính đã trở thành một kỹ thuật tiên tiến không thể thay thế trong cuộc sống, công việc của con người. Tên gọi của máy tính cho chúng ta biết, máy tính ngày trước chính là một công cụ tính toán, nó ra đời để đáp ứng nhu cầu tính toán phức tạp, phiền phức của nhân loại.

Ví dụ, “định lý bốn màu” nổi tiếng nói rằng, bất kỳ một bản đồ nào chỉ cần dùng bốn màu khác nhau là có thể phân biệt được các nước láng giềng. Trong vòng 124 năm, vô số nhà toán học đã đổ biết bao tâm sức mà vẫn chưa đưa ra được chứng minh hoàn chỉnh, bởi vì khi tăng lên 1, 2 nước; quan hệ biên giới giữa các nước khác nhau trở nên vô cùng phức tạp mang đến sự khó khăn rất lớn cho con người trong việc tính toán thủ công. Cho đến năm 1976, chính máy tính đã giúp các nhà toán học giải quyết được vấn đề chứng minh định lý này, gây ra chấn động trong giới toán học, hơn nữa lúc bấy giờ sử dụng ba chiếc máy tính cỡ siêu lớn đã làm hao phí hơn 1200 tiếng đồng hồ; nếu nhà toán học lúc đó dùng sức thủ công để hoàn thành, thì sẽ không thể làm được.

Dùng máy tính chứng minh định lý toán học có tính ưu việt độc đáo của nó: một là không sợ phiền phức, sở trường của máy tính là tiến hành những tính toán phức tạp khối lượng lớn, giúp nhà toán học giải thoát khỏi những tính toán phiền phức, hai là tính toán chuẩn xác, cơ bản không có sai sót gì. Vì máy tính làm việc vừa nhanh vừa tốt, cho nên rất nhiều người đã bắt đầu nghiên cứu làm thế nào để dùng máy tính thay con người chứng minh định lý, gọi là “máy tính chứng minh”, nó đã trở thành một phân nhánh mới của khoa học máy tính.

Nhiều nhà toán học đã nhiều năm dồn sức nghiên cứu máy móc hoá chứng minh định lý. Trên cơ sở hình học giải tích, họ sẽ đại số hoá định lý trong hình học phẳng, từ đó để cho máy tính thực hiện nhiệm vụ của mình.

Trên thế giới, các nhà toán học đã dùng máy tính tìm ra giá trị số Pi chính xác nhất mà mọi người biết đến cho tới ngày nay, số pi được tính chính xác đến 1073740000 đơn vị sau dấu phẩy. Không có sự giúp đỡ của máy tính, những thành tích này thật không thể đạt được.

Tin rằng cùng với sự tăng lên về dung lượng bộ nhớ và tốc độ xử lý máy tính sẽ mang lại những đột phá mới cho việc chứng minh định lý.

## Vì sao máy tính sử dụng hệ số nhị phân

Trong cuộc sống thường ngày, chúng ta đều sử dụng hệ số thập phân, số La Mã từ 0 đến 9. Thế nhưng máy tính trong xã hội tin tức hiện đại lại sử dụng hệ số nhị phân để thực hiện các phép tính số, bạn có biết vì sao không?

Chúng ta biết nhân loại sử dụng hệ số thập phân vì người có 10 ngón tay, hệ số thập phân có thể giúp tính toán mọi phép tính. Kỳ thực, hệ số nhị phân đối với máy tính cũng có nghĩa như vậy. Chúng ta hãy bắt đầu từ nguyên lí làm việc của máy tính trước nhé.

Tên gọi đầy đủ của máy tính là “máy tính điện tử số”. Nó không thể hoạt động mà không có dòng điện. Đối với một điểm nối trên mạch điện mà nói, trạng thái khi dòng điện chạy qua chỉ có hai loại: hoặc là thông điện hoặc là ngắt điện, hơn nữa, tin tức trên máy tính thông thường lưu giữ trên đĩa từ, bất luận là đĩa từ cứng hay đĩa từ mềm, cũng chỉ có hai trạng thái: từ hoá và chưa từ hoá. Bây giờ đĩa CD đã dùng rộng rãi, trạng thái vật lí của mỗi một điểm tin tức của nó cũng có hai loại: lồi và lõm, phân biệt được tác dụng tập trung ánh sáng và phân tán ánh sáng.

Từ đó có thể thấy, trạng thái biểu hiện của các môi trường lưu giữ thông tin mà máy tính sử dụng đều là hai loại.

Hệ số nhị phân chỉ sử dụng hai ký hiệu cơ bản : 0 và 1. Có thể dùng 0 biểu thị ngắt điện, 1 biểu thị thông điện; hoặc 0 biểu thị chưa từ hoá, 1 biểu thị từ hoá; biểu thị tán ánh sáng - điểm lồi, 1 biểu thị tập trung ánh sáng - điểm lõm.

Xem ra máy tính dùng hệ số nhị phân là phù hợp nhất. Nhưng hệ số nhị phân cũng có điểm không đầy đủ, nó viết ra những số rất dài, lại đọc khó hiểu, ví dụ: viết một số hai chữ số 98 của hệ số thập phân thành hệ số nhị phân là 1100010, có tới bảy chữ số. Sau đó, để bổ sung sự không đầy đủ này, người ta lại tìm ra hệ số bát phân và hệ số thập lục phân, chúng được sử dụng như nhau trong máy tính.

# Chuyển đổi như thế nào giữa hệ số thập phân và hệ số nhị phân?

Trong cuộc sống thường ngày, chúng ta sử dụng là hệ số thập phân, mà trong máy tính điện tử lại sử dụng hệ số nhị phân. Vậy thì, giữa hệ số thập phân và hệ số nhị phân sẽ được chuyển đổi như thế nào?

(1) Từ số thập phân chuyển thành hệ số nhị phân.

Phương pháp chuyển từ hệ số thập phân thành hệ số nhị phân vô cùng đơn giản, chỉ cần bạn học qua phép chia là sẽ làm được. Phương pháp này gọi là “liên tục chia 2 tìm số dư”. Tức là ta lấy số của hệ số thập phân liên tục chia cho 2, tìm được số dư, cho đến khi nào số thương bằng 0. Sau đó lấy số dư của mỗi lần chia viết theo thứ tự ngược lại, được số trong hệ số nhị phân.

Ví dụ quá trình chuyển số 11 trong hệ số thập phân sang thành số hệ số nhị phân là :

$$11 : 2 = 5 \text{ dư } 1$$

$$5 : 2 = 2 \text{ dư } 1$$

$$2 : 2 = 1 \text{ dư } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ dư } 1$$

Như vậy số 11 trong hệ số thập phân được chuyển thành số 1011 trong hệ số nhị phân. Nhớ rằng nhất định phải liệt kê số dư từ sau ra trước! Để viết thuận tiện chúng ta nhớ  $(11)_{10} = (1011)_2$ , số của góc dưới bên phải dấu ngoặc biểu thị hệ số của số trong dấu ngoặc. Như vậy có thể biểu thị rất rõ ràng số 11 hệ số thập phân bằng với 1011 của hệ số nhị phân.

Mời bạn tính toán một chút  $(302)_{10} = (?)_2$ . Đáp án là 100101110.

(2) Từ hệ số nhị phân chuyển sang hệ số thập phân.

Khi chuyển số từ hệ số nhị phân thành hệ số thập phân, chúng ta nên phân tích trước “quyền” của mỗi đơn vị trong hệ số nhị phân. “Quyền” là gì? Lấy ví dụ số thập phân  $2478, 2478 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 1$ , quyền của các số trên các hàng trong đó không giống nhau, như 2 ở hàng nghìn, quyền là 1000; 4 ở hàng trăm, quyền là 100; 7 ở hàng chục, quyền là 10; 8 ở hàng đơn vị, quyền là 1. “Quyền” giống như là quyền lực cho các số ở các hàng khác nhau trong một số, ví dụ cùng là 2, trong số 22, quyền của 2 số 2 khác nhau.

Trong hệ số nhị phân với các số được tạo nên từ 0 và 1, đơn vị của nó cũng có quyền, tuy nhiên quyền của hệ số nhị phân chỉ số mũ của 2, ví dụ số  $(1010)_2$  trong hệ số nhị phân được viết thành số trong hệ số thập phân như sau :

$$(1010)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 1 = 8 + 2 = (10)_{10}$$

Ở đây 2<sup>3</sup> là quyền của số 1 thứ nhất. Thông thường, 1010 xét từ phải sang trái, quyền của các chữ số lần lượt là mũ n của 2, như quyền của số 0 thứ nhất bên phải là  $2^0 = 1$ , của số 1 thứ 2 bên phải là 2<sup>1</sup>, và cứ thế suy ra.

Áp dụng phương pháp chuyển hệ số nhị phân thành hệ số thập phân này mời bạn lại thử xem xét  $(10101001)_2 = (?)_{10}$ , đáp án là  $(169)_{10}$

Sự chuyển đổi giữa hai hệ số rất thú vị! Bây giờ cho bạn một chuỗi các số 0 và 1, bạn chắc sẽ biết chúng đại diện bao nhiêu chữ?

## Bạn có hiểu thế nào là hệ số bát phân, hệ số thập lục phân không?

Chúng ta biết các số thường dùng trong cuộc sống hàng ngày thuộc hệ số thập phân, mà máy tính điện tử số chỉ sử dụng hệ số nhị phân. Thế thì còn có những loại hệ số nào thường hay dùng trong máy tính điện tử không? Đó chính là hệ số bát phân và

Trong hệ bát phân, chỉ có tám số từ 0 đến 7, phương pháp ghi số của nó là “gấp 8 tiến 1”, thế thì quyền của các đơn vị số cũng là hình thức số mũ của 8. Khi biểu thị số hệ bát phân, dùng hình thức như sau,  $(17)_8$ . Ví dụ, để phân biệt số 17 này không phải là 17 của hệ số thập phân. Thế thì,  $(17)_8$  trong hệ số thập phân là bao nhiêu? 17 của hệ số bát phân bằng với  $1 \times 8 + 7 = (15)_{10}$  bạn xem, nếu không ký hiệu rõ ràng, chắc chắn sẽ sai sót.

Trong số hệ số thập lục phân, ngoài sử dụng 10 chữ số từ 0 đến 9 của hệ số thập phân, còn phải thêm sáu chữ cái A, B, C, D, E, F. Phương pháp ghi số của nó là “gấp 16 tiến 1”, vậy thì đến 16 trong hệ số thập lục phân sẽ là  $(10)_{16}$ . Quyền của các đơn vị số là hình thức số mũ của 16. Bạn có biết  $(3AF6)_{16}$  trong hệ số thập lục phân là số gì của hệ số thập phân không? Chúng ta tính toán một chút:

$$(3AF6)_{16} = 3 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 15 \times 16 + 6 \times 1 = 15094,$$

A ở đây biểu thị 10 trong hệ số thập phân, F thì biểu thị 15.

Số hệ số bát phân và số hệ số thập lục phân chúng ta đều không thể một lúc nhìn ra được nó là bao nhiêu của số hệ số thập phân, cho nên có khi cần tiến hành chuyển đổi chế độ số bắt buộc. Phương pháp lấy số hệ số bát phân, hệ số thập lục phân chuyển thành số hệ số thập phân, đã được giới thiệu ở trên. Thế thì ngược lại, làm thế nào chuyển từ số hệ số thập phân thành số hệ số bát phân hoặc thập lục phân? Phương pháp giống với “phép chia 2 liên tục tìm dư” chuyển từ hệ số thập phân thành hệ số nhị phân, chỉ cần chuyển thành “phép chia 8 liên tục tìm dư” và “phép chia 16 liên tục tìm dư” là được. Ví dụ  $(259)_{10} = (403)_8$ ,  $(2686)_{10} = (A7E)_{16}$  Trong máy tính đều được nhập hệ số bát phân và hệ số thập lục phân là để bù cho những điểm thiếu sót của số hệ số nhị phân, cũng may là ba đơn vị số của hệ số nhị phân vừa vặn ghi thành một đơn vị số hệ số bát phân, như vậy, độ dài của số hệ số nhị phân sẽ rút ngắn đi 1/3. Một đơn vị số của hệ số thập lục phân có thể đại diện cho bốn đơn vị số của hệ số nhị phân, như vậy, số hệ số nhị phân sẽ càng thêm “gọn nhỏ sắc bén”, tinh xảo hơn so với hệ số thập phân.



# Mã ASCII là gì?

Bạn đã nghe nói đến mã ASCII chưa? nó là một loại mã trao đổi thông tin tiêu chuẩn quốc tế, ASCII là cách viết tắt chữ đầu của tên tiếng Anh (American Standard Code for Information Interchange). Loại mã này được Ủy ban tiêu chuẩn trao đổi thông tin Mỹ đưa vào sử dụng đầu tiên, sau đó nó được sử dụng rộng rãi và đã phát triển thành một loại mã tiêu chuẩn quốc tế trong ngành máy tính và thông tin số.

Mã ASCII dùng làm gì? Nó chuyên dùng cho biểu thị ký hiệu. Ký tự và ký hiệu là một bộ phận lớn trong số liệu được máy tính lưu giữ và xử lý, nhất là trong hệ thống làm việc tự động hoá, có lúc chúng ta cần nhập các tài liệu hồ sơ như tên, tuổi nghề nghiệp..., phải đánh số, phân loại; phải làm biểu lương v.v..., những cái này phải dùng các ký hiệu không số, vậy sẽ thể hiện trong máy tính như thế nào? Ví dụ, ký hiệu chữ cái tiếng Anh: A, B, C..., Z; a, b, c,...y, z; ký hiệu chuyên dùng: \$ @ , #, +, - , /, =, " ...v.v...

Những ký hiệu này không thể trực tiếp nhập vào máy tính được trước tiên phải mã hoá cho chúng, sau khi chuyển sang hệ số nhị phân (cũng gọi là số hoá) mới có thể xử lý được, mã ASCII chính là một trong những phương pháp để thực hiện việc mã hoá này.

Mã ASCII dùng 7 đơn vị trong hệ số nhị phân biểu thị một ký hiệu, lại thêm một đơn vị gọi là số hiệu nghiệm (số thông tin kiểm tra sai sót) như vậy thành 8 đơn vị, mà trong máy tính một byte chính là 8 đơn vị, cho nên, mã ASCII vô cùng có lợi cho việc xử lý và truyền tải thông tin của máy tính.

Trong rất nhiều sách máy tính, người ta đều cung cấp bảng mã ASCII, ví dụ mã ASCII của ký tự A là 1000001, mã ASCII của ký tự 6 là 010110, mã ASCII của ký tự 10 là 0101011, mã ASCII của ký tự # là 0100011.

Có mã ASCII rồi, thì có thể chuyển đổi ký tự và ký hiệu thành số liệu ký tự hệ số nhị phân; mà mã BCD có thể chuyển đổi số hệ số thập phân dùng trong tính toán thành số liệu số hệ số nhị phân. Như vậy, qua một số trình tự dịch đặc thù, máy tính có thể đọc hiểu ngôn ngữ của chúng ta, tiến hành các bước công việc tiếp theo.

## Tại sao máy tính bị “tràn” dữ liệu trong tính toán?

Chúng ta đều biết “tràn” là hình dung từ th dùng để hình dung chất lỏng trong vật chứa bị chảy ra ngoài khi đầy, ví dụ nước trong cốc đổ đầy quá, sẽ bị chảy tràn ra ngoài qua thành cốc. Trong máy tính, cũng có chuyện “tràn” như vậy, nó chỉ sự “tràn” dữ liệu trong tính toán. Vậy tại sao máy tính lại bị tràn?

Thì ra, phạm vi số mà máy tính có thể biểu thị là có hạn. Nếu số quá to hoặc quá nhỏ vượt quá phạm vi biểu thị này, thì gọi là tràn dữ liệu. Thiết bị tính toán giống như cái cốc, số giống như nước trong cốc, khi số cho vào trong cốc không chứa hết, nó sẽ chảy ra một phần. Phần bị chảy ra sẽ bị mất đi khiến kết quả tính toán không chính xác, từ đó có thể ảnh hưởng đến các quá trình tính toán sau, vấn đề sẽ trở nên nghiêm trọng, không đơn giản như chuyện nước chảy ra từ cốc. Vì vậy máy tính khi tính toán nhất định phải tránh để tràn dữ liệu.

Ví dụ một thiết bị tính toán có dung lượng chỉ 8 đơn vị, một số thuộc hệ số nhị phân có 8 đơn vị, mỗi một đơn vị có thể là 0 hoặc 1; trong khi đơn vị bên trái nhất là đơn vị ký hiệu, tức là ký hiệu

Vậy thì giá trị lớn nhất của số được biểu thị bằng bảy vị trí còn lại là  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 27$ . Lại xem xét đến vấn đề âm hay dương của đơn vị ký hiệu, ta sẽ có phạm vi biểu thị số của thiết bị tính toán 8 đơn vị này sẽ là -27 đến 27 - 1, tức là từ -128 đến 127.

Khi kết quả tính toán vượt quá phạm vi này, hiện tượng tràn dữ liệu sẽ xảy ra, ví dụ số 129 trong máy được biểu thị là 1000001, mà số 1 của vị trí bên trái nhất là đơn vị ký hiệu, 1 chỉ số âm, vậy là số này sẽ là -1, chứ không phải là 129, bạn xem, khoảng cách sai số quá lớn!

Theo sự phát triển của khoa học máy tính, máy tính ngày này đều là 16 hoặc 32 bit, phạm vi biểu thị số nâng cất lớn từ đó đảm bảo cho các phép toán thông thường không xảy ra sự cố tràn dữ liệu.

Nhưng, nếu xảy ra sự cố tràn dữ liệu thì nên làm thế nào? Trước tiên yêu cầu ngừng máy, sau đó kiểm tra để tìm ra nguyên nhân bị tràn ra. Khi máy tính tính toán, nhất là khi cộng hai số cùng âm hoặc cùng là dương, phải phán đoán kết quả tính toán có phải gây ra sự cố tràn dữ liệu, nếu phát hiện dữ liệu bị tràn, phải xử lý mới có thể đảm bảo tính chính xác của quá trình tính toán tiếp theo.

Bởi vậy, chúng ta khi sử dụng máy tính, cần đọc trước thông tin về máy, xem xem phạm vi tính toán của nó là bao nhiêu bit, để tránh trong khi tính toán nảy sinh sự cố tràn dữ liệu.

## Cài mật mã và giải mật mã là thế nào?

Theo sự phát triển và phổ cập của khoa học máy tính, văn kiện, hộp thư điện tử, mạng máy tính... những thứ cần đến cài mật mã và giải mật mã càng ngày càng nhiều.

Nói đến mật mã, bạn có lẽ cũng nghĩ đến ám hiệu đặc vụ sử dụng trong phim điện ảnh! Đúng vậy, đó chính là mật mã mà chúng ta đã sớm biết đến. Mà ngày nay, mật mã đã thâm nhập vào cuộc sống thường ngày của chúng ta, cũng không còn là thứ bí mật gì nữa. Ví dụ, tài khoản trong ngân hàng của bạn có mật mã chứ, có lẽ bạn còn có mật mã của va li hành lí, hoặc hộp bút chì, vở ghi chép, trong đơn vị thường có két sắt, không có mật mã có được không? Mà nổi mạng càng cần dùng mật mã để bảo vệ tốt, để tránh sự công kích của hacker (tin tặc, kẻ chuyên đột nhập vào máy tính của người khác làm những việc phi pháp). Đến nay, con người đã hình thành một môn khoa học mới gọi là mật mã học.

Mục đích sử dụng mật mã là bảo vệ tin tức của chúng ta không để kẻ khác lấy cắp đi một cách phi pháp. Nguyên tắc cài mật mã là chuyển hoán tin tức có thể đọc hiểu thành những tin tức nhìn thì thấy rối loạn không hiểu. Quá trình giải mật mã ngược lại với cài mật mã, thông thường mà nói, hai bên sử dụng mật mã đều có một quyển mật mã hoặc từ điển, họ dựa theo phương pháp ước định để tiến hành mã hoá và giải mã. Trong mật mã học gọi quy tắc biến đổi này là khoá mã, chính là giống như chìa khoá mở khoá, không có chìa khoá mã thì không thể giải mật mã được.

Ví dụ, để bảo mật điện văn, phải dựa vào quy luật nhất định để chuyển nó thành mật mã, người nhận báo lại theo quy luật ước định để dịch nó thành nguyên bản. Quy tắc chuyển đổi như sau: chuyển chữ cái A thành chữ cái E, a thành e, tức là biến thành chữ cái thứ tư sau nó, W thành A, X thành B, Y thành C, Z thành D. Chữ cái chuyển đổi theo quy luật nói trên, ký hiệu không phải chữ cái thì không đổi. Lúc này "China!" biến thành "Glmre!" mà người nhận được mật văn "Glmre!" cần dùng ngược lại quy tắc mã hoá để giải mã, lấy mỗi một chữ cái biến thành chữ cái thứ tư trước nó, mới có thể nhận được văn bản thật "China!". Khoá mã ở đây - và phương pháp thêm mật mã chỉ có thể là hai người đưa nhận được biết, không thể công khai.

Bước vào xã hội tin tức, để bảo vệ an toàn số liệu thông tin, như tin tức của đường dây điện thoại, sóng siêu âm, số liệu vệ tinh v.v... , mật mã là biện pháp rất hữu dụng

## Vì sao cần học tốt số học?

Bắt đầu từ khi chúng ta vào lớp một tiểu học, cho đến lớp 12 trung học, trong thời gian 12 năm, hàng năm đều phải học toán học. Trong giáo trình tiểu học và phổ thông cơ sở, toán học, ngữ văn, ngoại ngữ được gọi là ba môn chính, các nước trên thế giới đều như vậy. Không biết bạn đã nghĩ đến vì sao phải học toán học chưa, mà còn phải học tốt toán học nữa?

Điều này chủ yếu có 3 nguyên nhân:

Thứ nhất, toán học cũng giống như ngữ văn, ngoại ngữ, là một loại ngôn ngữ, nó là ngôn ngữ của khoa học. Nó sử dụng các loại công cụ như chữ số, ký hiệu, công thức, hình tượng, khái niệm, định lý v.v., biểu đạt giản lược mà chính xác quan hệ giữa vạn vật trên thế giới, quan hệ vị trí trong không gian, đối với việc nhận loại nhận thức thế giới. Không hiểu toán học, chính là không thể lí giải khoa học.

Thứ hai, Toán học giúp bồi dưỡng tư duy lí tính, nếu nói ngữ văn có thể dùng để biểu thị tình cảm, nguyện vọng, ý chí, thì toán học chủ yếu dùng để tiến hành tư duy lí tính như khái quát, trừu tượng, suy lí ... Toán học nghiêm khắc chính xác, trước nay không hàm hồ, đối với việc giáo dục khả năng tư duy cho con người là không thể thiếu được.

Thứ ba, toán học xuất hiện ở mọi lĩnh vực, nhỏ thì mua đồ trên phố, lớn thì tết kế máy bay tên lửa, điều khiển vận hành vệ tinh, tất cả đều không thể tách rời toán học được. Hơn nữa, sự cao thấp về trình độ toán học của một quốc gia, phản ánh được quốc gia đó có cường thịnh hay không.

Toán học là khoa học nghiên cứu về số và hình, phàm những vật có “số lượng to nhỏ” và “hình dáng vị trí” đều không tách rời với tri thức toán học. Toán học càng học càng thích nó, đừng sợ toán học, càng không thể ghét nó, chỉ có thể chắc chắn đi từng bước chăm chỉ học tập tốt toán học, mới có thể giúp bạn làm chủ được tri thức khoa học.

## Tại sao khi dòng nước chảy gợn sóng lại không bị biến dạng?

Chắc hẳn bạn không chỉ quan sát có một lần hiện tượng khi chúng ta ném một viên đá xuống mặt nước tĩnh lặng thấy nổi lên những gợn sóng hình tròn. Vì sao lại sinh ra những gợn sóng đó? Bởi vì sau khi mặt nước bị hòn đá ném xuống sóng tạo ra sẽ từ điểm này phát triển về 4 phía với cùng một vận tốc vì thế trong nháy mắt khoảng cách từ các điểm sóng đến nơi sóng phát sinh là bằng nhau và các điểm này lại nằm trên cùng một đường tròn nên sẽ gây ra gợn sóng tròn.

Hiện tượng này xảy ra khi mặt nước yên tĩnh. Vậy khi dòng nước chuyển động thì hiện tượng này sẽ thay đổi như thế nào. Ở những dòng sông nước chảy xiết sóng tạo ra từ những hòn đá ném xuống nước, hiện tượng khuyếch tán tứ phía vẫn là hình tròn, kéo ra vô tận.

Nếu như bạn chưa từng quan sát kĩ mà chỉ là suy đoán bạn cũng có thể nhận ra được sự phát triển của gợn sóng. Ở những nơi cùng hướng với dòng nước sẽ nhanh hơn những nơi ngược dòng và ở hai bên. Như vậy các điểm của gợn sóng ở trên bề mặt giống như như một sợi dây đàn nổi kín cứ vờn dài ra mãi, trong bất cứ trường hợp nào nó cũng không phải hình tròn phẳng.

Tuy nhiên, thực tế lại không phải như vậy. Khi bạn ném một hòn đá xuống mặt hồ yên lặng và nhìn thấy xuất hiện gợn sóng tròn thì khi bạn ném một hòn đá xuống dòng sông chảy xiết bạn cũng thấy hiện tượng tương tự. Tại sao lại như vậy?

Như vậy dòng nước chảy có ảnh hưởng gì đến sự biến đổi của gợn sóng tròn? Dòng nước chảy đã tác dụng lên các điểm trên gợn sóng theo hướng mũi tên và sự chuyển động của các điểm đó đều theo hướng song song với nhau và tốc độ bằng nhau, di chuyển được những khoảng cách bằng nhau. Khi các điểm ở trạng thái chuyển động song song thì nó sẽ không thay đổi hình dạng ban đầu, hình tứ giác 1234 ban đầu khi di chuyển đến vị trí mới đã chuyển thành hình tứ giác 1'2'3'4'. 4 cạnh của hình tứ giác này và 4 cạnh của hình tứ giác ban đầu hoàn toàn bằng nhau. Giả sử trên đường tròn đó lấy nhiều hơn 4 điểm thì ở vị trí mới chúng ta cũng được một hình đa giác có số đỉnh tương đương. Nếu như đó là một đường tròn thì sau khi chuyển động song song hình mà chúng ta thu được cũng là một hình tròn.

Bởi vậy khi dòng nước chuyển động, những gợn sóng hình tròn do hòn đá ném tạo ra cùng với tâm của nó sẽ chảy về hạ lưu với vận tốc của dòng nước và vẫn giữ được hình dạng tròn của nó

## “Ngắn 3, dài 4, huyền 5” có nghĩa là gì?

Khi chúng ta học hình học phẳng có một định lý rất thú vị về các cạnh trong tam giác vuông, định lý này được sử dụng rất rộng rãi cho nên hầu như những người đã học qua môn toán đều biết về nó.

Định lý này có nội dung như sau: trong một tam giác vuông, tổng bình phương hai cạnh góc vuông bằng bình phương của cạnh huyền. Bây giờ ta gọi tam giác ABC là một tam giác vuông, trong đó góc B là góc vuông (90 độ), theo định lý này ta có  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ .

Định lý này được ghi lại trong cuốn sách nổi tiếng “Chu Bể Toán Kinh” - cuốn sách toán học đầu tiên hiện vẫn còn tồn tại của Trung Quốc, khi đó là vào khoảng thế kỷ 12 trước công nguyên, sách có ghi lại những lời nói chuyện giữa Chu Công và Thương Cao, trong lời đáp của Thương Cao có một câu là “cho nên khi gặp thước, lấy cạnh vuông ngắn là 3, cạnh vuông dài là 4, cạnh huyền là 5”. Sau đó câu nói này được nói gọn lại là “ngắn 3, dài 4, huyền 5”. Ngắn và dài ở đây là chỉ hai cạnh góc vuông của hình tam giác vuông, còn huyền là chỉ cạnh huyền của nó. Khi độ dài 2 cạnh góc vuông lần lượt là 3 và 4, độ dài của cạnh huyền là 5 thì sẽ có  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

Ở phương Tây, người ta gọi định lý này là “định lý Pitagores”. Sở dĩ như vậy là vì định lý này do một nhà toán học Hy Lạp cổ có tên Pitagores phát hiện ra khoảng 500 năm trước công nguyên. Thực ra, trước đó rất lâu, các nhà toán học Trung Quốc đã phát hiện ra định lý này.